## II — ESCOLAS ESTRANGEIRAS

**Baccalauréat de Mathématiques élémentaires — Paris — Session de juin, 1948.**

(*Durée de l'épreuve: 3 heures*)

I

**2730** — Établir les formules de transformation d'une somme ou d'une différence de 2 sinus ou de 2 cosinus. Problème inverse — Application: résoudre l'équation:

$$\cos 2x + \cos 6x = \sin 3x - \sin 5x .$$

**2731** — Étudier les variations et representation graphique de $y = -x^2 - x + 2$, en prenant pour unité le double centimètre. On considère la droite qui passe par les points $A(0,2)$ et $B(1,0)$. Evaleur l'aire géométrique comprise entre cette droite et la courbe représentative de $y$.

**2732** — Epure de l'intersection d'un plan et d'une droite en géométrie descriptive et en géométrie côtée, lorsque le plan est défini par deux droites parallèles.

II

**2733** — D'un point $O$ fixe, pris à l'intérieur d'une parabole donnée, de foyer $F$ et de directrice $\Delta$, on mène la parallèle $D$ à son axe: Soit $P$ le point où elle coupe $\Delta$.

*a*) Construire le point d'intersection $I$ de la droite $D$ avec la parabole, ainsi que la tangente $(T)$ en $I$ à cette dernière.

*b*) On considère un cercle variable $(c)$ passant constamment par les points $O$ et $P$; soient $S_1$ et $S_2$ les points où il coupe $(T)$; soient $T_1$ et $T_2$ les tangentes autres que $(T)$, menées des points $S_1$ et $S_2$ à la parabole donnée; $M_1$ et $M_2$ leurs points de contact et $P_1$ et $P_2$ leurs projections sur $\Delta$.

Démontrer que $T_1$ est parallèle à $OS_2$ et que $T_2$ est parallèle à $OS_1$.

*c*) Soit $Q$ l'intersection des droites $T_1$ et $T_2$. Quel est, quand le cercle $(c)$ varie, le lieu géométrique de ce point $Q$?

*d*) Montrer que, parmi les cercles $(c)$, il y en a généralement un qui est tel que les droites $OS_1$ et $OS_2$ soient perpendiculaires.

Que peut-on dire de la position correspondant de $Q$? Cas d'exception.

*e*) Démontrer que l'on a toujours $\dfrac{\overline{QM_1}}{\overline{S_2 O}} = \dfrac{\overline{M_2 Q}}{\overline{M_2 S_2}}$

Qu'en conclut-on pour les points $M_1 M_2$ et $O$?

# MATEMÁTICAS SUPERIORES

## PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

### I — ESCOLAS PORTUGUESAS

## ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS
## COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

**F. C. L. — Álgebra Superior — 2.º exame de frequência — 1947-48.**

**2734** — Certa função diferenciável, $f(x,y)$, verifica a relação $x f'_x(x,y) + y f'_y(x,y) = m \cdot f(x,y)$ com $m$ constante.

Que se pode afirmar da função $f$?

Prove a proposição que serve de base à afirmação.

**2735** — Exponha sumàriamente o método de Newton para o cálculo aproximado de uma raiz de $f(x)$, localizada em certo intervalo $(a,b)$.

**2736** — Justifique o préstimo das condições de Fourier como condições de exclusão, e refira-se à forma de levantar a dúvida que, porventura, ocorra no problema da contagem das raízes de $f(x)$ em $(a,b)$, quando as condições de Fourier se revelam insuficientes.

**2737** — Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{2x}{(x-2)^2}$ em série de potências inteiras de $1/x$, e indique, justificando a região de convergência da série obtida.

**2738** — Separe as raízes da equação $2y^3-3y-10=0$. Quantas raízes $y=\varphi(x)$ define, implìcitamente, a equação $2xy^3-3x^2y-10=0$ nas vizinhanças do ponto $x=1$?

Calcule, para alguma delas, o coeficiente angular da tangente, no ponto de abcissa 1, à respectiva imagem. Calcule, também, $\lim_{x=\infty} y/x$ e $\lim_{x=\infty}(y-xy')$ e figure geomètricamente os resultados.

Enunciados dos n.os 2734 a 2738 de Humberto de Menezes

**F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — 1947-48.**

**2739** — Determinar os parâmetros $m$ e $n$ de modo que o polinómio $f(z)=z^4-6z^2+(m-1)z+2-n$ se possa pôr sob a forma $(z-\alpha)^3(z-\beta)$.

Número de soluções do problema. Se mais do que uma, fixe-se numa delas e determine $\alpha$ e $\beta$.

**2740** — Quantas raízes $y=\varphi(x)$ define implìcitamente a equação $f(x,y)=x^2(1-x)-y^2(1+y)=0$ nas vizinhanças do valor $x=1$? Determine, para alguma delas, a direcção com que a respectiva imagem passa no ponto de abcissa 1, e o sentido da concavidade dessa imagem no referido ponto.

**2741** — Como se apresentam, quando existem, as raízes imaginárias em polinómio real? Justifique a resposta.

**2742** — Defina equação recíproca; indique, justificando, como se pode reconhecer se dada equação

$$f(z)=p_0z^n+p_1z^{n-1}+\cdots+p_{n-1}z+p_n=0$$

é recíproca, e exponha a técnica de resolução na hipótese $p_0\cdot p_n<0$.

**2743** — Estabeleça a fórmula fundamental do Cálculo Integral e descreva, com justificação, a sua aplicação ao cálculo do volume gerado pela rotação, em torno de $0x$, do arco $\widehat{AB}$ de equação $y=f(x)$. Tome $\alpha$ e $\beta$ como abscissas de $A$ e $B$.

**2744** — Definida uma homologia pelo seu centro $S$, pelo eixo $e$ e pela recta de fuga $i$, desenhe uma circunferência $[c]$ cuja figura homológica seja uma parábola com um dado ponto impróprio $E_\infty$. Determine: 1.º o eixo e o vértice da parábola; 2.º uma tangente à parábola, com uma direcção dada (diferente da do ponto impróprio da parábola).

Enunciados dos n.os 2739 a 2744 de Humberto de Menezes

**F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — 20 de Julho de 1948.**

**2745** — Dada a função $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$ indique o lugar dos seus pontos de descontinuidade. Assinale as regiões do plano em que: 1) a função tem derivadas parciais iguais; 2) tem derivada parcial em ordem a $x$ superior em módulo à derivada parcial em ordem a $y$; 3) não tem derivadas parciais finitas.

**2746** — $a$) Mostre que a equação $x^3+x^2y+xy^2+y^3=0$ define $y$ como função implícita de $x$ na vizinhança de qualquer ponto $P$, distinto da origem e tal que as suas coordenadas satisfazem à equação; $b$) quantas variáveis tem uma função que possui 21 derivadas parciais contínuas de 2.ª ordem distintas?

