variado auxílio e ponham os seus automóveis à disposição da Comissão de Recepção para excursões fora de Cambridge.

Fazem-se todos os esforços para reduzir o custo das viagens dos congressistas estrangeiros durante a sua permanência nos Estados Unidos. Antes da abertura do Congresso proporcionar-se-á a visita à cidade de New York servindo alguns matemáticos de guias.

Informações. Informações pormenorizadas serão, na devida altura, enviadas aos sócios da Sociedade Matemática Americana e às sociedades de Matemática e academias estrangeiras.

Quem se interessar em obter informações pode fazê-lo inscrevendo-se na sede da Sociedade e receberá na devida altura, informações sobre o programa e outras disposições.

As comunicações devem ser dirigidas a: «American Mathematical Society, 531 West 116th. Street, New York City 27, U. S. A.».

A Comissão Organizadora
(Tradução de M. Zaluar)

PROF. DR. MANUEL ZALUAR

Partiu para Paris em 31 de Outubro o prof. Dr. Manuel Zaluar na qualidade de bolseiro do Governo Francês atravez do Centre National de la Recherche Scientifique.

Não é a primeira vez que a «Gazeta de Matemática» regista a partida para o estrangeiro de membros da sua Redacção que assumiram funções em quadros universitários ou de institutos de investigação. Todavia, a partida do prof. Dr. Manuel Zaluar constitui um caso especial relativamente à «Gazeta de Matemática» da qual, além de ser um dos fundadores, era o redactor principal. Nesta qualidade arcou com a parte principal das responsabilidades e das tarefas preparatórias e conducentes à publicação da revista. Ao seu trabalho persistente não é demais atribuir a sobrevivência da «Gazeta de Matemática» durante nove anos de dificuldades e vicissitudes e o reconhecimento deste facto não é incompatível com a consideração devida às contribuições de todos os colaboradores, redactores e cooperadores da revista.

A ausência do prof. Dr. Manuel Zaluar não representa quebra na sua colaboração, pois está assegurada a sua contribuição mínima, como responsável da parte referente ao estrangeiro da nossa secção «Movimento Científico».

Assumiu as funções de redactor principal da «Gazeta de Matemática» o colaborador José Morgado.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

I — ESCOLAS PORTUGUESAS

PONTOS DE EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES — 1948

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em ciências matemáticas, ciências físico-químicas e ciências geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ponto n.º 1 — Julho de 1948

Aritmética

2711 — Demonstrar que, se a e b são primos entre si, $(a+b)^n$ e $(a-b)^n$ ou são primos entre si ou têm o máximo divisor comum 2^n. R: *Se* $(a+b)^n$ *e* $(a-b)^n$ *admitem um* m. d. c., $a+b$ *e* $a-b$ *admitem também um* m. d. c. *que é precisamente* p *se* p^n *for o* m. d. c. *de* $(a+b)^n$ *e* $(a-b)^n$. *Então* p *divide a soma* $(a+b)+(a-b)=2a$ *e a diferença* $(a+b)-(a-b)=2b$ *e portanto, como não pode dividir simultâneamente* a e b *(hipótese),* p *só pode ser igual ou a* 2 *ou a* 1. *Finalmente o* m. d. c. *de* $(a+b)^n$ *e* $(a-b)^n$ *só pode ser ou* 2^n *ou* 1.

Álgebra

2712 — Demonstrar a identidade

$$(2n+1)(2n+3)(2n+5)\cdots(4n-3)(4n-1)=\frac{n!}{2^n}\binom{4n}{2n},$$

onde n é qualquer inteiro positivo e o parêntesis do segundo membro significa um coeficiente binomial. R: *Basta notar que*

$$\binom{4n}{2n}=\frac{4n(4n-1)(4n-2)(4n-3)\cdots(2n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n(n+1)\cdots2n}=$$

$$= \frac{2^n \, 2n\,(4n-1)\,(2n-1)\,(4n-3)\,(2n-2)\cdots(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n\,(n+1)\cdots(2n-2)\,(2n-1)\,2n} =$$

$$= \frac{2^n\,(4n-1)\,(4n-3)\cdots(2n+3)\,(2n+1)}{n\,!}$$

e por isso

$$\frac{n\,!}{2^n}\cdot\binom{4n}{2n} = (4n-1)\,(4n-3)\cdots(2n+3)\,(2n+1)\,.$$

CÁLCULO NUMÉRICO

2713 — Calcular até às décimas de minuto o ângulo que a diagonal duma face dum cubo forma com uma diagonal do cubo que a intersecte. R: *A diagonal duma face mede* $a\sqrt{2}$ *se for* a *a aresta do cubo. Vê-se fàcilmente que, se for* α *o ângulo pedido, é* $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}\,/\,2$ *e* $\log\operatorname{tg}\alpha = 1/2\log 2 + \operatorname{colg} 2 = 0{,}\ 15052 + \bar{1}{,}69897 = \bar{1}{,}84949$ *donde* $\alpha = 35^\circ\,15'\,53''$ *ou, aproximadamente,* $\alpha = 35^\circ\,15',9$.

