En analogie à ce qui précède, nous désignerons par L_0 et $\overline{L}_0$ la longueur des polygones Q_0 et P_0, par F_0 et $\overline{F}_0$ leurs aires respectives. Posons également

$$D_0 = L_0^2 - 4\pi F_0 \tag{2}$$

Il est évident que

$$D - D_0 = 4\pi\,(\overline{F}_0 - \overline{F})\,. \tag{3}$$

On en déduit très simplement le théorème géométrique suivant bien connu: Si l'on choisit les arcs de Q de telle façon (désignons par Q' ce polygone bien défini formé par des arcs de cercle et circonscrit au polygone P) que le polygone Q'_0, formé par les mêmes arcs que Q', soit congruent au cercle K (K, considéré comme polygone en arcs de cercle, a la propriété (*)), on aura $D'_0, = 0$ et, d'après la formule (3)

$$\overline{F} = \overline{F}_0 - \frac{D'}{4\pi}\,; \tag{4}$$

à cause de $D' \geqq 0$, on en déduit

$$\overline{F} \leqq \overline{F}_0, \tag{5}$$

l'égalité étant réalisée dans le cas où Q' est un cercle, et seulement dans ce cas. Le fait qu'un polygone aux côtés donnés est inscrit à un cercle est donc une condition nécessaire et suffisante pour que son aire soit un maximum.

Comparons encore les déficits isopérimétriques des deux polygones en arcs de cercle Q et Q'. Selon (3) nous avons

$$D - D_0 = 4\pi\,(\overline{F}_0 - \overline{F})$$

et

$$D' - D'_0 = 4\pi\,(\overline{F}_0 - \overline{F})\,.$$

Comme $D'_0 = 0$, on en déduit

$$D = D' + D_0 \tag{6}$$

et, à cause de $D_0 \geqq 0$,

$$D \geqq D'\,. \tag{7}$$

Cela signifie que le déficit isopérimétrique D d'un polygone Q de la propriété (*), formé des arcs de cercle et circonscrit à un polygone convexe donné P, prend la plus petite valeur possible, quand Q est formé par les mêmes arcs que le cercle K circonscrit au polygone P_0, ayant les mêmes côtés que P. Cette condition est nécessaire et suffisante.

A função exponencial em Filosofia Natural

por ***Luís Freire*** *(Recife)*

Newton chamava de Filosofia Natural, expressão essa conservada pelos autores inglezes, ao que as demais escolas chamam de Física.

Aquela denominação visava mostrar iniludivelmente que se procurava a explicação dos fenomenos físicos recorrendo a métodos positivos, que tinham por cenário o campo experimental, que se processavam no seio da Natureza, pois.

E isso em contraposição às especulações apriorísticas dos filósofos que, até então, tentavam fora da Natureza a explicação dos seus próprios fenómenos.

Pode-se extender a denominação de Filosofia Natural ao conjunto explicativo da ciência experimental por inteiro — isso está de acordo com a índole da expressão, com os motivos que a fizeram adotar.

É o que faremos.

Conta-nos uma lenda árabe que, em recompensa à sua descoberta do jogo de xadrez, um sudito dum grande rei pediu *apenas* o seguinte:

Um grão de trigo sobre a primeira casa, dois sobre a segunda, quatro sobre a terceira, e nessa dupla razão até chegar a casa 64; a soma de todos os grãos de trigo que deveriam ser depositados sobre o taboleiro, seria a sua recompensa, em aparência, das mais modestas.

Ora, esse pedido representava a produção mundial de trigo durante quási 80 anos e na hipótese de serem semeados todos os continentes!

O número de grãos do trigo pedido seria este, verdadeiramente astronómico: 18 quintilhões + quási 1/2 quintilhão!

E isso porque enquanto que o número das casas do taboleiro do jogo de xadrez crescia em progressão aritmética, o número de grãos de trigo crescia em progressão geométrica, ou, em outros termos, *o número de grãos do trigo é uma função exponencial do número de casas do taboleiro referido.*

No pitoresco dessa lenda se acha envolvido um dos mais interessantes problemas de Filosofia Natural — a lei exponencial governa um número vastissimo de fenómenos das mais variadas ciências experimentais.

