Tem-se $A_n = A$ e portanto

$$A = A_{n-2} + P_{n-1}(nx_{n-1} - S) + P_n(nx_n - S).$$

Como $nx_n \geqslant S$ (só valendo a igualdade no caso em que todos os x_i são iguais), podemos escrever, em virtude de (3),

$$(6) \quad A \geqslant A_{n-2} + P_{n-1}(nx_{n-1} - S) + P_{n-1}(nx_n - S) = \\ = A_{n-2} + P_{n-1}[n(x_{n-1} + x_n) - 2S].$$

Majorando os $n-2$ primeiros termos de S, respectivamente por x_{n-1} e x_n tem-se

$$S \leqslant (n-2)\, x_{n-1} + x_{n-1} + x_n$$
$$S \leqslant (n-2)\, x_n \quad + x_{n-1} + x_n$$

donde

$$(7) \qquad 2S \leqslant n(x_{n-1} + x_n)$$

De (6) e (7) resulta então

$$(8) \quad A \geqslant A_{n-3} + P_{n-2}(n\, x_{n-2} - S) \\ + P_{n-2}[n(x_{n-1} + x_n) - 2S] = \\ = A_{n-3} + P_{n-2}[n(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) - 3S].$$

Observando que $n(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) \geqslant 3S$ e procedendo como anteriormente, obtém-se finalmente que

$$A \geqslant P_1[n(x_1 + \cdots + x_n) - nS] = 0.$$

Está, portanto, demonstrada a (5) e, consequentemente, a (1).

É imediata a verificação de que, se os x_i não forem todos iguais, vale a desigualdade em (1), no sentido estrito. No caso em que $n=3$ a desigualdade (1) encontra-se na Mathematicae Notae, vol. 3, 1943, p. 182.

PEDAGOGIA

PROGRAMA DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA DO ENSINO LICEAL, CONFORME O DECRETO N.º 37.112 DE 22 DE OUTUBRO DE 1948

1.º Ano

Conhecimento dos sólidos geométricos (paralelepípedo, prisma, pirâmide, cilindro e cone de revolução, esfera) e das figuras planas (triângulo, quadrado, rectângulo, losango, paralelogramo, trapézio, polígono convexo e círculo). Elementos geométricos.

Sistema métrico decimal:

Medidas de comprimento; emprego dos instrumentos usuais (metro articulado, fita métrica, cadeia do agrimensor). Comprimento de um segmento; distância entre dois pontos; perímetro de uma linha poligonal; perímetro de um polígono regular; perímetro de uma linha curva.

Tomar as medidas feitas como centro dos seguintes estudos: *a*) Leitura e escrita dos números inteiros e decimais; estima das medidas; *b*) As quatro operações fundamentais sobre números inteiros; propriedades mais importantes; sua aplicação às provas das operações; *c*) As mesmas operações sobre números decimais; *d*) Cálculo do quociente de dois números inteiros ou decimais, com uma dada aproximação; *e*) Cálculo mental; *f*) Expressões numéricas; uso do parentesis; cálculo de valor numérico de uma expressão.

Medidas de superfície; inconvenientes da medição directa de superfícies; áreas do rectângulo e do quadrado; emprego do papel milimétrico; áreas das superfícies do paralelepípedo rectângulo e do cubo.

Tomar as medidas feitas no quadrado como ponto de partida para os seguintes estudos: *a*) Potenciação; multiplicação e divisão de potências de base igual ou de expoente igual; potência de uma potência; expressões numéricas. *b*) Raiz quadrada; regra prática; extracção da raiz quadrada de um número inteiro ou decimal com uma dada aproximação.

Medidas de volume e de capacidade; emprego de medidas graduadas e de provetas; volumes do paralelepípedo rectângulo e do cubo.

Medidas de massa; emprego da balança de Roberval.

Números fraccionários; representação gráfica; propriedades; comparação de frações.

Noção de ângulo e de arco de circunferência; igualdade e desigualdade de ângulos; ângulos adjacentes; operações sobre ângulos; unidades de ângulo; emprego do transferidor; ângulos complementares, suplementares e verticalmente opostos. Propriedades mais elementares destes ângulos.