**2747** — Um jogador faz um lançamento imparcial dum dado perfeito; tem o capital de 200 escudos e ganha 100 escudos se sair um número par de pontos e perde 100 escudos se sair um número ímpar de pontos. 1) Indique a esperança matemática do jogador; 2) Calcule a esperança moral do jogador; 3) Calcule a esperança moral se o capital for 100 escudos, mantendo-se as condições restantes do problema.

**2748** — $a$) Fazem-se mil lançamentos imparciais duma moeda perfeita; saem cruzes 499 vezes. Com que proposição está de harmonia este resultado? Justifique a resposta. $b$) Uma turma tem 10 alunos do sexo masculino 5 dos quais bons e 15 alunos do sexo feminino 7 dos quais bons. Um aluno ou é do sexo masculino ou do feminino (modos de realização incompatíveis do acontecimento de ser aluno), consequentemente a probabilidade de um aluuo ser bom é $5/10+7/15=29/30$ (teorema das probabilidades totais). Faça a crítica deste raciocínio.

**2749** — $a$) Uma variável casual assume os valores $1, 8, 7, 2, 7$. Calcule a medida de assimetria $\beta_1$. $b$) A distribuição de $a$) é positivamente ou negativamente assiméirica? Justifique a resposta.

Enunciados dos n.os 2745 a 2749 de Peter T. Braumann

**I. S. A. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência ordinário — 22-5-48.**

**2750** — Dada a série

$$\frac{x}{1\cdot 3}-\frac{x^2}{3\cdot 5}+\frac{x^3}{5\cdot 7}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$$

$a$) Determine os valores de $x$ para os quais ela é convergente. $b$) Calcule a sua soma quando $x=-1$.

R: a) $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

b) $S(-1) = -\frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = -\frac{1}{2}$.

**2751** — Dadas as funções $u = \log(\operatorname{arctg} e^z)$ e $z = 1 + \operatorname{tg}^2(x^2-1)$, calcule a derivada, para $x=1$, de $u$ em ordem a $x$. R: $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=1} = \left(\frac{du}{dz}\right)_{z=1} \left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=1} = 0$.

**2752** — Estude as variações da função $y = f(x)$ definida pela relação $x^2 y - 2x - 4y = 0$. R: *A função* $y = \frac{2x}{x^2-4}$ *é decrescente* $\left(y' = -\frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2} < 0\right)$ *não tem máximos nem mínimos e tem a origem como ponto de inflexão* $\left(y'' = 4x \frac{x^2+12}{(x^2-4)^3}\right)$. *As rectas* $y=0$ *e* $x = \pm 2$ *são assíntotas da curva por ela representada.*

**2753** — Estude a continuidade e derivabilidade da função assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2\, x^2 + 2 & \text{para } x \neq n \\ |1+x| + |1-x| & \text{para } y = n \end{cases}$$

($n$ inteiro, positivo, negativo ou nulo).

R: *Contínua e derivável para* $x \neq n$, $x=0$ *e* $x = \pm 2$,

**2754** — É dado um triângulo isósceles de base 20 e altura 8. De todos os paralelogramos inscritos neste triângulo, com um dos lados assente na base do triângulo e a medida dos ângulos agudos dada por $\operatorname{arctg} 4/3$, quais as dimensões do de área máxima? R: *Designando a altura por* h *e a base por* b, *temos* $b = 5/2\,(8-h)$ *e a função* $S(h) = (20 - 5/2\, h)\, h$ *terá um máximo para* $h=4$.

*Os lados do paralelogramo medem* 10 *e* 5.

**I. S. A. — Matemáticas Gerais — Exame final — 24 de Julho de 1948.**

**2755** — Calcule $\lim_{n \to \infty} \frac{e}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$. R: 4.

**2756** — Determine a natureza e, em caso de convergência, a soma da série $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2 - 1}$. R: $S = 3/4$.

**2757** — Dada a função $y = \operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cos x)$ determine $y'$ e $y''$ e verifique que tem lugar a relação $(1+x^2)\, y'' - x y' + y = 0$.

**2758** — Escreva a equação da tangente à curva $y = (x-1)^2$ que é paralela a $Ox$. R: $Y=0$.

**2759** — Se dois números tem soma constante, pode ser mínimo o seu produto? E máximo?

R: Máximo quando os números forem iguais..

**2760** — Estude o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + \lambda z = 2 \\ \lambda x + 2y + z = -1 \end{cases}$.

R: *Determinado se* $\lambda(\lambda-1) \neq 0$; *impossível se* $\lambda = 0$; *simplesmente indeterminado e equivalente a* $\begin{cases} x+z=1 \\ y=-1 \end{cases}$ *se* $\lambda = 1$.

Soluções dos n.os 2750 a 2760 de F. R. Dias Agudo.

**I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 2.º exame de frequência ordinário — 21 de Junho de 1948.**

I Parte

**2761** — Determine o limite excedente das raizes do polinómio $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 3$ e calcule a maior delas em primeira aproximação. R: *Para* $x=0$ $f(x)$ *é negativo e as derivadas são positivas; para* $x=1$ $f(x)$ *é já positivo. Então o limite excedente das raizes é* $=1$. *A sucessão de Fourier perde uma variação de* $x=0$ *a* $x=1$; *no intervalo* (0,1) *há uma única raiz e essa é a maior. Como* $f''(x)$ *mantém o sinal no intervalo, e como* $f(1) \cdot f'(1) > 0$, $x=1$ *é o extremo favorável à correcção de Newton. Tem-se* $f(1)/f'(1) = 8/20$, *e a primeira aproximação é* $1 - 8/20 = 3/5$.

**2762** — Ache o valor de $\alpha$ que torna compatível as equações

$$\begin{aligned} u + 2v \qquad + 3y + 4z &= 2 \\ 2u + 3v \qquad + y + 2z &= 3 \\ 3u \qquad + 5x + 6y - 4z &= 3 \\ 5v - 5x - 2y + 10z &= \alpha \end{aligned}$$

e determine a correspondente solução. R: *Condensando a matriz do sistema vem*

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 5 & 6 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 10 & -\alpha \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 27 & 20 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\alpha \end{Vmatrix}$$

*As equações são compatíveis para* $\alpha = 2$ *e então o sistema dado é equivalente ao seguinte*

$$\begin{aligned} u + 2v &= 2 - 3y - 4z \\ v &= 1 - 5y - 6z \\ 5x &= 15 - 27y - 20z \end{aligned}$$

*satisfeito por*

$$\begin{aligned} u &= 7y + 8z \\ v &= 1 - 5y - 6z \\ x &= 3 - 27/5y - 4z \end{aligned}$$

II Parte

**2763** — Propostos os determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} \qquad \nabla = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix}$$

o último dos quais constituído pelos complementos algébricos dos elementos do primeiro, determine o ângulo dos planos

$$a_i^1\, x + a_i^2\, y + a_i^3\, z = 0$$
$$A_j^1\, x + A_j^2\, y + A_j^3\, z = 0$$

discutindo os casos $i=j$ e $i \neq j$.

