Aos núcleos dessa forma se aplicam os métodos de integração de Volterra.

A solução da equação funcional de Gross se reduz, obtida a solução da equação de Volterra, a uma simples quadratura.

Esse o caminho seguido por Oliveira Castro (Anais da Academia Brasileira de Ciências, Tomo XI, 1939, n.º 2).

No caso de interesse teórico, do condensador anómalo perfeitamente isolado, faz-se R tender para ∞.

Assim, o termo U/R desaparece da equação funcional em questão, e o núcleo resolvente da equação integral de Volterra se simplifica, apresentando notável relação com a função de Mittag-Leffler.

Seguindo a memória de Oliveira Castro, $\varphi(t)$ se exprime pela função de Schweidler:

$$\varphi(t)=\beta t-\alpha\ (0<\alpha<1)\,,\ (\beta>0)\,;$$

para simplificar põe-se $k=\beta R\,, p=1-\alpha\,, \lambda=1/RC$,

$$K(\tau,t)=\lambda\,[1+k\,(t-\tau)\,p-1]\,,$$
$$f(t)=-\,[\lambda U(0)+i_0(t)/C]\,.$$

Assim, a equação de Gross torna-se, fazendo $dU/dt=\psi(t)$:

$$\psi(t)+\int_0 \psi(\tau)\,K(\tau,t)\,d\tau=f(t)\,.$$

É a equação integral de Volterra de 2.ª espécie; a função $K(\tau,t)$ é o núcleo dessa equação integral.

Iterando os núcleos, tem-se:

$$K^{(1)}(\tau,t)=-K(\tau,t)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K^{(h)}(\tau,t)=\int_\tau^t K^{(h-1)}(\tau,s)\,K^{(1)}(s,t)\,ds\,.$$

$\sum_{h=1}^{\infty} K^{(h)}(\tau,t)$ converge absoluta e uniformemente em t, para uma função $S(\tau,t)$, contínua em t, que é o núcleo resolvente da equação integral.

No caso do condensador anómalo perfeitamente isolado, o núcleo resolvente da equação de Volterra é:

$$G=1+\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(-X)^h}{\Gamma(hp+1)}\,,$$

Γ sendo a função euleriana de 2.ª espécie e pondo, para simplificar,

$$X=\beta/C\,.\,\Gamma(p)\,(t-s)^p\,.$$

Ora, a função $E_\alpha(X)$, de Mittag Leffler, nos dá:

$$E_\alpha(X)=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{X^h}{\Gamma(h\alpha+1)}\,.$$

Portanto: $G=E_p(-X)$.

Essa a relação entre $E_\alpha(X)$ e G entre a função de Mittag Leffler e o núcleo resolvente da equação de Volterra para o caso considerado dos fenómenos físicos dos dielétricos reais.

A física dos dielétricos reais se comporta, pois, segundo a estrutura analítica da função de Mittag Leffler.

Equivalência de poliedros

*por **José da Silva Paulo***

Em 1900, entre os célebres 21 problemas de Paris, propoz Hilbert a seguinte questão:

Todos os poliedros de igual volume são equivalentes?

A equivalência aqui era entendida no seguinte sentido: *dois poliedros dizem-se equivalentes se é possível decompô-los em poliedros elementares congruentes entre si dois a dois.*

Como se sabe, o problema análogo no plano é sempre soluvel, isto é, dados dois polígonos de igual área é sempre possível decompô-los em polígonos elementares (em particular triângulos) congruentes entre si dois a dois.

É baseado nesta propriedade que se pode construir uma teoria das áreas dos polígonos planos sem recorrer aos métodos infinitesimais. No espaço no entanto todos os esforços do subtil espírito grego falharam na resolução de problema análogo para os poliedros.

Em 1896, M. J. M. Hill, professor de matemática do University College de Londres, publicava nos Proceedings of London Mathematical Society, vol. XXVII, o artigo: *Determinação do volume de certas espécies de tetraedros sem o emprego do método dos limites*, que veio pôr outra vez o problema que preocupara os gregos e que o cálculo infinitesimal tinha, mais ou menos, colocado em plano apagado. Este artigo de Hill vem dar relevo ao problema posto por Hilbert.

Foi M. Dehn, discípulo de Hilbert, quem, em 1902, nos Math. Ann. 55, pp 465-468, deu solução negativa ao problema. Demonstrou então que *existem poliedros com o mesmo volume que não são equivalentes.*

A sua demonstração é complicada, e nem mesmo as demonstrações simplificadas de Kagan e de Amaldi são elementares.

Em 1925, na Revista Matemática Hispano-Americana, Rey Pastor publicou a demonstração que a seguir se dá que é de facto acessível e sem dúvida muito mais simples que qualquer das anteriormente citadas.