Posição relativa de duas rectas no plano; ângulos formados por um sistema de duas rectas cortadas por uma terceira; relações entre estes ângulos quando as duas primeiras forem paralelas: ângulos de lados respectivamente paralelos e perpendiculares.

Ângulo interno e ângulo externo de um triângulo e de um polígono convexo qualquer: soma dos ângulos externos; soma dos ângulos internos.

Redução de número complexo a incomplexo e vice-versa; operações sobre números complexos.

Gráficos: gráficos de barras; gráficos cartesianos.

Notas ao programa. Os números começam por ser considerados concretamente, como resultado de medidas, e só depois como números abstractos.

As propriedades das operações limitam-se às duas ou três mais importantes de cada operação e devem ser concretizadas por meio de pequenos problemas.

No cálculo das expressões numéricas devem evitar-se dados que conduzam a resultados com mais de três algarismos.

O estudo dos números fraccionários deve iniciar-se por problemas concretos.

Os números complexos a considerar representam, de preferência, medidas de ângulo e de tempo.

2.º Ano

Geometria

Triângulos; relações entre os seus elementos; altura de um triângulo; igualdade de triângulos; casos de igualdade de triângulos.

Comparação dos segmentos da perpendicular e da oblíqua tirados do mesmo ponto para a mesma recta: distância de um ponto a uma recta; distância de duas rectas paralelas.

Quadriláteros: paralelogramo, losango, rectângulo, quadrado e trapézio; propriedades mais importantes.

Circunferência; arco de circunferência; raio, corda, diâmetro, secante e tangente; circunferência inscrita e circunscrita a um triângulo; círculo; segmento de círculo; sector circular; coroa circular. Posição relativa de duas circunferências.

Perímetro de uma circunferência; determinação experimental do valor de π.

Figuras equivalentes; equivalência do paralelogramo e do trapézio ao rectângulo e do triângulo ao paralelogramo. Áreas destas figuras, do polígono irregular, do polígono regular e do círculo.

Áreas das superfícies do prisma recto, da pirâmide regular, do cilindro e do cone de revolução.

Volumes dos sólidos indicados.

Aritmética

Noções de múltiplo e submúltiplo de um número; restos da divisão de um número inteiro por 10 e potências de 10, por 2 e 5, por 9 e 3; critérios de divisibilidade por estes números. Prova dos nove das operações.

Divisores comuns de dois ou mais números; máximo divisor comum de dois ou mais números: determinação do máximo divisor comum de dois números pelas divisões sucessivas. Múltiplos comuns de dois ou mais números; menor múltiplo comum de dois ou mais números: determinação do menor múltiplo comum de dois números partindo do máximo divisor comum.

Noção de número primo; decomposição de um número num produto de factores primos; cálculo do máximo divisor comum e do menor múltiplo comum de vários números utilizando a decomposição em factores primos.

Fracções; simplificação e redução ao menor denominador comum; dízimas; redução de uma fracção a dízima; operações sobre fracções. Fracções generalizadas; valores numéricos de expressões de termos fraccionários.

Proporcionalidade directa e inversa; proporções geométricas; propriedades fundamentais. Aplicações da proporcionalidade a regras de três simples e composta, percentagens, regras de companhia e juros simples.

Representação gráfica da proporcionalidade directa; aplicação à resolução de problemas simples.

Notas ao programa. Nos «casos de igualdade de triângulos» não se devem destacar os «casos de igualdade de triângulos rectângulos».

No cálculo das fracções deve evitar-se a multiplicidade das regras. Se algum número dado for inteiro, escrever-se-á sob a forma de fracção com o denominador mais conveniente.

As operações sobre fracções incluem a raíz quadrada, calculada com uma dada aproximação.

Os problemas de regra de três composta devem restringir-se ao caso em que figuram apenas três grandezas; os problemas de juros serão ùnicamente tratados como problemas de regra de três composta, sem lhes dar relevo que os destaque dos outros problemas do mesmo género.

Ao tratar de percentagens e juros o professor mostrará algumas facturas, cadernetas de depósito, letras e cheques.

No 2.º ano o programa inicia-se pela geometria.

3.º Ano

Álgebra

Exemplos de grandezas que podem variar em dois sentidos opostos; números positivos e negativos; posição de um ponto sobre um eixo; operações sobre números qualificados.