**2764** — Supondo $f(x,y)$ diferenciável em $P(a,b)$ — ponto interior ao campo de existência da função — calcule o acréscimo $\partial f = f(x,y) - f(a,b)$ na hipótese de $M(x,y)$ se achar sobre a semi-recta

$$r) \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases} \quad (t > 0)\,.$$

Defina derivada de $f(x,y)$ em $P(a,b)$ segundo a direcção $r)$ e ache o seu valor na hipótese de $f(a,b)$ ser um máximo ou mínimo.

**2765** — Seja $\widehat{AB}$ a imagem da função $y = f(x)$, regular em $(a,b)$, e seja $Y = \varphi(x)$ a equação da corda $\overline{AB}$. Prove que $f(x) - \varphi(x)$ tem um extremo em certo ponto $c$ interior a $(a,b)$, e deduza dêsse facto que *todo o arco AB fica para um memo lado de uma tangente paralela à corda AB*.

Entendendo-se por *tangente ordinária* a tangente que não é de inflexão nem tem $A$ ou $B$ por ponto de contacto, prove que *sobre o arco* $\widehat{AB}$, *toda a tangente ordinária é paralela a alguma corda*. É exacta a recíproca? Porquê?

**I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 2.º exame de frequência traordinário — 28 de Junho de 1948.**

I Parte

**2766** — Calcule os três primeiros termos do desenvolvimento de $y = \sqrt[3]{1+x}$ em série inteira em $x-1$. Qual o intervalo de convergência? R: *Temos*

$$y = \sqrt[3]{1+x} = [2 + (x-1)]^{1/3} = 2^{1/3} \cdot \left[1 + \frac{x-1}{2}\right]^{1/3} =$$
$$= 2^{1/3}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{x-1}{2} + \frac{1/3\,(1/3-1)}{2\,!}\cdot\frac{(x-1)^2}{4} + \cdots\right)$$

*para* $\left|\dfrac{x-1}{2}\right| < 1$, *isto é, para* $-1 < x < 3$.

**2767** — Verifique que pode aplicar-se à equação $f(x,y) = xy^3 + x^3 y - 2 = 0$, em torno do ponto $P(1,1)$ o teorema de existência das funções implícitas. Designando a função implícita por $y = \varphi(x)$ calcule $\varphi'(1)$.

Exprima em função de $x$ e de $y$ a derivada de $F(x) = f'_y(x,y)$ quando $y = \varphi(x)$ e verifique que é sempre $F'(x) \geq 0$. Daí e da relação $xf'_x + yf'_y \equiv 8$ conclua que $y - xy'$ tem derivada negativa. De onde vem a relação $xf'_x + yf'_y \equiv 8$? R: *O teorema pode aplicar-se porque* $f(1,1) = 0$ *e as derivadas parciais* $f'_x = y^3 + 3x^2 y$ *e* $f'_y = 3xy^2 + x^3$ *são finitas e contínuas e nunca conjuntamente nulas na vizinhança de* P. *Por ser* $f'_y \neq 0$ *na vizinhança de* P, *tem-se:*

$$\varphi'(1) = -\frac{f'_x(1,1)}{f'_y(1,1)} = -1\,.$$

*De* $F(x) = 3xy^2 + x^3$ *vem* $F'(x) = (3y^2 + 3x^2) + 6xy\cdot\left(-\dfrac{y^3 + 3x^2 y}{3xy^2 + x^3}\right)$ *e efectuando os cálculos vem:*

$$F'(x) = \frac{3\,(x^2+y^2)}{3y^2 + x^2} \geqslant 0.$$

*De* $\dfrac{x\cdot f'_x + y\cdot f'_y}{f'_y} = \dfrac{8}{f'_y}$ *temos* $y - xy' = 8/f'_y$ *e portanto*

$$(y - xy')' = \left(\frac{8}{F}\right)' = 8\left(-\frac{F'}{F^2}\right) < 0.$$

*Pondo* $\Psi(x,y) = xy^3 + x^3 y$ *temos:* $x\Psi'_x + y\Psi'_y = 4\Psi$, *visto que* $\Psi$ *é função homogénea de grau* 4. *Mas* $\Psi'_x = f'_x$ *e* $\Psi'_y = f'_y$ *e* $\Psi = 2$ *donde resulta:* $x\cdot f'_x + y\cdot f'_y = 8$.

II Parte

**2768** — Defina função crescente em um ponto e em um intervalo, e prove que $f(x)$: $a)$ é contínua se for crescente e tomar todos os valores desde $f(a)$ até $f(b)$; $b)$ é limitada se for crescente (no intervalo $(a,b)$); $c)$ é incessantemente crescente se tiver derivada positiva ou nula (não identicamente nula em parte alguma).

Mostre ainda que toda a derivada é contínua no interior de um intervalo de monotonia.

**2769** — Defina sucessão de Fourier de $f(x)$ em $(a,b)$ e mostre como tal sucessão reflecte a passagem de $x$ por um zero de $f(x)$ ou de alguma das funções seguintes.

Deduza daí a regra dos sinais de Descartes.

**2770** — Exponha as regras de exclusão que se usam na pesquisa das raízes racionais em polinómios reais de coeficientes inteiros.

**I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — Prova escrita do exame final — 1948.**

**2771** — Represente geomètricamente a função

$$y = 2/(x-1)(x^2+1)\,.$$

R: *Domínio: intervalos abertos* $(-\infty, 1)$ *e* $(1, +\infty)$.

*À esquerda de* $x=1$ *vem* $\frac{2}{(1-h-1)((1-h)^2+1)} = \frac{2}{-h(h^2-2h+2)}$ *e a função é negativa. Do mesmo modo à direita de* $x=1$ *a função é positiva.*

*Traços nos eixos:* $(0, -2)$; *não corta o eixo* $\overline{OX}$.

*Ramos infinitos: à esquerda e à direita de* $x=1$ *vem respectivamente* $y=\mp\infty$ *para* $x=\pm\infty$ *vem respectivamente* $y=\pm\infty$.

*Assíntotas: há apenas paralelas aos eixos;* $x=1$ *e* $y=0$.