Iremos então demonstrar o teorema de Dehn:

«*Se dois poliedros* P *e* P' *são equivalentes então as somas das medidas dos seus diedros, alguns dos quais serão, eventualmente, contados um certo número de vezes, diferem de um número inteiro de ângulos rasos.*

Para isso consideremos primeiro uma generalização dos conceitos de polígono plano e de poliedro. Chamaremos ainda polígono plano àquele que tenha dois ou mais lados contíguos em linha recta e poliedro o que tenha duas ou mais faces contíguas sobre o mesmo plano ou duas ou mais arestas contíguas sobre a mesma recta. Assim se, por exemplo, intercalarmos num lado dum triângulo um novo vértice obteremos um quadrilátero com um ângulo raso. Do mesmo modo se nas arestas de um poliedro se intercalam novos vértices obtém-se um poliedro generalizado com o mesmo número de faces mas mais arestas e vértices que o primeiro; e se numa face se intercala um vértice que se une com dois ou mais vértices dessa face, obtém-se um poliedro com mais faces, arestas e vértices e no qual alguns diedros são rasos. Mas deve-se notar desde já que a fórmula de Euler para os poliedros convexos $(F+V=A+2)$, bem como o teorema: *a soma das medidas dos ângulos internos dum polígono plano de* n *lados é igual a* (n—2) *ângulos rasos*, para os polígonos simples, são válidos para estes poliedros e polígonos generalizados daqueles.

Para os polígonos o facto é imediatamente visível. Para os poliedros verifiquemo-lo em casos particulares. Consideremos um tetraedro em cada aresta do qual se intercala um novo vértice; teremos então 10 vértices, 12 arestas e 4 faces. Se considerarmos um cubo e em cada uma das faces intercalarmos um vértice que se une com todos os vértices dessa face obtém-se um poliedro generalizado com 24 faces, 14 vértices e 36 arestas, existindo 24 ângulos diedros rasos. Em qualquer destes dois exemplos a fórmula de Euler é verificada.

Consideremos agora dois poliedros P e P' equivalentes, isto é, tais que

$$P=P_1+P_2+\cdots+P_n \quad \text{e} \quad P'=P'_1+P'_2+\cdots+P'_n$$

de tal modo que $P_i \equiv P'_i$ para todos os valores de i, quere dizer, de modo que os poliedros componentes P_i e P'_i sejam congruentes entre si dois a dois.

Consideremos um qualquer poliedro componente de P, por exemplo P_1. Os poliedros contiguos a P_1 na decomposição de P tem alguns vértices e arestas que coincidem com os de P_1, ou situados nas arestas ou nas faces de P_1; todos estes vértices e arestas os agregamos a P_1 formando assim um poliedro generalizado. Anàlogamente completaremos P'_1 com os vértices e arestas dos poliedros que lhe são contíguos na decomposição de P'. Os poliedros P_1 e P'_1 que eram congruentes deixarão, em geral, de o ser depois de lhe agregarmos os novos vértices e arestas, pois deixarão de ter igual número de vértices, de arestas e de faces. Pode no entanto restabelecer-se a congruência intercalando em cada um deles os vértices e arestas novos que correspondem ao outro. Se assim procedermos para todos os pares de poliedros componentes de P e P' conseguiremos uma decomposição em que os poliedros contíguos tem arestas comuns completas.

A fig. 1 representa um caso muito simples no qual se põem em evidência, nos poliedros componentes os os vértices e arestas que se agregam a cada um.

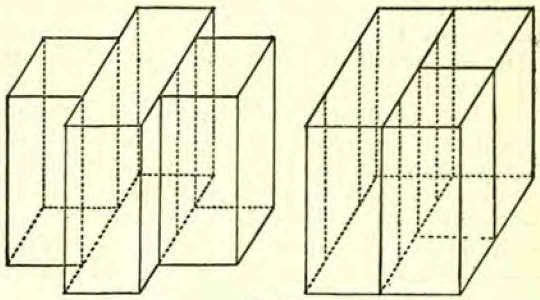


Fig. 1

Como cada poliedro P_i tem todos os seus diedros iguais aos diedros de P'_i a soma dos diedros dos poliedros P_i é igual à soma dos diedros dos poliedros P'_i.

Consideremos então o poliedro P.

As arestas dos seus poliedros componentes P_i são de três classes: *a*) *arestas que pertencem a uma aresta de* P; *b*) *arestas situadas em faces de* P; *c*) *arestas situadas no interior de* P.

Para cada aresta do tipo *a*) a soma dos diedros dos poliedros P_i a que pertença é precisamente o diedro de P (veja fig. 2 aresta AB ou CD) e este diedro aparecerá contado tantas vezes quantas as arestas elementares que, componham a aresta de P.