Expressões algébricas; monómios e polinómios; valores numéricos de expressões algébricas de uma ou duas variáveis.

Representação de um ponto num plano (em coordenadas cartesianas rectangulares). Noção elementar de variável e de função, dada a partir de grandezas de uso corrente; a representação gráfica de $y=ax$ e $y=ax+b$, em que a e b são valores numéricos.

Monómios inteiros de uma e duas variáveis: adição algébrica, multiplicação, divisão e potenciação.

Polinómios inteiros de uma variável e homogéneos de duas variáveis: adição algébrica; multiplicação; casos notáveis da multiplicação; divisão.

Fracções algébricas; simplificação e operações, apenas no caso de termos monómios.

Equações numéricas do 1.º grau a uma incógnita: resolução algébrica e gráfica.

Sistemas de duas equações numéricas do 1.º grau a duas incógnitas: resolução algébrica e gráfica.

Problemas muito simples que se resolvam por meio de uma equação numérica do 1.º grau a uma incógnita ou por um sistema de duas equações numéricas do 1.º grau a duas incógnitas.

Desigualdades inteiras do 1.º grau a uma incógnita: resolução algébrica e gráfica.

Geometria plana

Recta, semi-recta e segmento de recta.

Ângulos; ângulos adjacentes; ângulos complementares e suplementares; ângulos verticalmente opostos.

Triângulos; os três primeiros casos de igualdade de triângulos; relações entre os elementos de um triângulo.

Perpendicular ao meio de um segmento de recta; bissectriz de um ângulo. Linhas e pontos notáveis no plano do triângulo.

Rectas paralelas; propriedades angulares; ângulos de lados respectivamente paralelos e perpendiculares. Soma dos ângulos do triângulo; ângulo externo.

Construções gráficas.

Quadriláteros: propriedades características do paralelogramo, losango, rectângulo, quadrado e trapézio.

Círculo: arcos, cordas e apótemas; arcos e ângulos ao centro; medidas de arcos e de ângulos; unidades respectivas.

Ângulo inscrito; ângulo de um segmento; ângulo ex-inscrito; ângulo formado por duas cordas; ângulo formado por duas secantes; relações entre as medidas destes ângulos e as dos arcos correspondentes.

Notas ao programa. A representação gráfica das funções indicadas deve ser precedida da revisão dos gráficos do 1.º ciclo que possam servir de base a este estudo.

Os casos notáveis da multiplicação referem-se apenas ao quadrado de binómios e à diferença de quadrados.

Os princípios de equivalência das equações, sistemas de equações e inequações são apenas enunciados e verificados em face de exemplos numéricos.

Na resolução algébrica dos sistemas devem empregar-se apenas os métodos de substituição e redução ao mesmo coeficiente.

O estudo das equações será iniciado pela representação e consequente resolução de problemas muito simples.

A resolução das desigualdades fraccionárias não está incluída neste programa.

O estudo do triângulo e do círculo dará oportunidade ao conhecimento de proposições recíprocas.

O estudo da circunferência, da perpendicular ao meio de um segmento e da bissectriz de um ângulo introduzirá o conceito de «lugar geométrico».

Ao estudar os «três primeiros casos de igualdade de triângulos» o professor referir-se-á à existência do quarto caso.

4.º ano

Álgebra

Expressões algébricas; decomposição de polinómios em factores, pondo em evidência factores comuns ou aplicando os casos notáveis da multiplicação.

Fracções algébricas; simplificação e operações nos casos em que é possível a factorização indicada.

Equações numéricas e literais do 1.º grau a uma incógnita. Sistemas de duas equações numéricas e literais do 1.º grau a duas incógnitas; sistemas de três equações numéricas do 1.º grau e três incógnitas.

Problemas do 1.º grau a uma, duas e três incógnitas.

Generalização da noção de potência; potências de expoente nulo e de expoente negativo; operações.

Noção de número irracional; radicais; cálculo de radicais. Potências de expoente fraccionário; operações.

Sucessões numéricas. Noção de infinitamente grande e de infinitamente pequeno; noção de limite de uma sucessão.

Geometria plana

Lugares geométricos: pontos equidistantes de um ponto dado; de dois pontos dados; de uma recta dada: de duas rectas dadas. Aplicação a problemas de construção.