*Variação:* $y' = -\frac{6x^2-4x+2}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$ *não se anula para valores reais e é sempre negativa. Não há máximos nem mínimos e a função* $y$ *é sempre decrescente.*

**2772** — Pesquise as raizes de $f(x)=x^5-4x^4+4x^3-2x^2-5x-4$ no intervalo $(0,1)$. R: *Tomando* $2{,}4<\sqrt{6}<9/25$ *em que* r *é a raiz de* $f'''(x)$ *situada no intervalo* $(0,1)$. *Formemos o seguinte quadro*

| | 0 | 3/10 | 9/25 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $f(x) = x^5-4x^4+4x^3-2x^2-5x-4$ | $-4$ | $-5{,}60197$ | $-$ | $-10$ |
| $f^{I}(x) = 5x^4-16x^3+12x^2-4x-5$ | $-5$ | $-5{,}5915$ | $-$ | $-8$ |
| $f^{II}(x) = 20x^3-48x^2+24x-4$ | $-4$ | $-0{,}580$ | $-\frac{9220}{15.625}$ | $-8$ |
| $f^{III}(x) = 60x^2-96x+24$ | $+24$ | $+60$ | $-\frac{348}{105}$ | $-12$ |
| $f^{IV}(x) = 120x-96$ | $-96$ | $-60$ | $-\frac{264}{5}$ | $+24$ |
| $f^{V}(x) = 120$ | $+120$ | $+120$ | $-120$ | $+120$ |
| Variações | 3 | 3 | 1 | 1 |

*Tanto* $f''(x)$ *como* $f'(x)$ *como* $f(x)$ *têm zero ou duas raizes no intervalo* $(3/10, 9/25)$ *visto que há aí a perda de duas variações.*

*A equação da tangente ao diagrama de* $f''(x)$ *no ponto* $P(3/10, -0{,}580)$ *é* $Y+0{,}580=60(X-3/10)$ *e o ponto em que essa tangente corta* $\overline{OX}$ *tem abscissa* $X_P=1858/6000$. *A equação da tangente ao diagrama de* $f''(x)$ *no ponto* $Q(9/25, -9220/15.625)$ *é*

$$Y+9220/15.625=-348/105(X-9/25)$$

*e o ponto em que essa tangente corta* $\overline{OX}$ *tem abscissa* $X_Q=9894/35475$.

*Como é* $X_P>X_Q$ *as duas tangentes cruzam-se abaixo de* $\overline{OX}$ *e com maioria de razões* $f''(x)$ *está toda abaixo de* $\overline{OX}$ *no intervalo* $(3/10, 9/25)$; $f''(x)$ *não tem raizes naquele intervalo. Se* $f'(x)$ *tivesse duas raizes naquele intervalo então* $f''(x)$ *teria uma;* $f'(x)$ *não tem raizes no intervalo* $(3/10, 9/25)$. *Do mesmo modo se conclui que* $f(x)$ *não tem raizes no intervalo* $(3/10, 9/25)$ *e portanto não tem raizes em* $(0,1)$.

**2773** — Desenvolva em série de Mac Laurin a função do problema 1 e calcule o respectivo termo geral. R: *Pondo de parte a aplicação directa e sem dificuldades da fórmula de Mac Laurin, temos*

$$y=2/(x-1)(x^2+1)=A/(x-1)+(Bx+C)/(x^2+1)$$

*e, com* $A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)=2$ *ou* $(A+B)x^2+(C-B)x+(A-C)=2$, *vem* $A=1$, $B=C=-1$. *Donde* $y=1/(x-1)-(x+1)/(x^2+1)=-[1/1-x+x\cdot 1/(1+x^2)+1/(1+x^2)]=-(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots)-x(1+x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots)-(1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots)$. *O termo geral é* $u_n=-x^n-(-1)^n x^{2n+1}-(-1)^n x^{2n}\equiv -x^{2n_1}-x^{2n_1+1}-(-1)^{n_1}x^{2n_1}-(-1)^{n_1}x^{2n_1+1}\equiv[(-1)^{n_1+1}-1](x^{2n_1}+x^{2n_1+1})$ *e como para os valores ímpares de* $n_1$ *se anula o respectivo coeficiente, separando ímpares dos pares e ficando com estes últimos, temos* $u_n=[(-1)^{2n+2}-1](x^{4n+2}+x^{4n+5})$

*e finalmente* $y=\sum_0^\infty(-2(x^{4n+2}+x^{4n+5}))$, $(|x|<1)$.

*O mesmo resultado se achava facilmente pondo* $y=x=-2\cdot 1/(1-x+x^2-x^3)$ *e efectuando a divisão indicada.*

**2774** — Ache a hipérbole que passa pelos pontos $(1,2)$, $(1,-2)$, $(-1,3)$ e é tangente na origem à recta $y=x$. Determine as respectivas assíntotas.
R: *Como a cónica passa pela origem, tomamos para sua eqnação* $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2y=0$ *e portanto temos o sistema*

$$A+4B+4C+2D+4=0\,;\quad A-4B+4C+2D-4=0\,;$$
$$A-6B+9C-2D+6=0\,;\quad \left[-\frac{2Ax+2By+2D}{2Bx+2Cy+2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=1$$

*ou*

$$A+4B+4C+2D=-4\,;\quad A-4B+4C+2D=4\,;$$
$$A-6B+9C-2D=-6\,;\quad D=-1$$

*ou ainda*

$$A+4B+4C=-2\,;\quad A-4B+4C=6\,;$$
$$A-6B+9C=-8\,;\quad D=-1\,;$$

*condensando a matriz*

$$\begin{Vmatrix} 1 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & -4 & 4 & 6 \\ 1 & -6 & 9 & -8 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & -10 & 5 & -6 \end{Vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & -8 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & -16 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{aligned} A+4B+4C&=-2 \\ -8B&=8 \\ 5C&=-16 \end{aligned}$$

$$A=74/5\,,\quad B=-1\,,\quad C=-16/5\,,\quad D=-1$$

*e a equação da cónica é:* $37x^2-5xy-8y^2-5x+5y=0$.

*As assíntotas são as rectas que têm coeficientes angulares dados por* $-37+5m+8m^2=0$ *e que passam pelo centro da cónica cujas coordenadas são dadas pelo sistema:* $74x-5y-5=0$, $5x+16y-5=0$.

Soluções dos n.os 2761 a 2774 de J. Ribeiro de Albuquerque

**F. C. L. — Complementos de Álgebra — exame de frequência — 1948.**

**2775** — Representando por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ as raízes da equação $z^3-3z+1=0$, indique as funções conjugadas de $\alpha_1^3\,\alpha_2^2$ e calcule a soma dessas funções. Pode o valor de $\alpha_1^3\,\alpha_2^2$ ser racional? Justifique a resposta.

**2776** — Considere as funções $u=(z_1-z_1)\,(z_3-z_4)$, $v=(z_1+z_2)\,(z_3+z_4)$. Que relação se verifica entre os grupos dessas funções? Que conclui desse facto?

Mostre como seria possível exprimir $v$ em função racional de $u$ e das funções simétricas elementares de $z_1, z_2, z_3, z_4$.

