Anàlogamente, mostram as igualdades

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_2 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\,\varepsilon_2 & 0\\ 0 & \varepsilon_1\,\varepsilon_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0\\ 0 & \varepsilon_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_1\,\varepsilon_2\\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\ \varepsilon & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_1\\ \varepsilon_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_2 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_1\,\varepsilon_2\\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon\\ \varepsilon & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_1\\ \varepsilon_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\,\varepsilon_2 & 0\\ 0 & \varepsilon_1\,\varepsilon_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}$$

que as 4 matrizes I, c, d, g (que têm iguais os elementos não nulos) constituem novo sub-grupo de G_8.

Facilmente se veria que não há outros divisores próprios além dos que encontrámos:

$$I;\ \{I,a\};\ \{I,b\};\ \{I,c\};\ \{I,d\};\ \{I,g\};$$
$$\{I,e,e^2,e^3\}\equiv\{I,c,e,f\}\equiv\{I,f,f^2,f^3\};$$
$$\{I,a,b,c\};\ \{I,c,d,g\}.$$

Estes resultados estão de acordo com o facto de todo o grupo de ordem p^a (p primo) ter $p+1$ divisores de ordem p^{α}; e permitem-nos desenhar (fig. 2) o gráfico da estrutura dos sub-grupos de G_8 que, como mostra a sub-estrutura assinalada (e outras existem isomorfas a ela), é uma estrutura não modular.

Pode mesmo afirmar-se que 8 é a menor ordem de um grupo cujos divisores têm estrutura não modular, de acordo com o seguinte teorema que o exemplo apresentado nos sugeriu.

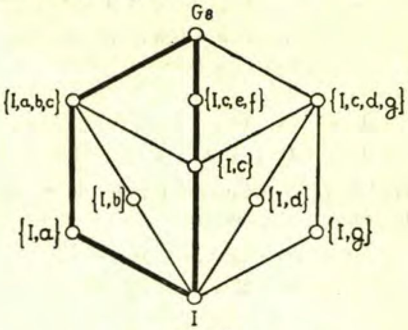
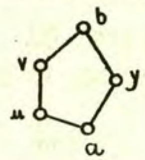


Fig. 2

TEOREMA: É modular a estrutura dos sub-grupos de qualquer grupo de ordem inferior a 8.

Com efeito, para que a estrutura não seja modular deve conter uma subestrutura isomorfa de



Ora o caso mais simples que se pode apresentar é aquele em que a é de ordem 1 (grupo unidade), u de ordem 2, v de ordem 4, b de ordem 8, q. e. d.

Uma desigualdade entre números positivos

por **Maurício Matos Peixoto** (Rio de Janeiro)

Sejam $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, n números não-negativos e suponhamos que dois deles, pelo menos, sejam diferentes de zero, isto é

$$x_{n-1} > 0 .$$

Ponhamos

$$S = x_1 + \cdots + x_n .$$

Vamos demonstrar a relação

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S-x_i} \geqslant \frac{n}{n-1} .$$

Com efeito, ponhamos

$$(2)\qquad P=(S-x_1)\cdots(S-x_n)\,,\ P_i=\frac{P}{S-x_i}\qquad (i=1,\cdots,n).$$

É claro, então, que

$$(3)\qquad 0 < P_1 \leqslant P_2 \leqslant \cdots \leqslant P_n .$$

A relação (1) a demonstrar é equivalente a

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{n} P_i\, x_i \geqslant \frac{n}{n-1}\, P$$

que se obtém de (1) multiplicando ambos os membros por P. Mas (4) ficará demonstrada se mostrarmos que

$$(5)\qquad A=\sum_{i=1}^{n}\left[(n-1)\,P_i\,x_i-P\right]\geqslant 0 .$$

Mas, em virtude de (2),

$$(n-1)\,x_i\,P_i-P=(n-1)\,x_i\,\frac{P}{S-x_i}-P=P_i\,(n\cdot x_i-S)$$

e, portanto,

$$A=\sum_{i=1}^{n} P_i\,[n\cdot x_i-S] .$$

Ponhamos

$$A_k=\sum_{i=1}^{k} P_i\,(nx_i-S)\,,\qquad (k=1,2,\cdots,n) .$$

Tem-se $A_n = A$ e portanto

$$A = A_{n-2} + P_{n-1}(nx_{n-1} - S) + P_n(nx_n - S).$$

Como $nx_n \geqslant S$ (só valendo a igualdade no caso em que todos os x_i são iguais), podemos escrever, em virtude de (3),

$$(6) \quad A \geqslant A_{n-2} + P_{n-1}(nx_{n-1} - S) + P_{n-1}(nx_n - S) = \\ = A_{n-2} + P_{n-1}[n(x_{n-1} + x_n) - 2S].$$