Razão de dois segmentos; relações entre segmentos de concorrentes intersectadas por paralelas; teorema de Thales e suas consequências. Homotetia; simetria em relação a um ponto. Semelhança; triângulos semelhantes e casos de semelhança dos triângulos. Consequências numéricas da semelhança dos triângulos: teoremas relativos a meias proporcionais no triângulo rectângulo, teoremas de Pitágoras, teoremas relativos ao quadrado do lado oposto a um ângulo agudo e a um ângulo obtuso, relações determinadas pelas bissectrizes; segmentos proporcionais no círculo.

Polígonos; semelhança de polígonos. Polígonos regulares: propriedades elementares.

Expressões que dão os valores dos lados e dos apótemas do quadrado, do hexágono regular e do triângulo equilátero em função do raio da circunferência circunscrita.

Perímetro da circunferência; comprimento de um arco.

Áreas; unidade de área. Figuras equivalentes. Áreas do rectângulo, do quadrado, do paralelogramo, do triângulo, do losango, do trapézio e do polígono; áreas do círculo e do sector circular.

Notas ao programa. No estudo dos radicais consideram-se índices apenas inteiros e superiores à unidade.

O estudo dos limites resume-se às noções indicadas, dadas por intermédio de exemplos da aritmética e da geometria.

5.º Ano

Álgebra

Logarítmos; teoremas relativos ao cálculo logarítmico; logarítmos decimais; uso de tábuas (de cinco decimais).

Equações do 2.º grau a uma incógnita; resolução algébrica. Problemas do 2.º grau.

Progressões aritméticas e geométricas; termo geral e soma de n termos.

Geometria no espaço

Noção de plano; modos de definir o plano.

Posição relativa de duas rectas no espaço. Posição relativa da recta e do plano; paralelismo da recta ao plano. Posição relativa de dois planos; paralelismo de dois planos. Ângulo de duas rectas no espaço; perpendicularidade da recta ao plano.

Diedros; perpendicularidade de dois planos. Ângulo de uma recta com um plano.

Distâncias.

Ângulos sólidos; seus elementos. Triedros: relações entre as faces.

Poliedros; poliedros regulares. Superfícies prismática e piramidal; superfícies cilíndrica e cónica. Prisma, pirâmide e troncos respectivos; cilíndro, cone e troncos respectivos. Superfícies e sólidos de revolução (cilindro, cone, tronco de cone e esfera).

Esfera; zona, calote e segmentos esféricos; lúnula e cunha esféricas; camada esférica.

Áreas das superfícies do paralelepípedo, prisma, pirâmide. tronco de pirâmide regular, cilíndro, cone e tronco de cone de revolução. Áreas da zona esférica e da superfície da esfera.

Volumes do paralelepípedo, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

Notas ao programa. No estudo das progressões não se deve tratar do problema da inserção de meios.

Os logarítmos, que são considerados como expoentes, têm neste programa uma feição nìtidamente prática; por vezes deve pedir-se uma dada aproximação no resultado. Equações envolvendo logarítmos, ou qualquer outro tipo de problemas teóricos, são inteiramente banidas.

O estudo das equações do 2.º grau deve ser iniciado de modo análogo ao das equações do 1.º grau, isto é, a partir de problemas simples. Os exemplos devem limitar-se ao caso de raízes reais.

6.º Ano

Álgebra

Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação geométrica de algumas funções.

Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites.

Noção elementar de continuidade de uma função.

Propriedades dos polinómios inteiros.

Adição algébrica, multiplicação e divisão de polinómios.

Divisão por $(x-a)$; polinómio idênticamente nulo; polinómios idênticos; princípio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; regra de Ruffini.

Fracções algébricas. Símbolos de impossibilidade; símbolos de indeterminação da forma $0/0$, ∞/∞ e $0\times\infty$; verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada.

Equações: noções gerais e princípios de equivalência. Equação do 1.º grau a uma incógnita: resolução algébrica e gráfica; discussão.

Equação do 1.º grau a duas incógnitas: soluções inteiras, soluções inteiras e positivas; resolução numérica e gráfica.

Sistema de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas: resolução algébrica e gráfica; discussão.

Trigonometria

Generalização da noção de ângulo e de arco; medidas.

