ANO IX - N.º 36 GAZETA DE MATEMÁTICA MAIO - 1948

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Sur le déficit isopérimétrique d'un polygone formé par des arcs de cercle

par **H. Hadwiger** (Berne)

Si, dans la présente notice, nous tenons à communiquer quelques relations géométriques élémentaires concernant le déficit isopérimétrique d'un polygone plan formé par des arcs de cercle, c'est tout d'abord parce que ces constatations sont facilement vérifiables.

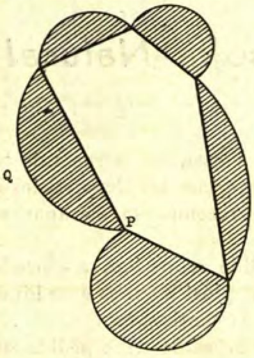

Fig. 1

Considérons un polygone convexe P. Nous lui adjoignons un polygone Q formé par des arcs de cercle et tracé selon le procédé suivant: chaque côté de P est remplacé par un arc de cercle reliant ses deux extrémités et dirigé contre le dehors (voir fig. 1).

Pour éviter une intersection des arcs de Q, nous exigeons ce que nous appellerons la propriété (*): la somme des deux angles inscrits dans les segments de cercle formés par deux arcs consécutifs ne doit pas dépasser 2π.

Les arcs consécutifs d'un polygone de la propriété (*) forment une courbe fermée, sans points doubles, circonscrite au polygone initial P. Désignons respectivement par L et $\overline{L}$ la longueur des polygones Q et P, par F et $\overline{F}$ l'aire engendrée par Q et P, et considérons le déficit isopérimétrique

$$D = L^2 - 4\pi F \tag{1}$$

du polygone Q. Selon l'inégalité isopérimétrique classique on a

$$D \geq 0 .$$

Comme on sait, il existe un polygone convexe P_0 inscrit à un cercle K et ayant les mêmes côtés que P dans le même ordre cyclique. Si nous remplaçons les

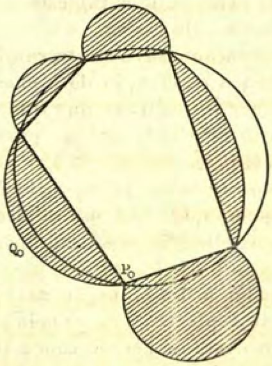

Fig. 2

côtés de P_0 par des arcs de cercle congruents aux arcs correspondants employés pour remplacer les côtés de P, nous obtenons un polygone Q_0 formé par les mêmes arcs que Q et ayant également — ceci est manifeste — la propriété (*) (voir fig. 2).

En analogie à ce qui précède, nous désignerons par L_0 et $\overline{L}_0$ la longueur des polygones Q_0 et P_0, par F_0 et $\overline{F}_0$ leurs aires respectives. Posons également

(2) $$D_0 = L_0^2 - 4\pi F_0$$

Il est évident que

(3) $$D - D_0 = 4\pi (\overline{F}_0 - \overline{F}) .$$

On en déduit très simplement le théorème géométrique suivant bien connu: Si l'on choisit les arcs de Q de telle façon (désignons par Q' ce polygone bien défini formé par des arcs de cercle et circonscrit au polygone P) que le polygone Q'_0, formé par les mêmes arcs que Q', soit congruent au cercle K (K, considéré comme polygone en arcs de cercle, a la propriété (*)), on aura $D'_0, = 0$ et, d'après la formule (3)

(4) $$\overline{F} = \overline{F}_0 - \frac{D'}{4\pi} ;$$

à cause de $D' \geqq 0$, on en déduit

(5) $$\overline{F} \leqq \overline{F}_0,$$

l'égalité étant réalisée dans le cas où Q' est un cercle, et seulement dans ce cas. Le fait qu'un polygone aux côtés donnés est inscrit à un cercle est donc une condition nécessaire et suffisante pour que son aire soit un maximum.

Comparons encore les déficits isopérimétriques des deux polygones en arcs de cercle Q et Q'. Selon (3) nous avons

$$D - D_0 = 4\pi (\overline{F}_0 - \overline{F})$$

et

$$D' - D'_0 = 4\pi (\overline{F}_0 - \overline{F}) .$$

Comme $D'_0 = 0$, on en déduit

(6) $$D = D' + D_0$$

et, à cause de $D_0 \geqq 0$,

(7) $$D \geqq D' .$$

Cela signifie que le déficit isopérimétrique D d'un polygone Q de la propriété (*), formé des arcs de cercle et circonscrit à un polygone convexe donné P, prend la plus petite valeur possible, quand Q est formé par les mêmes arcs que le cercle K circonscrit au polygone P_0, ayant les mêmes côtés que P. Cette condition est nécessaire et suffisante.

A função exponencial em Filosofia Natural

por **Luís Freire** *(Recife)*

Newton chamava de Filosofia Natural, expressão essa conservada pelos autores inglezes, ao que as demais escolas chamam de Física.

Aquela denominação visava mostrar iniludivelmente que se procurava a explicação dos fenomenos físicos recorrendo a métodos positivos, que tinham por cenário o campo experimental, que se processavam no seio da Natureza, pois.

E isso em contraposição às especulações apriorísticas dos filósofos que, até então, tentavam fora da Natureza a explicação dos seus próprios fenómenos.

Pode-se extender a denominação de Filosofia Natural ao conjunto explicativo da ciência experimental por inteiro — isso está de acordo com a índole da expressão, com os motivos que a fizeram adotar.

É o que faremos.

Conta-nos uma lenda árabe que, em recompensa à sua descoberta do jogo de xadrez, um sudito dum grande rei pediu *apenas* o seguinte:

Um grão de trigo sobre a primeira casa, dois sobre a segunda, quatro sobre a terceira, e nessa dupla razão até chegar a casa 64; a soma de todos os grãos de trigo que deveriam ser depositados sobre o taboleiro, seria a sua recompensa, em aparência, das mais modestas.

Ora, esse pedido representava a produção mundial de trigo durante quási 80 anos e na hipótese de serem semeados todos os continentes!

O número de grãos do trigo pedido seria este, verdadeiramente astronómico: 18 quintilhões + quási 1/2 quintilhão!

E isso porque enquanto que o número das casas do taboleiro do jogo de xadrez crescia em progressão aritmética, o número de grãos de trigo crescia em progressão geométrica, ou, em outros termos, *o número de grãos do trigo é uma função exponencial do número de casas do taboleiro referido.*

No pitoresco dessa lenda se acha envolvido um dos mais interessantes problemas de Filosofia Natural — a lei exponencial governa um número vastissimo de fenómenos das mais variadas ciências experimentais.

Façamos uma rápida catalogação da expressão exponencial dêsses fenómenos, seguindo Marcel Boll: