

2837 — Indicate the frequency of the motion of a particle of mass 1 gr. starting with the initial velocity of 1/2 cm/sec from a center attracting the particle proportionally to its distance from this center, the particle being also acted on by a damping force proportional to its velocity. No other forces are supposed and the proportionality coefficients are respectively 25 and 6.

What is the position of the particle after 3 seconds?

2838 — Find the orthogonal trajectories of the family of circles tangent to the line $x = -y$ at the origin.

2839 — Find the integrals which are common to the differential equations $y' = y^2 + 2x - x^4$ $y' = -y^2 - y + 2x + x^2 + x^4$.

2840 — Show a) that a linear homogeneous equation $y^{(n)} + p(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$ with real coefficients has a complex solution $u(x) + iv(x)$ if and only if $u(x)$ and $v(x)$ are solutions. b) that for a linear homogeneous equation

$$y^{(n)} + py^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}y' + p_n y = 0$$

with constant coefficients it is true that the derivative of a solution is also a solution.

Enunciados dos n.ºs 2827 a 2840 de Hugo Ribeiro

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações do Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

73 — W. V. D. HODGE and D. PEDOE. **Methods of Algebraic Geometry**. Cambridge University Press, 1947. VIII+440 pp. 30 s.

El volumen que comentamos constituye la primera parte de una obra destinada a exponer los fundamentos y los métodos de la Geometría algebraica moderna, gracias a los cuales esta disciplina puede alcanzar un rigor absoluto, virtud que no siempre acompañó a la Geometría algebraica clásica. La obra va a ser desarrollada en forma autónoma y, en tal sentido, contendrá todos los elementos de Algebra y de Geometría proyectiva que se utilizan en Geometría algebraica. Precisamente el presente volumen está dedicado al estudio detallado de dichos elementos.

El tomo está dividido en dos libros dedicados, el primero, a los preliminares algebraicos y, el segundo, al estudio del espacio proyectivo.

El libro I consta de cuatro capítulos. El primer capítulo contiene las nociones fundamentales del Algebra moderna: grupos, anillos, isomorfismos, dominios de integridad, cuerpos, anillos de polinomios, dominios con descomposición factorial única, etc... En el capítulo segundo se estudian, en forma original muy interesante, la dependencia lineal y los elementos de la teoría de matrices sobre cuerpos no conmutativos; considerando luego cuerpos conmutativos, se expone la teoría clásica de determinantes y la de matrices cuyos elementos son polinomios en una indeterminada.

Las extensiones de un cuerpo conmutativo y la diferenciación de funciones algebraicas, constituyen el objeto del capítulo tercero. Se consideran principal-

mente extensiones de grado finito y se establecen, entre otros, el teorema fundamental — de Kronecker — del algebra abstracta y el teorema de Abel del elemento primitivo, éste únicamente en el caso de característica nula. La diferenciación aparece tratada con detenimiento y es de señalar la aplicación, publicada por vez primera aquí, de la teoría de los Jacobianos al estudio de la dependencia algebraica, siempre en el caso de característica nula. (La teoría de los jacobianos ha sido ya utilizada en cuestiones de geometría algebraica abstracta: caracterización de puntos simples de variedades algebraicas, por Weil y, sobre todo, por Zariski quien ha llegado a extenderla al caso de cuerpos de característica prima. Posiblemente, siguiendo el orden de ideas de Zariski pueda hacerse análoga extensión en el problema de dependencia algebraica. Pensando en esto, echamos de menos en el volumen que comentamos unas líneas dedicadas a la diferenciación abstracta).

El último capítulo del libro I está dedicado a la teoría de la eliminación, se llega a establecer las formas de inercia de Hurwitz y se da la teoría de la u -resultante de importantes aplicaciones en Geometría algebraica; se dan también los teoremas de la base y de los ceros de Hilbert.

El libro II lo forman cinco capítulos. Los capítulos quinto y sexto se refieren a la definición del espacio proyectivo de n dimensiones en forma «algebraica» y «sintética» respectivamente. Por la primera el espacio aparece como conjunto de $(n+1)$ -plas ordenadas de elementos, no todos nulos, de un cuerpo arbitrario K .