Façamos uma rápida catalogação da expressão exponencial dêsses fenómenos, seguindo Marcel Boll:

A pressão atmosférica é uma função exponencial da altitude;

Nas bombas de vácuo, o grau do vácuo é uma função exponencial do número de cilindradas;

No resfriamento dos corpos, a baixa de temperatura é uma função exponencial do tempo;

Ao longo de uma barra, aquecida sòmente em uma das suas extremidades, a temperatura em cada ponto é uma função exponencial da sua distância à fonte de calôr;

A luz absorvida por um corpo é uma função exponencial da espessura atravessada;

A extra-corrente de rutura, na self-indução, é uma função exponencial do tempo.

No fenómeno termoeléctrico, a emissão de electrons é uma função exponencial da temperatura;

Nas desintegrações radioactivas, o peso dos corpos, em um instante dado, é uma função exponencial do tempo contado a partir de um certo instante;

A amplitude das oscilações amortecidas é uma função exponencial do tempo;

O pH dos corpos é definido pela função exponencial inversa do inverso da concentração iónica do hidrogénio;

A lei de Fechner nos diz que a intensidade da sensação é uma função exponencial inversa da excitação;

Em cinética biológica, temos: *a*) evolução duma população *isolada* $N=N_0 e^{(n-m)t}$, sendo N o número dos individuos em um certo instante, n o coeficiente de natalidade, m o coeficiente de mortalidade. Essa equação é modificada no caso das populações muito numerosas. *b*) simbiose e parasitismo, isto é, estudo do desenvolvimento simultaneo de duas ou várias espécies vivas, em um meio limitado: a lei é ainda exponencial;

No cálculo das probabilidades, a curva de Gauss, género «curva em sino», é representada pela função dos erros de Laplace e Gauss $g(x)=e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$;

No campo da sociologia encontra-se também a função exponencial; etc, etc.

Vemos, pois, serem as leis dos mais importantes fenómenos dos mais variados domínios do conhecimento, de forma exponencial. A função exponencial como que «assimila fenómenos dispares», mostrando que, se os elementos que neles intervêm são diferentes, o seu comportamento é o mesmo, o mecanismo que os põe em acção é o mesmo.

Já Quételet, o grande estatístico belga, acreditava na universalidade da lei exponencial, a considerava como «uma norma à qual a experiência deve necessàriamente se submeter».

Na análise encontra-se a função de Mittag Leffler:

$$E_\alpha(x) = 1 + \frac{x}{\lfloor\underline{\alpha}} + \frac{x^2}{\lfloor\underline{2\alpha}} + \frac{x^3}{\lfloor\underline{3\alpha}} + \cdots$$

Ora, para $\alpha=1$, ela dá:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$

que não é senão a função exponencial e^x em série.

Daí, as oportunas palavras de Buhl, de Toulouse, em seu Curso de Análise:

«Sendo dada a imensa importância da exponencial, é de admirar que a função $E_\alpha(x)$ não tenha até aqui encontrado uma multidão de aplicações mais ou menos de igual importância. Todavia, para $\alpha=1/2$, seu papel, no cálculo das probabilidades, é já grande e tem sido assinalado».

Coube ao Prof. Francisco de Oliveira Castro, da Escola Nacional de Engenharia (Rio de Janeiro, Brasil), achar, no campo das ciências físicas, a primeira aplicação da função $E_\alpha(x)$, de Mittag Leffler.

Vejamos.

O técnico Bernard Gross, do Instituto Nacional de Tecnologia, fez cuidadosos estudos sobre «as propriedades físicas dos dieléctricos reais».

Em uma das suas comunicações sobre o assunto à Academia Brasileira de Ciências, ele estuda o «condensador anómalo no campo alternado» (Anais, 937 e 938).

Os condensadores, quando submetidos a tensões alternadas, têm a sua capacidade e condutibilidade variando com a frequência.

É, como se vê de pronto, grande a importância técnica desse fenómeno.

Gross achou que, durante os periodos de descarga ou regeneração, a diferença de potencial $U(t)$, existente entre as armaduras de um condensador anómalo, deve satisfazer à equação integro-diferencial:

$$C\frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} + \int_0^t \frac{dU}{d\tau}\varphi(t-\tau)\,d\tau + i_0(t) = 0,$$

onde C representa a capacidade do sistema, R a resistência final do mesmo, $\varphi(t)$ a função hereditária, $i_0(t)$ a intensidade da corrente anómala proveniente das variações de tensão.

A integração rigorosa da equação funcional de Gross, foi feita por Oliveira Castro, seguindo a teoria das equações integrais de Volterra.

Considerando dU/dt como incógnita, reduziu Castro a integração daquela equação funcional a de uma equação integral de Volterra de 2.ª espécie, cujo núcleo é uma função das conhecidas pela denominação de «funções de classe α».