Funções circulares directas: definição, variação e representação gráfica; funções circulares correspondentes a ângulos complementares, suplementares, que diferem de π radianos, simétricos, e cuja soma é igual a 2π radianos. Redução de um ângulo ao 1.º quadrante.

Relações entre as funções circulares do mesmo ângulo; valores destas funções para alguns casos particulares.

Funções circulares inversas.

Aritmética racional

Teoria dos números inteiros e das operações fundamentais.

Potenciação; sistemas de numeração.

Divisibilidade.

Números primos.

Máximo divisor comum e menor múltiplo comum.

Notas ao programa. No estudo das funções consideram-se apenas funções de uma variável real, mas inclui-se o caso em que há uma variável intermediária e uma final (função de função).

Para a determinação do verdadeiro valor, as expressões a considerar são apenas funções racionais fraccionárias ou expressões redutíveis a estas funções.

No estudo dos números inteiros ter-se-à em atenção que a teoria da adição e da multiplicação são apresentadas pelo método de indução; as anologias entre estas duas operações serão realçadas de modo a permitir abreviar o seu estudo e torná-lo simultâneamente mais profícuo.

7.º Ano

Álgebra

Análise combinatória — elementos distintos e sem repetição. Binómio de Newton.

Números complexos a duas unidades; forma algébrica: igualdade, desigualdade e operações.

Equação do 2.º grau a uma incógnita; resolução algébrica e gráfica; discussão.

Equação biquadrada; resolução algébrica; discussão. Transformação de um radical duplo na soma algébrica de dois radicais simples.

Equações irracionais redutíveis ao 2.º grau.

Trinómio do 2.º grau; representação gráfica; propriedades. Inequações: noções gerais e princípios de equivalência. Inequações do 2.º grau a uma incógnita; inequações fraccionárias que se resolvam por meio de inequações do 1.º ou 2.º grau a uma incógnita.

Problemas do 1.º e 2.º grau; discussão.

O problema das tangentes e o das velocidades: noção de derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas e das funções circulares directas; derivada da função de função.

Trigonometria

Fórmulas da soma e da diferença de dois ângulos.

Fórmulas da duplicação e bissecção do ângulo.

Fórmulas de transformação logarítmica.

Tábuas trigonométricas: uso das tábuas naturais e logarítmicas.

Resolução de algumas equações trigonométricas simples.

Resolução de triângulos rectângulos e obliquângulos (casos clássicos); cálculo de áreas.

Aplicações a problemas simples de topografia.

Geometria

Introdução à geometria analítica plana:

Coordenadas cartesianas e polares; suas relações.

Distância de dois pontos; coordenadas do ponto médio de dois pontos dados.

Noção de lugar geométrico definido por uma equação e de equação de uma linha; determinação das equações correspondentes a alguns lugares geométricos muito simples.

Equações cartesianas da recta: problemas sobre a recta: equações da recta que passa por um e dois pontos; ponto de intersecção de duas rectas; ângulo de duas rectas; condições de paralelismo e perpendicularidade de duas rectas; distância de um ponto a uma recta.

Estudo elementar dos lugares geométricos definidos por equações numéricas da forma: $x^2+y^2=r^2$; $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$; $b^2x^2\pm a^2y^2=a^2b^2$; $xy=k$; $y^2=2px$; $x^2=2qy$.

Equações cartesianas: *a*) Da circunferência; *b*) Da elipse e da hipérbole, referidas aos eixos; *c*) Da parábola, referida ao eixo e à tangente no vértice.

Notas ao programa. As equações a que o programa se refere limitam-se a «equações de coeficientes reais».

As equações trigonométricas a considerar são as que se podem reduzir a equações algébricas dos programas do 6.º e 7.º anos, quando se toma para incógnita $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ou $\operatorname{tg} x/2$.

Não se incluem no programa as demonstrações de equivalência das fórmulas relativas aos três teoremas fundamentais da resolução de triângulos.

As coordenadas cartesianas referem-se apenas a eixos rectangulares.