GEOMETRIA PLANA

2714 — Considere-se um quadrado $ABCD$, a diagonal AC, o semicírculo circunscrito ADC e o quarto de círculo AC de centro B. Demonstrar que a área da lúnula limitada por estes dois arcos é igual à do triângulo ABC. R: *Se for* l *o lado* $\overline{AB}$ *será:* $l^2/2$ *a área do triângulo* ABC; $l\sqrt{2}$ *o diâmetro da circunferência circunscrita e* l *o raio da circunferência de centro* B. *A área da lúnula é então*

$$(\pi\cdot 2\cdot l^2):8-(\pi l^2/4-l^2/2)=l^2/2\,.$$

GEOMETRIA NO ESPAÇO

2715 — Considerando um tronco de cone de revolução de bases paralelas circunscritível a uma esfera, mostrar que a geratriz do tronco é igual à soma dos raios das bases e em seguida provar que a altura do tronco é igual ao dobro da média geométrica dos referidos raios. R: *Se cortarmos o tronco e a esfera inscrita por um plano diametral da esfera que contenha uma geratriz do tronco, vê-se imediatamente da figura, intersecção desse plano com o tronco e a esfera, (um trapésio isósceles tendo inscrita uma circunferência) que* $g = r_1 + r_2$ *(propriedade das tangentes tiradas de um ponto para a circunferência), se for* g *a geratriz do tronco e* r_1 *e* r_2 *os raios das bases do mesmo. Da figura tira-se também que* $(r_1+r_2)^2 = h^2 + (r_2-r_1)^2$ *e portanto* $h^2 = 4r_1 r_2$ *e* $h = 2\sqrt{r_1 r_2}$ c. q. d.

TRIGONOMETRIA

2716 — Demonstrar a identidade

$$2\operatorname{sen}\left(45^\circ + \frac{A-B}{2}\right)\cos\left(45^\circ - \frac{A+B}{2}\right) = \cos B + \operatorname{sen} A\,.$$

R: *Como se sabe é:*

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)/2\cdot\cos(\alpha+\beta)/2\,.$$

Ora a expressão dada pode escrever-se:

$$2\operatorname{sen}\frac{(90^\circ-B)+A}{2}\cos\frac{(90^\circ-B)-A}{2}$$

e, portanto é igual a

$$\operatorname{sen}(90^\circ-B)+\operatorname{sen}A=\cos B+\operatorname{sen}A\,.$$

Soluções dos n.os 2711 a 2716 de J. da Silva Paulo

Exames de aptidão para frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia — Ponto n.º 1 — Julho de 1948.

2717 — Dê a forma de um polinómio ordenado, de coeficientes inteiros, igualado a zero, à equação:

$$\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}x\,(x^2-1)$$

R: $\frac{1}{3}\left(x^4-4\frac{x^3}{2}+6\frac{x^2}{4}-4\frac{x}{8}+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{5}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)= = \frac{1}{8}(x^3-x)$, *donde:* $80x^4-190x^3+72x^2-10x+ +17=0$.

2718 — Classifique as funções: *a*) $z=\frac{x^2-1}{\sqrt{3}}+ + x\sqrt{2}$; *b*) $z=x^2+2\sqrt{y}+1$; *c*) $z=\frac{\sqrt{3}}{1+x}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$; *d*) $z=\operatorname{sen}2\alpha$ e construa o gráfico da última. R: *Respectivamente* a) *racional inteira,* b) *algébrica irracional,* c) *algébrica racional fraccionária,* d) *transcendente goniométrica, se considerarmos* α *variável.*

2719 — Defina superfície prismática, e a partir desta noção defina prisma oblíquo.

2720 — Dispondo de umas tábuas que lhe dêem os logaritmos com o mínimo de cinco decimais dos números e das funções goniométricas, determine, com a aproximação que aquelas lhe permitirem, os valores de α que satisfazem à equação:

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\sqrt[3]{0{,}32541}}{\cos 327^\circ\,15'\,10''}\,.$$

2721 — Representando por a e por b respectivamente, os comprimentos das arestas laterais e da base duma pirâmide regular, triangular, determine a fórmula que dá o volume da mesma pirâmide.
R: $V=Ah/3$, *sendo* A *a área da base e* h *a altura da pirâmide. Ora* $A=\sqrt{3}\,b^2/4$ *e* $h=\sqrt{a^2-b^2/3}$ *em virtude do raio da circunferência circunscrita ao triângulo equilátero de lado* b *ser* $r=b\,/\sqrt{3}$. *Então* $V=\sqrt{3}\,b^2\sqrt{a^2-b^2/3}\,/\,12$.

