Daqui resulta que a soma dos diedros dos poliedros componentes P_i é igual à soma dos diedros do poliedro total P (eventualmente repetindo-se algum diedro várias vezes) mais um número inteiro de ângulos rasos. Quere dizer, as duas somas são congruentes para o módulo π.

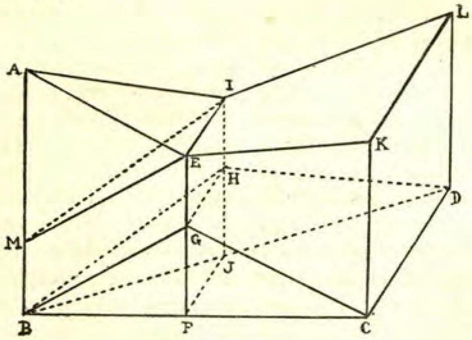


Fig. 2

Coisa análoga se passa com o poliedro P' e seus componentes P'_i.

Da congruência dos poliedros P_i e P'_i resulta imediatamente por transitividade o *teorema.*

Como aplicação demonstremos que o tetraedro regular *não é equivalente* a um cubo de igual volume.

De facto a soma dos diedros dum tetraedro regular, repetindo-se eventualmente alguns deles, é $K\cdot\alpha$, onde α é tal que $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{8}$ e K um inteiro, e a soma dos diedros do cubo, algum repetido eventualmente, é $K'\cdot\pi/_2$; então pelo teorema de Dehn será

$$K\cdot\alpha\equiv K'\cdot\pi/_2 \pmod{\pi}$$

donde

$$\operatorname{tg} K\alpha=\operatorname{tg}(K'\cdot\pi/2)$$

ou se fôr $K/K'=p/q$ (p e q primos entre si) será

$$\operatorname{tg} p\alpha=\operatorname{tg} q'\cdot\pi/2\,.$$

Mostremos que esta igualdade é impossível. Como se sabe

$$\operatorname{tg} p\alpha=\frac{p\cdot\operatorname{tg}\alpha-\binom{p}{3}\operatorname{tg}^3\alpha+\binom{p}{5}\operatorname{tg}^5\alpha-\cdots}{1-\binom{p}{2}\operatorname{tg}^2\alpha+\binom{p}{4}\operatorname{tg}^4\alpha-\cdots}$$

e como $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{8}$ será

$$\operatorname{tg} p\alpha=\sqrt{8}\cdot\frac{p-\binom{p}{3}8+\binom{p}{5}8^2-\cdots}{1-\binom{p}{2}8+\binom{p}{4}8^2-\cdots}$$

Então se q é par $\operatorname{tg} p\alpha=\operatorname{tg} q\cdot\pi/2=0$ donde

$$p-\binom{p}{3}8+\binom{p}{5}8^2-\cdots=0$$

e portanto $p=\dot{8}$, o que é impossível visto p e q serem primos entre si.

Se q é impar então $\operatorname{tg} p\alpha=\operatorname{tg} q\,\pi/2=\pm\infty$ e por isso

$$1-\binom{p}{2}8+\binom{p}{4}8^2-\cdots=0$$

igualdade manifestamente impossível.

É então *impossível* decompor o tetraedro regular e o cubo de igual volume, em poliedros elementares congruentes entre si dois a dois, o que resolve pela negativa o problema de Hilbert.

Uma aplicação da Geometria Projectiva ao problema das imagens eléctricas

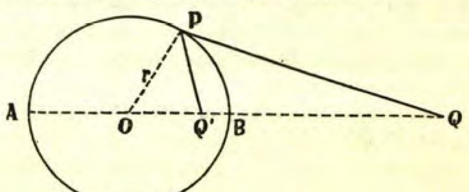
por ***Fernando R. Dias Agudo*** *(Assistente do I. S. A).*

O estudo da influência electrostática exercida por uma carga pontual Q sobre um condutor esférico ligado ao solo (quando mergulhados num dieléctrico de constante dieléctrica ε) levou Kelvin a substituir a esfera condutora por uma esfera do mesmo dieléctrico, na qual determinaria a posição de uma outra carga pontual Q' (imagem eléctrica da primeira) tal que fosse nulo o potencial devido a Q e Q' em todos os pontos da esfera (visto que se supõe ligada ao solo).

Designando por p e q as distâncias de um ponto P da esfera a Q e Q', respectivamente, deve ter-se portanto

$$\frac{Q}{\varepsilon p}+\frac{Q'}{\varepsilon q}=0 \quad \text{ou} \quad \frac{Q'}{Q}=-\frac{q}{p}$$

e o problema que se põe é o de saber se será de facto possível encontrar uma carga Q' que verifique a relação anterior para qualquer ponto da esfera.