**2777** — O que entende por período duma substituição? Se for $G$ um grupo de ordem $m$ e $\theta$ um leemento de $G$ de período $\mu$, que relação se deve verificar entre $m$ e $\mu$? Justifique a resposta.

**2778** — Quando se diz que dois elementos dum conjunto $A$ são equivalentes a respeito dum dado grupo de transformações biunívocas de $A$ sobre si mesmo? Exponha o que sabe sobre o assunto.

Determine o grupo $G$ dos deslocamentos que transformam em si mesma uma sinusoide $S$ e mostre que o conjunto $S$ não é homogéneo a respeito do grupo $G$.

**2779** — Sendo $M$ uma família de transformações biunívocas dum conjunto $A$ sobre si mesmo, que significado se deve atribuir à expressão «grupo gerado por $M$»?

Seja $\rho$ a rotação de 120° em torno dum dado eixo $E$ e $\theta$ uma translação distinta de $I$, paralela a $E$. Qual a ordem do grupo $G$ gerado por $\rho$ e por $\theta$? É $G$ um grupo comutativo? Designando por $H$ o grupo gerado por $\rho$, indique as classes laterais de $H$ em $G$. Mostre que $G$ não é cíclico.

**F. C. L. — Complementos de Álgebra — exame final — 1948.**

**2780** — O que entende por corpo de números? Mostre que o mínimo corpo numérico que contém as raízes da equação $2x^2-2x-1=0$ é o corpo $Ra(\sqrt{3})$.

**2781** — Defina «grupo admissível duma equação algébrica a respeito dum dado corpo». Prove que a intersecção de dois grupos admissíveis é ainda um grupo admissível e defina a partir daí o conceito de grupo de Galois.

**2782** — Quando se diz que um polinómio é irredutível num dado corpo? Indique como, dado um polinómio $f(z)$ com os coeficientes num corpo $\Delta$, se reconhecem os factores de $f(z)$ irredutíveis em $\Delta$, através do grupo de Galois da equação $f(z)=0$ a respeito de $\Delta$.

**2783** — Determine os automorfismos do corpo de Galois da equação $f(z)\equiv(z^2+1)\,(z^2-3)\,(3z-1)=0$ e deduza daí o grupo $G$ de Galois desta equação a respeito de $Ra$, relacionando os sistemas de transitividade de $G$ com os factores irredutíveis de $f(z)$.

**2784** — Defina o conceito geral de grupo. Verifique se o conjunto $U=\{a, b, c, d\}$ forma ou não um grupo a respeito da operação $\theta$ definida por meio da tabela junta.

$x\,\theta\,y$

| $x \backslash y$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $a$ | $b$ |
| $c$ | $a$ | $a$ | $c$ | $c$ |
| $d$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |

É a operação $\theta$ comutativa? É associativa?

# CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

**F. C. C.** — Cálculo Infinitesimal — **1.º Exame de frequência — 1947-1948.**

1.º Ponto

**2785** — Primitivar a função $f(x)=e^{+2x}(2-e^x)^{-1/3}$. R: $\mathrm{Pf}(x)=-3\,[(2-e^x)^{2/3}-1/5\,(2-e^x)^{5/3}]+C$.

**2786** — Primitivar a funcão $f(x)=x^{-1/2}\operatorname{arc\,sen}^2 x$. R: $\mathrm{Pf}(x)=2\sqrt{x}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}$.

**2787** — Em que direcções emergentes do ponto $(0,\pi/2)$ se anula a segunda derivada direccional da função $f(x,y)=\operatorname{sen} y-\cos x$? R: $y=x$ e $y=-x$.

2.º Ponto

**2788** — Primitivar a função

$$f(x)=\frac{\log x}{x}\cdot\operatorname{arc\,tg}(\log x).$$

R: $\mathrm{Pf}(x)=\dfrac{1}{2}(\log^2 x+1)\operatorname{arc\,tg}(\log x)-\log\sqrt{x}+C.$

**2789** — Primitivar a função

$$f(x)=e^{\operatorname{tg}x-2}\sec^2 x\,(\operatorname{tg}^2 x+2).$$

R: $\mathrm{Pf}(x)=e^{\operatorname{tg}x-2}(\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x+4)+C.$

**2790** — A função $z=e^{-x}\operatorname{sen} y+e^{x-y}$ satisfaz à equação $p+q=-(s+z)$? R: *Não satisfaz.*

Soluções dos n.os 2785 a 2790 de Luís Albuquerque

**F. C. L.** — Análise Superior — **Exame de frequência — 1947-48.**

**2791** — Calcule o integral $\displaystyle\int_{-2i}^{+2i}\frac{dz}{(z+1)\sqrt{z^2+4}}$ ao longo do eixo imaginário, adoptando para o radical a determinação que se reduz a $+2$ para $z=0$.

**2792** — Ao longo das superfícies de certa família $(S)$, os planos tangentes têm coeficientes $p, q$ e $-1$, com $p=-c\,(cx+y)/z\,(1+c^2)$ $\Sigma=-cx+y/z\,(1+c^2)$ onde $c$ designa um parâmetro arbitrário. Determine: *a*) a equação às derivadas parciais de 1.ª ordem à qual se sujeitam as superfícies $(S)$; *b*) um seu integral completo; *c*) a solução de Cauchy relativa à linha $x=y^2+z^2-2=0$. Que relação exprime a equação, obtida em *a*), entre o plano tangente genérico a uma superfície $S$ qualquer e a recta $r$, do plano $x0y$, corrente pela origem e apoiada na normal relativa àquele plano tangente? Equações diferenciais das linhas trajectoriais ortogonais de $(S)$.

Enunciados dos n.os 2791 e 2792 de Humberto de Menezes

**F. C. P.** — Cálculo — **Outubro de 1948**

I

**2793** — Determine a equação da tangente à linha $x^{\operatorname{sen} y}+\cos(y^x)=1$ no ponto $(1,\pi/2)$. R: $Y-\pi/2=(1-\pi/2\log\pi/2)(X-1)$.