2722 — A que chama combinações de 4 objectos 3 a 3? Forme estas combinações com as 4 primeiras letras do alfabeto e verifique o seu número pela fórmula respectiva R: abc, abd, acd, bcd; $\binom{4}{3} = \binom{4}{1} = 4$.

2723 — São dados sobre o plano um ponto, uma recta e uma circunferência. Pelo método dos lugares geométricos determinar o segmento que passa por aquele ponto e com os extremos naquelas linhas, que seja dividido pelo mesmo ponto em duas partes numa razão dada.

Soluções dos n.os 2717, 2718 e 2721 de A. Andrade Guimarães

I. S. C. E. F. — Matemáticas Elementares — Exames de aptidão para frequência — Prova escrita de Matemática — 1948.

Aritmética

2724 — Demonstre que a expressão $a(a^2+2)$ é sempre divisível por 3, qualquer que seja a. R: *Se* $a=3$ *está o caso demonstrado. Supomos então* $a=\dot{3}+r$ *donde* $a^2+2=(\dot{3})^2+2(\dot{3})r+r^2+2=\dot{3}+r^2+2$.

Tanto para $r=1$ *como para* $r=2$ *se tem sempre* $a^2+2=\dot{3}$.

Cálculo Numérico

2725 — Simplifique $\left(\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}}\right)^{-1/3} : \left(\frac{1}{x+y}\right)^{1/3}$ e calcule o seu valor para $x=\operatorname{cotg} 1014^\circ 12'$ e $y=\operatorname{sen} 208^\circ 17'$ (utilize logaritmos). R:

$$\left(\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}}\right)^{-1/3} : (x+y)^{-1/3} = \left(\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)(y+x)}\right)^{-1/3} =$$

$$= \left(\frac{(y^2-x^2)}{(y-x)(y+x)\,xy}\right)^{-1/3} = (xy)^{-1/3}$$

$$x = \operatorname{cotg} 1014^\circ 12' = \operatorname{cotg} 294^\circ 12' = -\operatorname{cotg} 65^\circ 48'$$

$$y = \operatorname{sen} 208^\circ 17' = -\operatorname{sen} 28^\circ 17'$$

$$\log \operatorname{cotg} 65^\circ 48' = \bar{1},65265$$

$$\log \operatorname{sen} 28' 17' = \bar{1},67562$$

$$\log (xy) = \bar{1},32827$$

$$\log z = \bar{1},77609 \to z = 0,59716 .$$

Álgebra

2726 — Determine m de modo que o trinómio $f(x)=(m-1)x^2-2mx-3$ admita uma raiz negativa e outra positiva e inferior a 4. R: $f(x)=(m-1)x^2-2mx-3$; $x^2-\frac{2m}{m-1}x-\frac{3}{m-5}=0$.

Se $-\alpha$ *é a raiz negativa e* β *é a raiz positiva, será:* $\alpha\cdot\beta=\frac{3}{m-1}$ *e como* $\beta>4$ *vem* $4\alpha>\frac{3}{m+1}$ *ou* $\alpha>\frac{3}{4(m-1)}$. *Mas* $\beta-\alpha=\frac{2m}{m-1}$ *ou* $\beta>\frac{2m}{m-1}+\frac{3}{4(m-1)}$ *e portanto* $\frac{2m}{m-1}+\frac{3}{4(m-1)}<4$ *ou* $8m+3<16(m-1)$ *donde* $m>\frac{19}{8}$.

Geometria Plana

2727 — É dado um triângulo equilátero de lado a e um ponto M, qualquer, situado no interior do triângulo. Demonstre que a soma das distâncias do ponto M aos três lados do triângulo é independente da posição do ponto M. R: *Unindo* M *com* A *e com* B *desenha-se um triângulo com base num lado do triângulo equilátero e com altura* h_{AB}, *distância de* M *a* $\overline{AB}$; *a área desse triângulo é* $1/2\,l\cdot h_{AB}$. *Unindo* M *com* B *e* C *obtém-se outro triângulo de área* $1/2\,l\cdot h_{BC}$. *Unindo* M *com* C *e* A *obtém outro triângulo de área* $1/2\,l\cdot h_{CA}$. *A soma das três áreas é igual à do triângulo equilátero de lado* l *e altura* h. *Temos então*

$$1/2\,l\cdot h_{AB}+1/2\,l\cdot h_{BC}+1/2\,l\cdot h_{CA}=1/2\,l\cdot h$$

donde

$$h_{AB}+h_{BC}+h_{CA}=h=\text{constante}.$$

Geometria no Espaço

2728 — Um cubo está inscrito numa esfera de raio R. Calcule a área lateral do cone recto de revolução cuja base é circunscrita a uma das faces do cubo e cujo vértice é o centro da esfera. R: *A diagonal do cubo* 2R *é a hipotenusa de um triângulo rectângulo de que um cateto é a aresta* x *do cubo e o outro cateto é a diagonal* $x\sqrt{2}$ *de uma face do cubo.*

Vem portanto $2x^2+x^2=4R^2$ *ou* $x=2R/\sqrt{3}$.