Observações

1.º ciclo

Com o ensino da matemática neste ciclo pretende-se que o aluno adquira o hábito de observar factos e generalizar os resultados; de sistematizar e classificar as propriedades estabelecidas experimentalmente; e, sem deixar de estimular a curiosidade e o interesse, pretende-se ainda habituar a criança a concentrar-se sobre a matéria em estudo, a executar com ordem e cuidado as experiências que constituem o fundo deste ensino e a registar no seu livro ou no seu caderno, com método e asseio e em linguagem adequada ao seu desenvolvimento mental, não apenas as experiências em que tomou parte ou viu fazer no curso, mas também o que se pode inferir delas e esteja no âmbito deste programa.

No 1.º ano não se separa o ensino da aritmética do da geometria; constituem um todo, o que permite acentuar a correlação existente entre estes dois ramos da matemática, como convém a estudos que devem manter um tão nítido carácter elementar.

No 2.º ano já se faz essa separação, mas o ensino tem ainda o mesmo sentido intuitivo e experimental intimamente coordenado com os interesses do aluno. Os conhecimentos de geometria continuam a adquirir-se por intuição sensível baseada na observação e na experiência, sendo as demonstrações lógicas totalmente banidas e substituídas por verificações experimentais.

Recomenda-se particularmente todo o cuidado com o rigor das definições e com o modo de sistematizar e coordenar os conhecimentos que os alunos vão adquirindo por via experimental.

É também indispensável obrigá-los a fixar determinadas propriedades e conceitos; sem o uso, embora parcimonioso, da memória, os resultados, por mais brilhantes que pareçam, são apenas passageiros e ilusórios.

De tudo o que fica dito se depreende que a «matemática» terá a cooperação íntima do «desenho» e dos «trabalhos manuais» e que o professor usará, tanto quanto possível, o método do laboratório.

Cada aluno deve ter uma colecção das figuras planas que constam deste programa e alguns sólidos geométricos, em cartão ou em madeira.

O liceu deve dispor de caixas de pesos e medidas, balanças de Roberval, provetas graduadas, tesouras e qualquer outro material que o professor ache conveniente para bem cumprir este programa.

Livros para o ensino

O livro para o primeiro ano terá o aspecto de um caderno de observações e registo de resultados; será gràficamente atraente e conterá gravuras, desenhos, gráficos, tabelas, questões propostas e resolvidas a par de outras não resolvidas e com os espaços necessários para a resolução. Estas questões tomam a forma de exercícios de aplicação; exercícios para esclarecimento de noções e regras ou para as formular e redigir em termos correctos; exercícios de revisão e coordenação de ideias.

Algumas gravuras são desenhos de modelos a executar pelos alunos.

O livro para o 2.º ano é um compêndio de geometria e aritmética. De aspecto gráfico cuidado, terá fundamentalmente em atenção a idade dos alunos a que se destina; em cada capítulo deverá conter exercícios no género dos indicados para o 1.º ano, com as respectivas respostas.

2.º ciclo

Na organização deste programa teve-se em vista que o papel formativo da geometria supera, e muito, o da álgebra.

O rigor e o sentido lógico das demonstrações de geometria elementar dão aos alunos hábitos de precisão de ideias e de linguagem, permitindo-lhes aplicar com êxito o raciocínio lógico-dedutivo não só a outras ciências como a questões da vida real.

O professor deve acautelar os alunos, por meio de exemplos adequados, contra os perigos da intuição sensível e da verificação experimental usadas no 1.º ciclo, levando-os deste modo a criar no espírito a necessidade da demonstração lógica.

Retoma-se neste ciclo o estudo da geometria plana desde o início, para construir, a partir dos alicerces, o edifício lógico-dedutivo da geometria. Deve-se, porém, ter em atenção as reduzidas possibilidades mentais dos alunos deste ciclo, e em especial do 3.º ano, pelo que são de aceitar sem demonstração as proposições que aos alunos pareçam evidentes, considerando-se, tanto na geometria plana como na geometria no espaço, uma axiomática muito generalizada.

Recomenda-se o uso de modelos, principalmente em geometria no espaço, não com a finalidade do 1.º ciclo, mas porque a observação e a experiência devem preceder as demonstrações; estas serão feitas por vezes sem recurso a figuras na pedra, servindo o modelo de base ao encadeamento lógico dos raciocínios.