La dependencia lineal, cuya teoría algebraica fue desarrollada detalladamente en el capítulo segundo, permite definir los espacios lineales de dimensión menor que n y establecer los llamados principios de incidencia así como el de dualidad. El teorema de Desargues (para $n > 2$) y la construcción de la suma y el producto de dos puntos de una recta, en la que se han fijado tres puntos de referencia, se obtienen de un modo inmediato. Se dan también, en el capítulo quinto, ejemplos de geometrías no-arguesianas y de geometrías proyectivas finitas. En el capítulo sexto se sigue el camino inverso del precedente: se parte de los principios de incidencia, tomados como axiomas, y se llega a ligar al espacio un cuerpo abstracto K cuya geometría proyectiva es isomorfa con la obtenida sintéticamente a par de dichos axiomas. La exposición de estos dos capítulos se inspira en la obra clásica de Veblen y Young, distinguiéndose de ésta en que la restricción que impone la validez del teorema de Pappus, es decir la conmutatividad de K , se establece aquí más tarde con lo que se obtiene más generalidad para varios resultados. En la obtención de las coordenadas relativas a un sistema de referencia, se utiliza solamente una parte del teorema fundamental de la Geometría proyectiva, aquella que afirma la existencia de al menos una proyectividad entre dos series rectilíneas en las que se corresponden tres pares determinados de puntos. Hubiera sido de desear, a nuestro juicio, haber establecido el teorema completo para el caso no conmutativo, cosa realizable en pocas líneas apoyándose en los teoremas del § 3 de este capítulo (ver p. ej.: nuestro trabajo publicado en la Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4) 1 (1941)) y así, aparte del interés propio del teorema, resultaría más intuitiva la demostración del teorema I del § 6 del mismo capítulo.

En el capítulo octavo se introducen las coordenadas grassmannianas para los espacios lineales, espacios que dan lugar a variedades de gran interés en Geometría algebraica. Se establecen las condiciones necesarias y suficientes que han de satisfacer dichas coordenadas, condiciones que dan las ecuaciones algebraicas que sirven para definir, en espacios proyectivos de conveniente número de dimensiones, las variedades a que antes nos referimos. En los últimos capítulos, noveno y décimo, se consideran respectivamente las colineaciones y las correlaciones del espacio proyectivo de n dimensiones. El estudio es puramente algebraico y para él se utilizan los materiales del libro I. En los tres capítulos finales se supone siempre que el cuerpo fundamental es conmutativo y de característica nula (cuerpo sin característica, en la terminología de los autores) y en la mayor parte de los casos algebraicamente cerrados.

El volumen, que está escrito con rigor completo y

en estilo muy agradable, cumple magníficamente los objetivos que los autores señalan en el prólogo. El estudioso, al que no se le supongan conocimientos previos, encontrará en el una exposición perfecta de una introducción a la Geometría algebraica moderna; mientras que el especialista sabrá encontrar multitud de detalles de perfección en las demostraciones y de acierto en la elección y ordenación de materias que harán que espere con impaciencia la publicación de la segunda parte de la obra, publicación que los autores prometen para fecha próxima.

G. Ancochea (Madrid)

74 — FINNEY, D. J. — *Probit Analysis — A Statistical Treatment of The Signoid Response Curve.* Cambridge University Press. 1947. Pp. XIII+256. Price 18s.

Embora, por razões facilmente compreensíveis, não tenha ainda sido escrito, pese às magníficas tentativas de Fisher, Wilks, Kendall, Ceamér e Jeffreys, o tratado de Estatística Pura e Aplicada que todos desejaríamos, a verdade é que actualmente é manifesta a tendência para a publicação de livros texto com carácter especializado versando questões, problemas ou técnicas particulares que interessam apenas a determinados sectores da actividade científica.

Pode criticar-se esta orientação, perfilhando uma atitude académica e dando relêvo às insuficiências lógicas ou ao carácter controverso dos fundamentos da Estatística, mas não resta dúvida alguma de que os livros do tipo referido prestam ao estudioso um serviço inapreciável, pois estabelecem uma ligação fecunda e utilíssima entre os princípios de ordem geral tratados no livro texto ordinário e as técnicas especializadas expostas nos artigos de revista.

Pertence a esta classe o livro de Finney actualmente professor em Oxford da Cadeira de Análise e Planificação Experimental e antigo investigador da Estação de Rothamsted e do Laboratório Galton. O título e sub-título da obra não terão porventura a virtude de chamar a atenção do toxicologista, do entomólogo, do farmacologista ou do patologista; no entanto, após a sua leitura, não nos restam dúvidas algumas de que o conhecimento da técnica a que Bliss deu o nome de «probit analysis»⁽¹⁾ é hoje, não só na planificação experimental, mas também na interpretação dos resultados, indispensável aos referidos técnicos.

Segundo o autor afirma no prefácio e na introdução, o livro destina-se aos químicos, biólogos e outros que possuam um conhecimento elementar dos métodos es-

(1) Contração de «probability units».

tatísticos e ainda aos que, familiarizados já com o método dos «probits», desejem tomar conhecimento dos desenvolvimentos mais recentes do citado método.