**2794** — $\displaystyle\int\frac{2\,dx}{\cot x-\operatorname{tg}x}$. R: $\displaystyle I=\int\frac{2\,dx}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}-\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}=$

$$=\int\frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\cos 2x}=-\frac{1}{2}\log\cos 2x+C.$$

II

**2795** — $\displaystyle\iint_D dx\,dy$, no domínio limitado por

$$\begin{cases} y^2=20\,(x-3)\\ x^2=16\,(y-6).\end{cases}$$

$$\text{R: } I=\int_0^3 dx\int_0^{x^2/16+6}dy+\int_6^8 dx\int_{\sqrt{20(x-3)}}^{x^2/16+6}dy=76/3.$$

**2796** — Mostrar que a equação de Ricatti $y'-By=Ay^2+C$ em que $A, B, C$ são funções de $x$, pode ingrar-se pelo método de variações das constantes se $AC'-A'C=2ABC$. R: *Temos:* $d\dfrac{C}{A}=2B\dfrac{C}{A}$, $\dfrac{d(C/A)}{C/A}=2B$, *logo* $C/A=ke^{2\int B\,dx}$. $y'-By=0$ *integrada dá* $y=He^{\int B\,dx}$. *Variando a constante vem:*

$$H'e^{\int B\,dx}=AH^2e^{2\int B\,dx}+C \quad ou \quad H'\sqrt{\frac{C}{AK}}=$$

$$=C\left(\frac{H^2}{K}+1\right),\quad \frac{\frac{1}{\sqrt{K}}\,dH}{H^2/K}=\sqrt{AC}\,dx,\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{H}{\sqrt{H}}=$$

$$=\int\sqrt{AC}\,dx+H_1,\quad H=\sqrt{K}\operatorname{tg}\left\{\int\sqrt{AC}\,dx+H_1,\right.$$

$$e\ portanto:\ y=\sqrt{K}\,e^{\int B\,dx}\operatorname{tg}\left\{\int\sqrt{AC}\,dx+H_1\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{C}{A}}\operatorname{tg}\left\{\int\sqrt{AC}\,dx+H_1\right\}.$$

Soluções dos n.os 2793 a 2796 de J. Rios de Souza

**I. S. A.** — Cálculo Infinitesimal — **2.º Exame de frequência extraordinário — 1947-48 — Ponto n.º 1.**

**2797** — Um triângulo isósceles variável de altura igual a 10 cujo plano é perpendicular ao plano $xoy$, tem os extremos da base assentes nas curvas deste plano de equações $y=x^3$ e $y=-x$. Supondo o triângulo animado de um movimento de translação de tal modo que a sua base se mantém sempre paralela a $oy$, calcule: *a*) O volume por ele gerado quando a base se desloca desde a recta de equação $x=0$ até à recta de equação $x=1$. *b*) Usando coordenadas polares, a área do domínio do quarto quadrante limitado pelo eixo dos $xx$ e pela curva descrita pelo ponto médio da base do triângulo. R: a) *Comprimento da base* $x^3+x$; *área do triângulo* $5(x^3+x)$; logo $V=\int_0^1 5(x^3+x)\,dx=15/4$. b) *Curva descrita pelo ponto médio* $y=1/2\,(x^3-x)$ *ou em coordenadas polares* $\rho^2=(2\,\text{sen}\,\theta+\cos\theta)/\cos^2\theta$, *logo* $A=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\text{arctg}\,-1/2}\rho^2\,d\theta=-\dfrac{1}{8}$.

**2798** — Considere a função $z=f(x,y)$ assim definida: $f(x,y)=x\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ para pontos $(x,y)$ tais que $x\neq y$, $f(x,y)=0$ para pontos $(x,y)$ tais que $x=y$. Calcule $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ e verifique se o teorema da inversão da ordem de derivação é aplicável a esta função no ponto $(0,0)$. R: *Tem-se* $f(0+h,0)=h^2$, $f(0,0+k)=0$, $f_x(0,0+k)=-k$, $f_y(0+h,0)=h$, *logo* $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ $f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=0$ *e portanto o teorema não é aplicável.*

**2799** — Calcule a mais curta distância entre as curvas de equação $y=x^2$ e $y=x-1$. R: *Escrevendo* $Y=X-1$ *e tomando para variáveis independentes* y *e* Y, *visto* $\partial(f_2,f_3)/\partial(y,Y)=-1\neq0$, *o sistema de estacionaridade é formado pelas equações* $Y-X+1=0$, $y-x^2=0$, $2xY-2xy+X-x=0$ *e* $xY-xy+xX-x^2=0$ *a que correspondem as duas soluções reais* $x=0$, $y=0$, $X=0$, $Y=-1$ *e* $x=1/2$, $y=1/4$, $X=7/8$, $Y=-1/8$. *Interessa apenas a segunda, que dá para a distância mais curta* $3\sqrt{2}/8$.

**2800** — Considere o integral $\int_0^1(x-x^2)\,dx$. *a*) Mostre que este integral existe. *b*) Calcule-o a partir da definição de integral como um limite. *c*) Calcule-o usando a substituição $t=(x-1/2)^{2/3}$. Que precauções deve tomar e porquê? R: a) *A função integranda é contínua, logo o integral existe.* b) *Dividindo o intervalo* $[0,1]$ *em* n *sub-intervalos de comprimento* $\Delta x=1/n$ *é* $\sum_1^n f(x)\,\Delta x=\Delta x^2(1+2+\cdots+n)-\Delta x^3(1+2^2+\cdots+n^2)=$ $=\dfrac{n(n+1)}{2n^2}-\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$ *e tomando limites*

$$\lim\sum_1^n(x-x^2)\,\Delta x=\int_0^1(x-x^2)\,dx=1/6\,.$$

c) *A transformação não é reversível. É necessário fazer uma partição adequada do intervalo de integração.*

**2801** — Calcule $I=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}dy\int_{y+2x-1}^{1}dz$, defina o domínio de integração e escreva os cinco integrais repetidos equivalentes ao integral dado. R: *O cálculo não apresenta qualquer dificuldade; o domínio é o tetraedro definido pelos planos* $2x+y-z-1=0$, $z=1$, $x=0$ *e* $y=0$ *e os cinco integrais pedidos são*

$$\int_0^1 dx\int_{2x-1}^{1}dz\int_0^{z-2x+1}dy\,,\quad \int_0^2 dy\int_0^{1-y/2}dx\int_{y+2x-1}^{1}dz\,,\quad \int_0^2 dy\int_{y-1}^{1}dz\int_0^{(z-y+1)/2}dx$$

$$\int_{-1}^{1}dz\int_0^{(z+1)/2}dx\int_0^{z-2x+1}dy \quad e \quad \int_{-1}^{1}dz\int_0^{z+1}dy\int_0^{(z-y+1)/2}dx\,.$$

Soluções dos n.os 2738 a 2802 de F. Carvalho Araújo

# GEOMETRIA PROJECTIVA

**F. C. L. — Geometria Projectiva — Exame Final — 1947-48.**

**2802** — De uma hipérbole equilátera, conhecem-se os seguintes elementos: *a*) uma assíntota $m$; *b*) a polar $p$ (a respeito da hipérbole) de um ponto dado $P$ exterior a $m$ ($\widehat{pm}=45^\circ$). Determine: 1.º o centro e os eixos; 2.º dois diâmetros conjugados $(a,a')$ tais que $\widehat{aa'}=K^0$. Discussão. 3.º os vértices reais da hipérbole.