Raciocinando para a secção determinada por qualquer plano diametral que passe por Q, a Geometria Projectiva responde-nos afirmativamente, uma vez que o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a dois pontos fixos estão numa razão constante é precisamente a circunferência de centro O cujo diâmetro $\overline{AB}$ divide harmònicamente o segmento $\overline{Q'}\,\overline{Q}$ dos dois pontos fixos (circunferência de Apolónio).

E de $(AB\,Q'\,Q)=-1$ resulta ainda, como se sabe do estudo das pontuais harmónicas, $\overline{OB}^2=\overline{OQ'}$, $\overline{OQ}=d'\,d$, donde $d'=r^2/d$.

Em particular,

$$\frac{\overline{AQ'}}{\overline{AQ}}=\frac{r+d'}{r+d}=\frac{r\,(1+r/d)}{d\,(1+r/d)}=\frac{r}{d},$$

e, por conseguinte, $Q'=-Qr/d$.

Obtém-se assim o valor e a posição da carga Q' que, juntamente com Q, permite calcular o campo e o potencial em todos os pontos do dieléctrico exteriores à esfera condutora.

ASTRONOMIA

O PRETENSO PROBLEMA DA HORA NA ACTUALIDADE

O astrónomo não terá possibilidade, por muito tempo ainda, de reconhecer sequer esse milésimo do segundo que dizem ter-lhe oferecido a Radiotécnica

por ***A. Baptista dos Santos*** *(Astrónomo de 1.ª classe do Observatório Astronómico de Lisboa)*

Inicia-se entre nós, segundo parece, a propaganda entusiástica da obtenção radio-astronómica do milésimo do segundo. Diz-se, e escreve-se mesmo, mercê provàvelmente de influências estrangeiras mais animosas e por isso menos reflectidas, ou, talvez melhor, por errada interpretação do que se tem dito e escrito lá por fora, que em matéria de determinação e conservação da hora *entrámos na era do milésimo do segundo* — tal qual se disse da bomba atómica.

E isto se afirma porque possuimos, também se diz, um guarda-tempo, o relógio de quartzo, que nos garante esse milésimo na sua preciosa marcha e porque os astrónomos melhoraram consideràvelmente os seus instrumentos de observação e estão hoje de posse de um novo registador do tempo de extraordinária precisão e... velocidade porque nele *o segundo tem meio metro de comprimento.*

Com estas razões se procura, em conferências, nos jornais e em revistas técnicas, interessar professos e entusiasmar leigos, prometendo a estes o milésimo do segundo — àqueles seria menos fácil — como se da sua posse pudesse resultar-lhes uma melhoria certa das condições de vida.

Não podemos concordar com a afirmação e dizêmo-lo com mágoa porque a aquisição real do milésimo do segundo seria certamente de incalculável valor na investigação astronómica e, segundo parece, na Física Electrónica moderna.

E não podemos concordar porque as razões apresentadas não bastam para nela crermos e é até à afirmação contrária — *estamos longe, ainda, de atingir artronòmicamente o milésimo do segundo* — que nos conduz a análise fria do conjunto de tudo quanto possa influir na determinação exacta da hora; além do que se nos afigura bem discutível, por enquanto, que os astrónomos tenham melhorado consideràvelmente os instrumentos de observação.

Em poucas e por outras palavras poderíamos apresentar as razões da nossa discordância se nos dirigíssemos apenas aos da especialidade, mas, porque o assunto é já do domínio público nacional e nos parece fácil expô-lo de modo que todos o entendam, para todos escrevemos na esperança de que seremos compreendidos.

*

Coube sempre ao astrónomo, em todos os tempos, a determinação exacta da hora porque só ele sabe e pode ler o padrão clássico de medida do tempo, esse gigantesco relógio natural que é a Terra animada do seu movimento de rotação.

A Mecânica ensinou-lhe que este movimento seria rigorosamente uniforme — condição indispensável a um padrão de medida do tempo — se a Terra fosse um sólido perfeitamente livre e invariável; e se ele sabe, por considerações também de ordem mecânica, que esta última condição se não pode realizar rigorosamente, a verdade é que determinados os defeitos de uniformidade, por comparação com outros relógios naturais — os movimentos dos planetas em torno do Sol —, os valores obtidos não justificam o abandono do padrão.

A condição de uniformidade não tem sido coisa que possa estabelecer-se por absoluto no laboratório e, deste modo, qualquer relógio construido pelo homem só tem sido considerado uniforme se, em relação ao padrão natural, ele se atrazar ou adiantar sempre da mesma quantidade em intervalos de tempo iguais.