Dentro desta orientação o trabalho de Finney é indiscutivelmente uma obra de categoria excepcional; todavia, sem nos afastarmos das directrizes impostas pelo autor julgamo-nos na obrigação de chamar a atenção do leitor para dois pontos importantes.

Em primeiro lugar assinalar que para o autor «um conhecimento elementar dos métodos estatísticos» significa um domínio perfeito da matéria versada no livro de K. Mather, *Statistical Analysis in Biology* e de grande parte da que está contida no clássico *Statistical Methods for Research Workers*, de Fisher. Para o nosso meio, pelo menos, parece-me exigência demasiada.

Em segundo, fazer notar que a evidente preocupação do autor, em tornar compreensivos os métodos estatísticos adequados à interpretação dos resultados do «ensaio biológico» e respeitar as dificuldades a que o prático tem de dar remédio, o obrigam a uma pormenorização excessiva, de tal maneira que algumas vezes a ideia directriz se dilui na massa dos detalhes. M. Merrel⁽¹⁾ que chama também a atenção para este facto, lembra que na sua essência o método dos «probits» se reduz a:

a) Verificar se os dados seguem uma lei de distribuição normal. Caso assim não aconteça, usar uma transformação adequada que conduza à sua normalização.

b) Substituir as proporções acumuladas por «probits» que ficarão relacionados linearmente com a nova variável.

c) Estimar os parâmetros desta recta.

d) Efectuar provas de ajustamento e determinar limites fiduciários para os parâmetros e para a recta.

Dentre as questões tratadas neste livro destacamos para elucidação do leitor as seguintes: história do método dos «probits», planificação das experiências, precisão dos ensaios, determinação da potência relativa, estudo das misturas de venenos, combinação e comparação de potências relativas, etc, etc.

Dois apêndices completam a exposição da matéria. No primeiro dá-se uma descrição detalhada e sistemática, através dum exemplo, dos métodos de cálculo a usar quando um único calculador é responsável por toda a análise e no segundo expõem-se as bases matemáticas do método dos «probits».

Nas últimas páginas figuram, além duma ampla

lista bibliográfica, um certo número de tabelas, algumas delas abreviadas, indispensáveis a quem pretender aplicar o método. A propósito, lembramos ao leitor que foi publicada recentemente⁽¹⁾ uma extensa tabela destinada ao cálculo de «probits».

Àqueles que se interessam pelo assunto recomendamos ainda com particular interesse a leitura⁽²⁾ duma exposição feita por Finney na Royal Statistical Society e da respectiva discussão, posteriores à data de publicação do livro.

Antes de terminar não desejaríamos deixar no leitor a impressão de que o trabalho de Finney é «único». Se de acordo com a orientação adoptada é incontavelmente uma realização excelente a verdade é que nem todos aceitam incondicionalmente os métodos e as ideias desenvolvidas pelo autor. Leia-se, por exemplo, a crítica de Joseph Berkson⁽³⁾ da Divisão de Biometria e Estatística Médica da Clínica Mayo.

F. A. Carvalho Araújo

75 — TODD, J. A. — *Projective and Analytical Geometry*.

Exposição bem orientada e ordenada de um verdadeiro Curso de Geometria Projectiva para especialistas.

O autor pretende mostrar — e realiza-o — como podem os conceitos fundamentais da Geometria Projectiva ser aproveitados para tratar o assunto à luz das doutrinas da Análise pura, fazendo dele mais um capítulo, aliás muito especial, da Álgebra Moderna.

Em pleno acordo com este ponto de vista, começa por dar, através de uma *Introdução*, uma ideia exacta de aquilo que pretende com a obra, remetendo o leitor para uma pequena (mas bem escolhida) colecção de obras, todas elas fundamentais para bom entendimento do Curso.

Abre com um primeiro capítulo sobre «*Espaços de Vectores*» e «*Espaços Projectivos*», onde — sem a preocupação de discutir os fundamentos — lança um rápida vista pelos pontos essenciais da Álgebra linear que podem ser considerados necessários para o estudo que se propõe fazer.

Fugindo criteriosamente ao aspecto intuitivo da Geometria, trata do problema das coordenadas, define

(1) FINNEY, D. J. and STEVENS, W. L. — Table for the calculation of working probits and weights in probit analysis — *Blom.*, vol. 35, pp. 191-201. — Cada separata 2s. 6d.

(2) FINNEY, D. J. — *The Principles of Biological Assay* — *Supp. to the Jour. Roy. Stat. Soc.*, vol. IX, n.º 1-2, 1947.