Para cada aresta do tipo *b*) [por exemplo EF na fig. 2], a soma dos diedros dos poliedros P_i a que a aresta pertence é um *ângulo raso.*

Finalmente para cada aresta do tipo *c*) [por exemplo GH na fig. 2] a soma dos diedros, dos poliedros componentes aos quais a aresta pertence, é igual a *dois ângulos rasos.*

Daqui resulta que a soma dos diedros dos poliedros componentes P_i é igual à soma dos diedros do poliedro total P (eventualmente repetindo-se algum diedro várias vezes) mais um número inteiro de ângulos rasos. Quere dizer, as duas somas são congruentes para o módulo π.

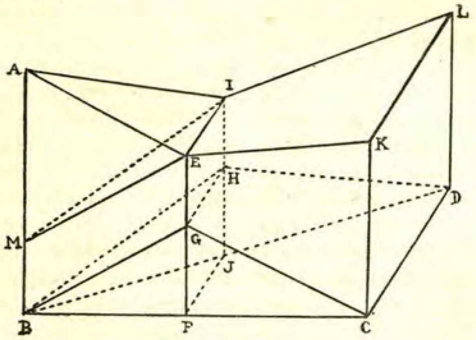


Fig. 2

Coisa análoga se passa com o poliedro P' e seus componentes P'_i.

Da congruência dos poliedros P_i e P'_i resulta imediatamente por transitividade o *teorema.*

Como aplicação demonstremos que o tetraedro regular *não é equivalente* a um cubo de igual volume.

De facto a soma dos diedros dum tetraedro regular, repetindo-se eventualmente alguns deles, é $K\cdot\alpha$, onde α é tal que $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{8}$ e K um inteiro, e a soma dos diedros do cubo, algum repetido eventualmente, é $K'\cdot\pi/2$; então pelo teorema de Dehn será

$$K\cdot\alpha\equiv K'\cdot\pi/2 \pmod{\pi}$$

donde

$$\operatorname{tg} K\alpha=\operatorname{tg}(K'\cdot\pi/2)$$

ou se fôr $K/K'=p/q$ (p e q primos entre si) será

$$\operatorname{tg} p\alpha=\operatorname{tg} q'\cdot\pi/2\,.$$

Mostremos que esta igualdade é impossível. Como se sabe

$$\operatorname{tg} p\alpha=\frac{p\cdot\operatorname{tg}\alpha-\binom{p}{3}\operatorname{tg}^3\alpha+\binom{p}{5}\operatorname{tg}^5\alpha-\cdots}{1-\binom{p}{2}\operatorname{tg}^2\alpha+\binom{p}{4}\operatorname{tg}^4\alpha-\cdots}$$

e como $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{8}$ será

$$\operatorname{tg} p\alpha=\sqrt{8}\cdot\frac{p-\binom{p}{3}8+\binom{p}{5}8^2-\cdots}{1-\binom{p}{2}8+\binom{p}{4}8^2-\cdots}$$

Então se q é par $\operatorname{tg} p\alpha=\operatorname{tg} q\cdot\pi/2=0$ donde

$$p-\binom{p}{3}8+\binom{p}{5}8^2-\cdots=0$$

e portanto $p=\dot{8}$, o que é impossível visto p e q serem primos entre si.

Se q é impar então $\operatorname{tg} p\alpha=\operatorname{tg} q\,\pi/2=\pm\infty$ e por isso

$$1-\binom{p}{2}8+\binom{p}{4}8^2-\cdots=0$$

igualdade manifestamente impossível.

É então *impossível* decompor o tetraedro regular e o cubo de igual volume, em poliedros elementares congruentes entre si dois a dois, o que resolve pela negativa o problema de Hilbert.

Uma aplicação da Geometria Projectiva ao problema das imagens eléctricas

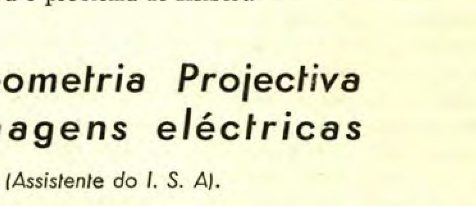
por **Fernando R. Dias Agudo** (*Assistente do I. S. A*).

O estudo da influência electrostática exercida por uma carga pontual Q sobre um condutor esférico ligado ao solo (quando mergulhados num dieléctrico de constante dieléctrica ε) levou Kelvin a substituir a esfera condutora por uma esfera do mesmo dieléctrico, na qual determinaria a posição de uma outra carga pontual Q' (imagem eléctrica da primeira) tal que fosse nulo o potencial devido a Q e Q' em todos os pontos da esfera (visto que se supõe ligada ao solo).

Designando por p e q as distâncias de um ponto P da esfera a Q e Q', respectivamente, deve ter-se portanto

$$\frac{Q}{\varepsilon p}+\frac{Q'}{\varepsilon q}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{Q'}{Q}=-\frac{q}{p}$$

e o problema que se põe é o de saber se será de facto possível encontrar uma carga Q' que verifique a relação anterior para qualquer ponto da esfera.



Raciocinando para a secção determinada por qualquer plano diametral que passe por Q, a Geometria Projectiva responde-nos afirmativamente, uma vez