E como a transformação Ψ é biuvívoca, à parte o ponto $x=r, y=0$, que é imagem de 0 e 2π, podemos aplicar o raciocínio de Teor. 13 e, portanto, $L(\Phi) \geqslant 2\pi r$.

Como consequência, o comprimento de um arco simples fechado, isto é, topològicamente equivalente a uma circunferência, pode calcular-se à maneira da geometria elementar: decompõe-se C num número n de arcos simples sem pontos interiores comuns, traçam-se as respectivas coıdas e toma-se depois o supremo dos perímetros dos polígonos (inscritos) resultantes.

Os últimos resultados justificam inteiramente as definições de *curva rectificável* e de *comprimento*.

E acontece ainda que na *família dos sub-arcos de um arco simples ou simples fechado*, C, *o comprimento se comporta como numa medida (linear): não-negativa aditiva, nula apenas quando o arco se reduz a um ponto.* Trata-se de uma consquência imediata da aditividade da $L(\Psi; I)$ como função do sub-intervalo $I \subset I_0$, sendo $\Psi(u), u \in I_0$, uma trajectória geométrica sobre C.

E a definição de curva aqui adotada exclui o caso *patológico das curvas de Peano* [1], *Hilbert* ou de *Osgood*, cujo gráfico *enche um quadrado* ou *pelo menos não tem medida nula.*

---

[1] Dada por Peano em 1890 e que marcou um momento decisivo na separação dos dois conceitos, até então identificados, de *curva-trajectória* e *curva-conjunto do* E_2.

Um teorema sobre a estrutura dos divisores de um grupo

por **F. Dias Agudo**

Consideremos o grupo G_8 constituido pelas matrizes

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ a=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\ b=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\ c=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$d=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\ e=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\ f=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\ g=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

e que, como fàcilmente se vai concluir, é isomorfo do grupo das rotações do quadrado.

Da transformação linear $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ resulta que que às matrizes de G_8 corresponderão, respectivamente, as seguintes transformações de coordenadas no plano:

$$I\begin{pmatrix}x'=x\\y'=y\end{pmatrix}\ a\begin{pmatrix}x'=x\\y'=-y\end{pmatrix}\ b\begin{pmatrix}x'=-x\\y'=y\end{pmatrix}\ c\begin{pmatrix}x'=-x\\y'=-y\end{pmatrix}$$

$$d\begin{pmatrix}x'=y\\y'=x\end{pmatrix}\ e\begin{pmatrix}x'=y\\y'=-x\end{pmatrix}\ f\begin{pmatrix}x'=-y\\y'=x\end{pmatrix}\ g\begin{pmatrix}x'=-y\\y'=-x\end{pmatrix}$$

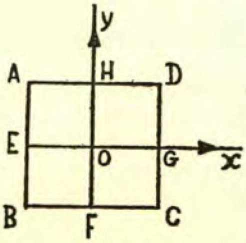


Fig. 1

de modo que (fig. 1): I será a «rotação» identidade; a a simetria em relação a EG; b a simetria em relação a HF; c a rotação de 180° em torno de O; d a simetria em relação a BD; e a rotação de 90° no sentido directo em torno de O; f a rotação de 270° no sentido directo em torno de O e g a simetria em relação a AC, resultados que fàcilmente nos permitiam construir a tábua de multiplicação do grupo G_8.

Posto isto, procuremos representar gràficamente a estrutura dos sub-grupos de G_8.

Designando por ε nm dos números ± 1, temos $\begin{pmatrix}\varepsilon&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\varepsilon^2&0\\0&\varepsilon^2\end{pmatrix}=I$ [é o caso da matriz I, com $\varepsilon=1$, e c, com $\varepsilon=-1$]; $\begin{pmatrix}\varepsilon&0\\0&-\varepsilon\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\varepsilon^2&0\\0&\varepsilon^2\end{pmatrix}=I$ [caso das matrizes a e b]; $\begin{pmatrix}0&\varepsilon\\\varepsilon&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\varepsilon^2&0\\0&\varepsilon^2\end{pmatrix}=I$ [matrizes d e g]; e $\begin{pmatrix}0&\varepsilon\\-\varepsilon&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-\varepsilon^2&0\\0&-\varepsilon^2\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0&\varepsilon\\-\varepsilon&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0&-\varepsilon\\\varepsilon&0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0&\varepsilon\\-\varepsilon&0\end{pmatrix}^4=I$ [matrizes e e f], o que nos permite concluir que

$$I;\ \{I,a\};\ \{I,b\};\ \{I,c\};\ \{I,d\};\ I,g\};$$

e

$$\{I,e,e^2,e^3\}\equiv\{I,e,c,f\}\equiv\{I,f,f^2,f^3\}$$

são sub-grupos de G_8.