Majorando os $n-2$ primeiros termos de S, respectivamente por x_{n-1} e x_n tem-se

$$S \leqslant (n-2)\,x_{n-1} + x_{n-1} + x_n$$
$$S \leqslant (n-2)\,x_n + x_{n-1} + x_n$$

donde

$$(7) \qquad 2S \leqslant n(x_{n-1} + x_n)$$

De (6) e (7) resulta então

$$(8) \quad A \geqslant A_{n-3} + P_{n-2}(n\,x_{n-2} - S) \\ + P_{n-2}[n(x_{n-1} + x_n) - 2S] = \\ = A_{n-3} + P_{n-2}[n(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) - 3S].$$

Observando que $n(x_{n-2}+x_{n-1}+x_n) \geqslant 3S$ e procedendo como anteriormente, obtém-se finalmente que

$$A \geqslant P_1[n(x_1 + \cdots + x_n) - nS] = 0.$$

Está, portanto, demonstrada a (5) e, consequentemente, a (1).

É imediata a verificação de que, se os x_i não forem todos iguais, vale a desigualdade em (1), no sentido estrito. No caso em que $n=3$ a desigualdade (1) encontra-se na Mathematicae Notae, vol. 3, 1943, p. 182.

P E D A G O G I A

PROGRAMA DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA DO ENSINO LICEAL, CONFORME O DECRETO N.º 37.112 DE 22 DE OUTUBRO DE 1948

1.º Ano

Conhecimento dos sólidos geométricos (paralelepípedo, prisma, pirâmide, cilindro e cone de revolução, esfera) e das figuras planas (triângulo, quadrado, rectângulo, losango, paralelogramo, trapézio, polígono convexo e círculo). Elementos geométricos.

Sistema métrico decimal:

Medidas de comprimento; emprego dos instrumentos usuais (metro articulado, fita métrica, cadeia do agrimensor). Comprimento de um segmento; distância entre dois pontos; perímetro de uma linha poligonal; perímetro de um polígono regular; perímetro de uma linha curva.

Tomar as medidas feitas como centro dos seguintes estudos: *a*) Leitura e escrita dos números inteiros e decimais; estima das medidas; *b*) As quatro operações fundamentais sobre números inteiros; propriedades mais importantes; sua aplicação às provas das operações; *c*) As mesmas operações sobre números decimais; *d*) Cálculo do quociente de dois números inteiros ou decimais, com uma dada aproximação; *e*) Cálculo mental; *f*) Expressões numéricas; uso do parentesis; cálculo de valor numérico de uma expressão.

Medidas de superfície; inconvenientes da medição directa de superfícies; áreas do rectângulo e do quadrado; emprego do papel milimétrico; áreas das superfícies do paralelepípedo rectângulo e do cubo.

Tomar as medidas feitas no quadrado como ponto de partida para os seguintes estudos: *a*) Potenciação; multiplicação e divisão de potências de base igual ou de expoente igual; potência de uma potência; expressões numéricas. *b*) Raiz quadrada; regra prática; extracção da raiz quadrada de um número inteiro ou decimal com uma dada aproximação.

Medidas de volume e de capacidade; emprego de medidas graduadas e de provetas; volumes do paralelepípedo rectângulo e do cubo.

Medidas de massa; emprego da balança de Roberval.

Números fraccionários; representação gráfica; propriedades; comparação de frações.

Noção de ângulo e de arco de circunferência; igualdade e desigualdade de ângulos; ângulos adjacentes; operações sobre ângulos; unidades de ângulo; emprego do transferidor; ângulos complementares, suplementares e verticalmente opostos. Propriedades mais elementares destes ângulos.

Posição relativa de duas rectas no plano; ângulos formados por um sistema de duas rectas cortadas por uma terceira; relações entre estes ângulos quando as duas primeiras forem paralelas: ângulos de lados respectivamente paralelos e perpendiculares.

Ângulo interno e ângulo externo de um triângulo e de um polígono convexo qualquer: soma dos ângulos externos; soma dos ângulos internos.

Reducão de número complexo a incomplexo e vice-versa; operações sobre números complexos.

Gráficos: gráficos de barras; gráficos cartesianos.