Dentro de cada assunto, e em especial no programa do 5.º ano, o professor deve expôr apenas os teoremas mais simples e os mais importantes com as respectivas demonstrações. É preferível o entendimento perfeito da demonstração de poucos teoremas à retenção na memória de muitos teoremas, com ou sem demonstração; apenas nestas condições é possível o aluno fazer por si próprio, embora com o estímulo e auxílio do professor, as demonstrações de outros teoremas não apresentados na aula. Considera-se este trabalho pessoal do aluno um dos principais meios de alcançar os objectivos do ensino da geometria neste ciclo.

A resolução numérica e gráfica de numerosos problemas é o complemento indispensável deste programa de geometria.

O estudo da álgebra será orientado de modo a levar o aluno à compreensão de que este ramo da matemática é uma generalização da aritmética.

A distribuição dos assuntos pelos diferentes anos do ciclo foi feita de molde a introduzir em cada um deles novos centros de interesse que em parte contivessem os dos anos anteriores, o que obriga a repetir e a ampliar os fundamentos mais importantes da técnica do cálculo. A aquisição desta técnica e a resolução de problemas constituem a base do ensino da álgebra elementar; se a técnica de cálculo é indispensável para prosseguimento de estudos e como estímulo da atenção, a resolução de problemas é fundamental, não apenas como aplicação dessa técnica, mas porque satisfaz à preocupação formativa que orienta este programa. As noções de limite e infinitamente pequeno visam apenas à resolução de certos problemas geométricos — determinação de alguns perímetros, áreas e volumes — e o professor deve limitar-se ao desenvolvimento indispensável para atingir esta finalidade.

No cumprimento deste programa devem os métodos gráficos continuar a merecer especial atenção; de facto, estes métodos têm um valor educativo considerável e uma importância crescente, tanto nas aplicações práticas como na investigação científica.

Em todos os anos do ciclo o programa inicia-se pela álgebra; no 5.º ano esta parte do programa deve estar concluída no fim primeiro período.

Livros para o ensino. Compêndio de álgebra, em um volume, para os 3.º, 4.º e 5.º anos;

Compêndio de geometria, em um volume, para os 3.º, 4.º e 5.º anos.

Em cada capítulo os compêndios deverão apresentar exercícios de aplicação, dispostos segundo ordem crescente de dificuldade, com as respectivas respostas.

No compêndio de geometria, e sempre que tal seja possível, os teoremas deverão ser imediatamente seguidos de questões propostas aos alunos, quer sob a forma de pequenos problemas, de natureza gráfica ou numérica, quer sob a forma de questões teóricas de fácil dedução.

O aspecto gráfico dos compêndios, principalmente de geometria, deve merecer especial atenção.

3.º ciclo

O estudo da matemática no 3.º ciclo deve constituir para o aluno uma ginástica intelectual que lhe permita raciocinar com precisão e clareza, tanto no campo científico como no da vida prática.

Pretende-se que o aluno não só fique de posse de um certo número de princípios e teorias, em que será geralmente exigido o rigor próprio desta disciplina, mas que tenha desenvolvido a iniciativa pessoal e a faculdade de raciocínio, de modo a poder iniciar com confiança os estudos superiores.

Mantém-se neste programa o estudo da «aritmética racional», embora reduzido à teoria dos números inteiros, porque os seus métodos de estudo são os que mais se prestam a criar no aluno hábitos de rigor científico e ainda porque esta teoria vem esclarecer alguns conhecimentos adquiridos no 1.º ciclo, dando-lhes o encadeamento lógico indispensável à precisão matemática.

O programa de «geometria analítica», embora limitado a uma ligeira introdução a estudos que o aluno fará desenvolvidamente em cursos superioros, permite-lhe não concluir o curso liceal sem fazer ideia do maravilhoso instrumento de trabalho e de descoberta que é este ramo de matemática. A propósito deste estudo, e sempre que haja oportunidade, o professor fará pequenas revisões de geometria sintética.

Em todos os assuntos do programa, e em especial no de geometria analítica, o professor deve abster-se de um desenvolvimento incompatível com a índole do ensino liceal, com a capacidade mental dos alunos que frequentam estes cursos e com o tempo que lhes é destinado.

No estudo dos diferentes ramos da matemática, e em particular no da aritmética racional, o professor deve chamar a atenção dos alunos para os métodos de demonstração usados na matemática, servindo-se dos teoremas que reputar mais convenientes e indicando, no decorrer das demonstrações, as características de cada um deles.