O raio da base do cone é então $x\sqrt{2}/2=R\sqrt{2/3}$.

O semi-perímetro da base do cone é $\pi R\sqrt{2/3}$ *e como a geratriz é* R *teremos: área lateral* $=\pi R^2\sqrt{2/3}$.

Trigonometria

2729 — Determine os ângulos x que satisfazem à relação $\operatorname{tg}(x+\pi/3)=\operatorname{cotg}(\pi/2-3x)$. R: $\operatorname{tg}(x+\pi/3)=\operatorname{cotg}(\pi/2-2x)=\operatorname{tg} 3x$. *Arcos com a mesma tangente diferem de* $n\pi$, *logo* $3x-x-\pi/3=n\pi$ *donde* $x=(3n+1)\pi/6$.

Soluções dos n.os 2724 a 2729 de José R. de Albuquerque

II — ESCOLAS ESTRANGEIRAS

Baccalauréat de Mathématiques élémentaires — Paris — Session de juin, 1948.

(Durée de l'épreuve: 3 heures)

I

2730 — Établir les formules de transformation d'une somme ou d'une différence de 2 sinus ou de 2 cosinus. Problème inverse — Application: résoudre l'équation:

$$\cos 2x + \cos 6x = \sin 3x - \sin 5x .$$

2731 — Étudier les variations et representation graphique de $y = -x^2 - x + 2$, en prenant pour unité le double centimètre. On considère la droite qui passe par les points $A(0,2)$ et $B(1,0)$. Evaleur l'aire géométrique comprise entre cette droite et la courbe représentative de y.

2732 — Epure de l'intersection d'un plan et d'une droite en géométrie descriptive et en géométrie côtée, lorsque le plan est défini par deux droites parallèles.

II

2733 — D'un point O fixe, pris à l'intérieur d'une parabole donnée, de foyer F et de directrice Δ, on mène la parallèle D à son axe: Soit P le point où elle coupe Δ.

a) Construire le point d'intersection I de la droite D avec la parabole, ainsi que la tangente (T) en I à cette dernière.

b) On considère un cercle variable (c) passant constamment par les points O et P; soient S_1 et S_2 les points où il coupe (T); soient T_1 et T_2 les tangentes autres que (T), menées des points S_1 et S_2 à la parabole donnée; M_1 et M_2 leurs points de contact et P_1 et P_2 leurs projections sur Δ.

Démontrer que T_1 est parallèle à OS_2 et que T_2 est parallèle à OS_1.

c) Soit Q l'intersection des droites T_1 et T_2. Quel est, quand le cercle (c) varie, le lieu géométrique de ce point Q?

d) Montrer que, parmi les cercles (c), il y en a généralement un qui est tel que les droites OS_1 et OS_2 soient perpendiculaires.

Que peut-on dire de la position correspondant de Q? Cas d'exception.

e) Démontrer que l'on a toujours $\dfrac{\overline{QM_1}}{\overline{S_2 O}} = \dfrac{\overline{M_2 Q}}{\overline{M_2 S_2}}$

Qu'en conclut-on pour les points $M_1 M_2$ et O?

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

I — ESCOLAS PORTUGUESAS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — Álgebra Superior — 2.º exame de frequência — 1947-48.

2734 — Certa função diferenciável, $f(x,y)$, verifica a relação $x f'_x(x,y) + y f'_y(x,y) = m \cdot f(x,y)$ com m constante.

Que se pode afirmar da função f?

Prove a proposição que serve de base à afirmação.

2735 — Exponha sumàriamente o método de Newton para o cálculo aproximado de uma raiz de $f(x)$, localizada em certo intervalo (a,b).

2736 — Justifique o préstimo das condições de Fourier como condições de exclusão, e refira-se à forma de levantar a dúvida que, porventura, ocorra no problema da contagem das raízes de $f(x)$ em (a,b), quando as condições de Fourier se revelam insuficientes.

2737 — Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{2x}{(x-2)^2}$ em série de potências inteiras de $1/x$, e indique, justificando a região de convergência da série obtida.