(3) BERKSON, J. — *Jour. Amer. Stat. Assoc.*, March, 1948, vol. 43, N.º 241.

(1) MERREL, M — *Jour. Amer. Stat. Assoc.*, March 1948, vol. 43, N.º 241.

as formas geométricas fundamentais, e estabelece o conceito de projectividade entre espaços lineares a n dimensões.

Num segundo capítulo, vem a projectividade entre formas de 1.^a espécie — pontuais e feixes — ; e é importante salientar que são apenas visados os pontos essenciais da doutrina, escolhidos de modo a mostrar como, na realidade, as modernas concepções da Geometria colocam este ramo da Matemática na lista dos vários sectores da Análise.

Segue-se, depois, o estudo das cónicas, com base na teoria das formas algébricas, o das quádricas, da cúbica empenada e dos complexos lineares, sempre do ponto de vista analítico.

O 5.^o capítulo é consagrado à teoria das colineações, com larga aplicação da Álgebra das Matrizes.

Num 6.^o capítulo, estuda a teoria dos invariantes e covariantes, em aplicação às cónicas e às quádricas.

E a fechar a obra, uma bela colecção de problemas de revisão.

Salienta-se o facto — aliás uma característica dos tratadistas ingleses — de se exigir ao leitor consciente, e interessado num estudo completo, a tarefa de resolver os exercícios espalhados no próprio texto, como condição de bom entedimento da sequência dos assuntos, e de aquisição da ferramenta que terá de ser usada no curso da leitura do livro, o que faz deste uma obra aconselhável (a todos os títulos) aos estudantes da especialidade, quer do ponto de vista informativo quer em matéria de formação.

Humberto de Menezes

76 — LICHNEROWICZ, A. : Algèbre et Analyse linéaires (Collection d'ouvrages de mathématiques à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. Darmon), 316 págs. — Masson et Cie, Editeurs, Paris, 1947.

Este livro é construído sobre as noções de espaço vectorial e de funções geralmente contínuas. Partindo da primeira noção e da sua noção dual de espaço das formas lineares o autor expõe na primeira parte (Álgebra linear), com grande preocupação de rigor, a teoria elementar das equações lineares, a álgebra das matrizes, o cálculo tensorial cartesiano e por fim a álgebra não

comutativa de Grassmann ou álgebra exterior. Na segunda parte (Análise linear) aplica a noção de espaço vectorial às formas diferenciais lineares (formas de Pfaff) introduz então as formas diferenciais lineares exteriores (formas de Cartan), cujo cálculo é por assim dizer a parte central do livro. Finalmente, a noção de espaço de funções geralmente contínuas é aplicada ao problema do desenvolvimento em série de funções ortonormais (com os exemplos clássicos de Legendre e de Fourier), à teoria dos operadores lineares e às equações integrais lineares de Fredholm.

O livro destina-se a ser utilizado pelos físicos, mas parece-nos que só aqueles que já estão familiarizados com as diferentes teorias expostas poderão tirar proveito da sua leitura, para fins de iniciação à axiomática moderna e para a delimitação rigorosa da aplicabilidade de muitos teoremas e fórmulas clássicas.

Por outro lado, pode estranhar-se que num livro escrito «à l'usage des physiciens» se dê tanta importância ao cálculo exterior, e se apresentem mesmo as fórmulas vectoriais habituais e as transformações clássicas de integrais (Stokes, Gauss, etc.) apenas como casos particulares do cálculo das formas exteriores. Não é o cálculo exterior que aparece normalmente perante o físico, mas sim o cálculo tensorial de que o primeiro é um caso particular (e uma transposição com outro simbolismo para tensores antisimétricos). Enfim, o livro não trata algumas teorias mais úteis ao físico, mesmo ao físico teórico, do que algumas outras que o autor expõe, e não pode portanto ser considerado como uma verdadeira introdução à Física matemática. Esta introdução ainda está por escrever.

Abstraindo, no entanto, da intenção do autor de escrever uma obra de matemática para físicos, pode dizer-se que este livro é talvez a melhor publicação matemática francesa depois da libertação. Com excepção da capa (de gosto um pouco ... duvidoso) a apresentação material é boa, muito melhor que a da maioria das edições científicas francesas dos últimos anos.

O livro é dedicado à memória de Georges Bruhat, que devia ter dirigido esta colecção se não tivesse sido assassinado pelos alemães num campo de concentração, como tantos outros intelectuais.

A. GIÃO

COMPRE A NOVA EDIÇÃO DO ANO I
DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
TEXTO REVISTO E FORMATO ACTUAL
===== 432 PROBLEMAS =====