As relações

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0\\0&\varepsilon_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1&0\\0&\delta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\,\delta_1&0\\0&\varepsilon_2\,\delta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon&0\\0&\delta\end{pmatrix}$$

onde $\varepsilon_i, \delta_i, \varepsilon, \delta$, representam também qualquer dos números ± 1, mostram, por outro lado, que as 4 matrizes I, a, b, c (em que os elementos nulos se encontram na 2.ª diagonal) constituem um outro sub-grupo (o grupo de Klein) de G_8.

Anàlogamente, mostram as igualdades

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

que as 4 matrizes I, c, d, g (que têm iguais os elementos não nulos) constituem novo sub-grupo de G_8.

Facilmente se veria que não há outros divisores próprios além dos que encontrámos:

$$I;\ \{I,a\};\ \{I,b\};\ \{I,c\};\ \{I,d\};\ \{I,g\};$$
$$\{I,e,e^2,e^3\} \equiv \{I,c,e,f\} \equiv \{I,f,f^2,f^3\};$$
$$\{I,a,b,c\};\ \{I,c,d,g\}.$$

Estes resultados estão de acordo com o facto de todo o grupo de ordem p^a (p primo) ter $p+1$ divisores de ordem p^α; e permitem-nos desenhar (fig. 2) o gráfico da estrutura dos sub-grupos de G_8 que, como mostra a sub-estrutura assinalada (e outras existem isomorfas a ela), é uma estrutura não modular.

Pode mesmo afirmar-se que 8 é a menor ordem de um grupo cujos divisores têm estrutura não modular, de acordo com o seguinte teorema que o exemplo apresentado nos sugeriu.

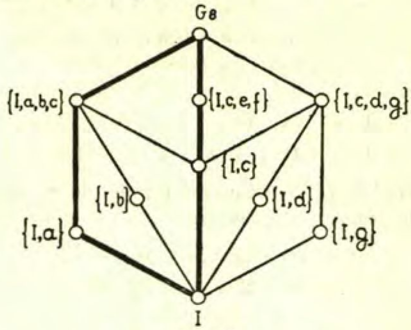
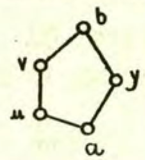


Fig. 2

Teorema: É modular a estrutura dos sub-grupos de qualquer grupo de ordem inferior a 8.

Com efeito, para que a estrutura não seja modular deve conter uma subestrutura isomorfa de



Ora o caso mais simples que se pode apresentar é aquele em que a é de ordem 1 (grupo unidade), u de ordem 2, v de ordem 4, b de ordem 8, q. e. d.

Uma desigualdade entre números positivos

por Maurício Matos Peixoto (Rio de Janeiro)

Sejam $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, n números não-negativos e suponhamos que dois deles, pelo menos, sejam diferentes de zero, isto é

$$x_{n-1} > 0.$$

Ponhamos

$$S = x_1 + \cdots + x_n.$$

Vamos demonstrar a relação

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S-x_i} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Com efeito, ponhamos

$$(2) \qquad P = (S-x_1)\cdots(S-x_n),\ P_i = \frac{P}{S-x_i} \qquad (i = 1, \cdots, n).$$

É claro, então, que

$$(3) \qquad 0 < P_1 \leqslant P_2 \leqslant \cdots \leqslant P_n.$$

A relação (1) a demonstrar é equivalente a

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \geqslant \frac{n}{n-1} P$$

que se obtém de (1) multiplicando ambos os membros por P. Mas (4) ficará demonstrada se mostrarmos que

$$(5) \qquad A = \sum_{i=1}^{n} [(n-1) P_i x_i - P] \geqslant 0.$$

Mas, em virtude de (2),

$$(n-1) x_i P_i - P = (n-1) x_i \frac{P}{S-x_i} - P = P_i (n \cdot x_i - S)$$

e, portanto,

$$A = \sum_{i=1}^{n} P_i [n \cdot x_i - S].$$

Ponhamos

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} P_i (n x_i - S), \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$