Enunciado de Humberto de Menezes

**F. C. P. — Geometria Projectiva — Ponto n.º 2 — 1947.**

1.ª Parte

**2803** — Considere 4 pontos $A$, $B$, $C$, $C'$ duma mesma recta. Seja $C'$ o conjugado harmónico de $C$ relativamente a $A$ e $B$. Determine a abscissa do ponto $C'$, quando se tomam para pontos fundamentais origem, unidade e neutral respectivamente $C$, $A$ e $B$.

**2804** — Conside um triângulo $ABC$. Designe por $C'$ um ponto do lado $AB$; por $A'$ um ponto do lado $BC$; por $C''$ o conjugado harmónico de $C'$ relativamente aos vértices $A$ e $B$; por $A''$ o conjugado harmónico de $A'$ relativamente aos vértices $B$ e $C$. Demonstre que a recta que une $A''$ e $C''$ intersecta o lado $AC$ no ponto $B'$, onde este lado intersecta a recta que une $A'$ com $C'$.

**2805** — Esquematizar o caminho a seguir para determinar pontos de uma cónica definida por 3 pontos reais $A$, $B$, $C$ e por 2 pontos imaginários.

**2806** — Demonstre o teorema de Descartes relativamente às cónicas.

**2807** — Como classifica e distingue as quádricas duplamente regradas?

Enuncie algumas propriedades características de cada uma.

**2808** — *a*) Defina rectas paralelas em geometria de Lobatchevsky.

*b*) Exemplifique com uma figura esta definição utilizando o esquema de Cayley com absoluto real.

2.ª Parte

**2809** — Desenhar um triângulo equilátero $ABC$ de 5 cm de lado e um círculo inscrito. Traçar a altura relativamente a $BC$ e marcar para o lado de $BC$ um ponto $T$, sendo $AT$ igual a 7 cm. Considere uma homologia de eixo $t$ passando por $T$ paralelo a $BC$ que transforme o círculo desenhado numa parábola tangente às rectas $AB$ e $AC$, não sendo estas rectas duplas e não sendo $BC$ recta limite. Determinar a recta limite e o centro da homologia considerada e o vértice da parábola.

**2810** — Desenhar um triângulo rectângulo $OMN$ sendo $OM$ igual a 3 cm e $ON$ igual a 2 cm, $O$ vértice do ângulo recto. Marcar entre $M$ e $N$, $MP$ igual a 1 cm. Determinar o diâmetro conjugado da direcção $OP$ e os focos de uma hipérbole que tem por assíntotas $OM$ e $ON$ e passa por $P$.

**2811** — Dada uma parábola e duas tangentes $a$ e $a'$ fixas e uma tangente $t$ móvel; mostrar que $t$ encontra $a$ e $a'$ em pontos que definem pontuais semelhantes.

Enunciados de J. Rios de Sousa

**F. C. P.** — Geometria Projectiva — **Ponto n.º 1 — 1947.**

1.ª Parte

**2812** — Sejam $A, B, C, A', B', C'$, 6 pontos duma mesma recta. Determinar as abscissas dos pontos $A'$, $B'$ e $C'$ num sistema de pontos fundamentais $A$, $B$ e $C$ respectivamente neutral, origem e unidade, sabendo que

$$(A\,B\,C\,A')=3, \quad (A\,B'\,C\,B)=2, \quad (A\,A'\,B'\,C')=-1.$$

**2813** — Enuncie e demonstre o teorema de Desargues para o caso de dois triângulos não complanos e para o caso de dois triângulos complanos.

**2814** — Esquematizar o caminho a seguir para determinar pontos de uma cónica definida por um ponto real $M$ e por 4 pontos imaginários.

**2815** — Demonstre o teorema de Pascal.

**2816** — Defina plano tangente a uma quádrica e diga o que entende por pontos hiperbólicos, elíticos e parabólicos.

**2817** — *a*) Como passa do esquema euclideano clássico para o esquema euclideano hiperbólico?

*b*) Em geometria euclideana hiperbólica como define ângulo de duas rectas e distância de dois pontos?

2.ª Parte

**2818** — Desenhar um triângulo equilátero $F_1\,F_2\,P$ sendo $F_1\,F_2$ igual a 8 cm, $F_1\,P$ igual a 5 cm e $F_2$P igual a 6 cm.

Marcar sobre $F_1\,F_2$ um ponto $A$ entre $F_1$ e $F_2$ sendo $F_1\,A$ igual a 3 cm e traçar a recta $t$ que une $B$ a $A$.

Considerar uma cónica que tem por focos $F_1$ e $F_2$ e é tangente a $t$. Determinar a outra tangente à cónica $t'$ tirada por $P$ e os pontos de contacto das duas com a cónica.

**2819** — Determinar o eixo e o vértice duma parábola dadas duas tangentes $t_1$ e $t_2$, o ponto de contacto $M$ de $t_1$ e a direcção $d$ dos diâmetros.

Ângulo de $t_1$ com $t_2$, 60º, ângulo de $d$ com $t_2$, 45º, verificando-se a sequência $t_1\,d\,t_2$. Sendo $O$ o ponto de encontro de $t_1$ com $t_2$, $OM$ igual a 6 cm.

**2820** — Mostrar que as involuções determinadas por dois círculos distintos de um plano sobre a recta do infinito do plano, são idênticas.

Enunciados de J. Rios de Sousa

# MECÂNICA RACIONAL

**I. S. T.** — Mecânica Racional — 3.º **exame de frequência ordinário — 1948.**

**2821** — Condições de equilíbrio dum sólido que tem um ponto $(a, b, 0)$ obrigado a permanecer no plano $(x; y)$, e um ponto $(0, 0, c)$ obrigado a permanecer no eixo dos $zz$. Determinar as reacções.

**2822** — Mecânica dum meio contínuo. Isotropia. Fluidez perfeita.

**2823** — Equilíbrio duma funicular submetida à acção de forças centrais. Equações cartesianas e intrínseca.

**I. S. T. — Mecânica Racional — 3.º exame de frequência extraordinário — 1948.**

**2824** — Determinar as condições de equilíbrio dum sólido que tem o ponto $A(a,0,0)$ obrigado a permanecer no eixo dos $xx$ (sem atrito); e o ponto $B(0,b,0)$ obrigado a permanecer no eixo dos $yy$ (também sem atrito). As forças activas reduzem-se a uma força única $(x,y,z)$, aplicada no ponto $(0,0,0)$.

**2825** — Equilíbrio das funiculares submetidas a uma lei de forças paralelas a uma direcção dada. Equações cartesiana e intrínseca.

**2826** — Movimentos rotacionais dos fluidos perfeitos.

## II — ESCOLAS ESTRANGEIRAS

**University of California** — Mathematics 110B Section 7 (Advanced Engineering Mathematics) — **Final Examination — June 14, 1948.**

**2827** — Suppose a radioactive substance is changing into a second which, in turn, is changing into a third product which is stable. Given that the rate at which the mass of each substance is being changed into the next is proportional to its mass,

1) derive the following system of equations governing the phenomenon

$$\frac{dx}{dt}=-ax,\quad \frac{dy}{dt}=ax-by,\quad \frac{dz}{dt}=by,$$

where $x,y,z$ are the respective masses and $t$ is the time;

2) indicate $x,y,z$ as functions of $t$ supposing that, initially, only the first substance is present.