Aos núcleos dessa forma se aplicam os métodos de integração de Volterra.

A solução da equação funcional de Gross se reduz, obtida a solução da equação de Volterra, a uma simples quadratura.

Esse o caminho seguido por Oliveira Castro (Anais da Academia Brasileira de Ciências, Tomo XI, 1939, n.º 2).

No caso de interesse teórico, do condensador anómalo perfeitamente isolado, faz-se R tender para ∞.

Assim, o termo U/R desaparece da equação funcional em questão, e o núcleo resolvente da equação integral de Volterra se simplifica, apresentando notável relação com a função de Mittag-Leffler.

Seguindo a memória de Oliveira Castro, $\varphi(t)$ se exprime pela função de Schweidler:

$$\varphi(t) = \beta t - \alpha\ (0<\alpha<1)\,,\ (\beta>0)\,;$$

para simplificar põe-se $k=\beta R\,, p=1-\alpha\,, \lambda=1/RC$,

$$K(\tau, t) = \lambda\,[1 + k\,(t-\tau)\,p - 1]\,,$$
$$f(t) = -\,[\lambda U(0) + i_0(t)/C]\,.$$

Assim, a equação de Gross torna-se, fazendo $dU/dt= =\psi(t)$:

$$\psi(t) + \int_0 \psi(\tau)\,K(\tau, t)\,d\tau = f(t)\,.$$

É a equação integral de Volterra de 2.ª espécie; a função $K(\tau, t)$ é o núcleo dessa equação integral.

Iterando os núcleos, tem-se:

$$K^{(1)}(\tau, t) = -\,K(\tau, t)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$K^{(h)}(\tau, t) = \int_\tau^t K^{(h-1)}(\tau, s)\,K^{(1)}(s, t)\,ds\,.$$

$\sum_{h=1}^{\infty} K^{(h)}(\tau, t)$ converge absoluta e uniformemente em t, para uma função $S(\tau, t)$, continua em t, que é o núcleo resolvente da equação integral.

No caso do condensador anómalo perfeitamente isolado, o núcleo resolvente da equação de Volterra é:

$$G = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-X)^h}{\Gamma(hp+1)}\,,$$

Γ sendo a função euleriana de 2.ª espécie e pondo, para simplificar,

$$X = \beta/C\,.\,\Gamma(p)\,(t-s)^p\,.$$

Ora, a função $E_\alpha(X)$, de Mittag Leffler, nos dá:

$$E_\alpha(X) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{X^h}{\Gamma(h\alpha+1)}\,.$$

Portanto: $G=E_p(-X)$.

Essa a relação entre $E_\alpha(X)$ e G entre a função de Mittag Leffler e o núcleo resolvente da equação de Volterra para o caso considerado dos fenómenos físicos dos dielétricos reais.

A física dos dielétricos reais se comporta, pois, segundo a estrutura analítica da função de Mittag Leffler.

Equivalência de poliedros

por ***José da Silva Paulo***

Em 1900, entre os célebres 21 problemas de Paris, propoz Hilbert a seguinte questão:

Todos os poliedros de igual volume são equivalentes?

A equivalência aqui era entendida no seguinte sentido: *dois poliedros dizem-se equivalentes se é possível decompô-los em poliedros elementares congruentes entre si dois a dois.*

Como se sabe, o problema análogo no plano é sempre soluvel, isto é, dados dois polígonos de igual área é sempre possível decompô-los em polígonos elementares (em particular triângulos) congruentes entre si dois a dois.

É baseado nesta propriedade que se pode construir uma teoria das áreas dos polígonos planos sem recorrer aos métodos infinitesimais. No espaço no entanto todos os esforços do subtil espírito grego falharam na resolução de problema análogo para os poliedros.

Em 1896, M. J. M. Hill, professor de matemática do University College de Londres, publicava nos Proceedings of London Mathematical Society, vol. XXVII, o artigo: *Determinação do volume de certas espécies de tetraedros[8] sem o emprego do método dos limites*, que veio pôr outra vez o problema que preocupara os gregos e que o cálculo infinitesimal tinha, mais ou menos, colocado em plano apagado. Este artigo de Hill vem dar relevo ao problema posto por Hilbert.

Foi M. Dehn, discípulo de Hilbert, quem, em 1902, nos Math. Ann. 55, pp 465-468, deu solução negativa ao problema. Demonstrou então que *existem poliedros com o mesmo volume que não são equivalentes.*