Como a assimilação de uma ciência só é perfeita se a teoria e a prática se auxiliarem e completarem mùtuamente, um dos tempos semanais será destinado a aula prática.

Os factos da história da matemática relacionados com os assuntos a estudar, quando adaptados à mentalidade dos alunos, constituem um poderoso auxiliar para a boa compreensão de certas questões e, por vezes, também um incitamento ao trabalho.

Livros para o ensino. Compêndio de álgebra, em um volume; Compêndio de aritmética racional; Compêndio de trigonometria, em um volume; Compêndio de geometria analítica.

Os compêndios devem inserir notas biográficas dos matemáticos a que, segundo o desenvolvimento dos programas, haja de fazer-se referência. Devem também indicar uma pequena bibliografia de autores nacionais ou estrangeiros que os alunos possam consultar com gosto e relativa facilidade.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

COLÓQUIO INTERNACIONAL DE CÁLCULO DAS PROBABILIDADES E DE ESTATÍSTICA MATEMÁTICA

O Centro Nacional de Investigação Científica (C. N. R. S.) e a Fundação Rockfeller tornaram possível a realização deste colóquio internacional de grande interesse tanto sob o ponto de vista teórico como o das numerosas aplicacões da Estatística Matemática (agricultura, biometria, econometria, engenharia, etc.). Presidiu ao colóquio o Prof. M. Fréchet, Presidente da Sociedade Estatística de França, sendo os trabalhos de secretaria assegurados pelo concurso das Srs. P. Belgodère (Paris) e Eyraud (Lyon).

Transcrevemos os nomes dos conferentes e respectivos temas versados:

A. BLANC-LAPIERRE, Ingénieur, PARIS: Considérations sur l'analyse harmonique des fonctions aléatoires.

G. DARMOIS, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris: Sur certaines formes de liaisons de probabilité.

P. DELAPORTE, Actuaire, PARIS: Sur une utilisation systématique de la Statístique mathématique en Analyse factorielle.

J. DOOB, Professeur à l'Univeriité, URBANA, Illinois (U. S. A.): Applications of the theory of martingales.

H. EYRAUD, Professeur à la Faculté des Sciences de LYON: Crédit et Spéculation.

R. FORTET, Professeur à la Faculté des Sciences de CAEN: Probabilité de perte d'un appel téléphonique: régime non-stationnaire, influence du temps d'orientation et du groupement des lignes.

E. HALPHEN, Ingénieur à l'Electricité de France, PARIS: Quelques remarques sur le problème de l'estimation.

J. KAMPÉ DE FÉRIET, Professeur à la Faculté des Sciences de LILE: Fonctions aléatoires et groupes de transformations dans un espace abstrait.

P. LÉVY, Professeur à l'Ecole Polytechnique, PARIS: Processus de Markoff dans le cas des fonctions à plusieurs variables.

G. MALÉCOT, Professeur à la Faculté des Sciences de LYON: Les processus stochastiques en génétique.

G. OTTAVIANI, Professeur à l'Université de ROME (ITALIE): Sur les concepts fondamentaux de la theorie des probabilités.

D. VAN DANTZIG, Professeur à l'Université d'AMSTERDAM (PAYS-BAS): Sur la méthode des fonctions génératrices.

J. VILLE, Professeur à la Faculté des Sciences de LYON: Étude des fonctions aléatoires du point de vue de la quantité d'information qu'elles contiennent.

J. WISHART, Professeur à l'École d'Agriculture de CAMBRIDGE (ANGLETERRE): Test of homogeneity of regression coefficients, and its application in the analysis of covariance.

H. WOLD, Professeur à l'Université d'UPSALA (SUÈDE): Sur l'analyse des séries stationnaires ponctuelles.

As conferências tiveram lugar no Instituto de Matemáticas da Universidade de Lyon, tendo-se celebrado a sessão de encerramento em Paris, na Sorbone, no dia 5 de Julho.

CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Em 1950, sob o patrocínio da Sociedade Matemática Americana realizar-se-á, em Massachusetts, um Congresso Internacional de Matemáticos. A Sociedade tinha já planeado promover um Congresso em Setembro de 1940 que teria lugar em Cambridge.

No Congresso de Oslo, em 1936, a Delegação ame-