**2828** — Integrate:

$$(xy'-y)^2=(x^2-y^2)\left(\text{arc sin}\,\frac{y}{x}\right)^2$$

Give also the singular solutions.

**2829** — Indicate the frequency of the motion of a particle of mass 2 gr. starting with an initial velocity of 1 cm/sec from a center which attracts the particle proportionally to its distance and acted also by a damping force which is proportional to its velocity. The coefficients of proportionality are respectively 50 and 12 and no other force is supposed.

What is the position of the particle at time 3 sec.?

**2830** — Show that $y''-\frac{3}{x}y'-\frac{5}{x^2}y=0$ has two solutions of the form $x^\alpha$ and find the general solution of $y''-\frac{3}{x}y'-\frac{5}{x^2}y=\log x$.

**2831** — Indicate the solutions which are common to the two differential equations: *a*) $y'=y^2+2x-x^4$; *b*) $y'=-y^2-y+2x+x^2+x^4$.

**2832** — Find the orthogonal trajectories of the family of all circles tangent at the origin to the line $x=y$.

**2833** — Indicate two solutions of $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$.

**University of California** — Mathematics 110-Section 3 (Advanced Engineering Mathematics) — **Final Examination — June 17, 1948.**

**2834** — The following conditions are verified by a source free fluid flow of an incompressible fluid of constant density $\rho$ and variable pressure $p$, moving steadily parallel to the $x,y$ plane

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

I) Show that these conditions are verified by the components of any analytic function $w=u-iv$, if $p=p_0-\rho(u^2+v^2)/2$, $p_0$ being a constant. II) Supposing that $u=2x$ and using the conclusion of I, indicate $v$ such that $w=u-iv$ will satisfy the equalities above if $p=p_0-\rho(u^2+v^2)/2$, $p_0$ being a constant.

**2835** — *a*) Using two different methods, evaluate the area of the image by the function $w=2e^z$, of the region bounded by the unit square (vertices $z=0,1,i,1+i$).

*b*) Prove that: $\sin z=\sin x\cos h\,y+i\sin h\,y\cos x$, $(z=x+iy)$.

**2836** — Show that $x^2y''-3xy'-5y=0$ has two solutions of the form $x^\alpha$ and find the general integral of $x^2y''-3xy'-5y=\log x$.

**2837** — Indicate the frequency of the motion of a particle of mass 1 gr. starting with the initial velocity of 1/2 cm/sec from a center attracting the particle proportionally to its distance from this center, the particle being also acted on by a damping force proportional to its velocity. No other forces are supposed and the proportionality coefficients are respectively 25 and 6.

What is the position of the particle after 3 seconds?

**2838** — Find the orthogonal trajectories of the family of circles tangent to the line $x=-y$ at the origin.

**2839** — Find the integrals which are common to the differential equations $y'=y^2+2x-x^4$ $y'=-y^2-y+2x+x^2+x^4$.

**2840** — Show *a*) that a linear homogeneous equation $y^{(n)}+p(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=0$ with *real* coefficients has a complex solution $u(x)+iv(x)$ if and only if $u(x)$ and $v(x)$ are solutions. *b*) that for a linear homogeneous equation

$$y^{(n)}+py^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}\,y'+p_n\,y=0$$

with *constant* coefficients it is true that the derivative of a solution is also a solution.

Enunciados dos n.$^{os}$ 2827 a 2840 de Hugo Ribeiro

# BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

**73** — W. V. D. HODGE and D. PEDOE. **Methods of Algebraic Geometry.** Cambridge University Press, 1947. VIII+440 pp. 30 s.

El volumen que comentamos constituye la primera parte de una obra destinada a exponer los fundamentos y los métodos de la Geometria algebraica moderna, gracias a los cuales esta disciplina puede alcanzar un rigor absoluto, virtud que no siempre acompañó a la Geometria algebraica clásica. La obra va a ser desarrollada en forma autónoma y, en tal sentido, contendrá todos los elementos de Algebra y de Geometria projectiva que se utilizan en Geometria algebraica. Precisamente el presente volumen está dedicado al estudio detallado de dichos elementos.

El tomo está dividido en dos libros dedicados, el primero, a los preliminares algebraicos y, el segundo, al estudio del espacio proyectivo.

El libro I consta de cuatro capítulos. El primer capítulo contiene las nociones fundamentales del Algebra moderna: grupos, anillos, isomorfismos, dominios de integridad, cuerpos, anillos de polinomios, dominios con descomposición factorial única, etc.... En el capítulo segundo se estudian, en forma original muy interesante, la dependencia lineal y los elementos de la teoria de matrices sobre cuerpos no conmutativos; considerando luego cuerpos conmutativos, se expone la teoria clásica de determinantes y la de matrices cuyos elementos son polinomios en una indeterminada.

Las extensiones de un cuerpo conmutativo y la diferenciación de funciones algebraicas, constituyen el objeto del capítulo tercero. Se consideran principalmente extensiones de grado finito y se establecen, entre otros, el teorema fundamental — de Kronecker — del algebra abstracta y el teorema de Abel del elemento primitivo, éste unicamente en el caso de característica nula. La diferenciación aparece tratada con detenimiento y es de señalar la aplcación, pudlicada por vez primera aqui, de la teoria de los Jacobianos al estudio de la dependencia agebraica, siempre en el caso de característica nula. (La teoria de los jacobianos ha sido ya utilizada en cuestiones de geometria algebraica abstracta: caracterización de puntos simples de variedades algebraicas, por Weil y, sobre todo, por Zariski quien ha llegado a extenderla al caso de cuerpos de característica prima. Posiblemente, siguiendo el orden de ideas de Zariski pueda hacerse análoga extensión en el problema de dependencia algebraica. Pensando en esto, echamos de menos en el volumen que comentamos unas lineas dedicadas a la diferenciación abstracta).

El último capítulo del libro I está dedicado a la teoria de la eliminación, se llega a establecer las formas de inercia de Hurwitz y se da la teoria de la u-resultante de importantes aplicaciones en Geometria algebraica; se dan también los teoremas de la base y de los ceros de Hilbert.

El libro II lo forman cinco capítulos. Los capítulos quinto y sexto se refieren a la definición del espacio proyectivo de $n$ dimensiones en forma «algebraica» y «sintética» respectivamente. Por la primera el espacio aparece como conjunto de $(n+1)$ — plas ordenadas de elementos, no todos nulos, de un cuerpo arbitrario $K$.