Mas voltemos ao nosso raciocínio. Admitamos que na medida do primeiro intervalo de setenta dias determinamos, pela observação, a marcha positiva de um milésimo do segundo para o nosso cronómetro; ele atraza-se, portanto, diàriamente de um milésimo do segundo. Como só voltaremos a observar passados outros setenta dias, o estado do cronómetro durante o intervalo seguinte terá de ser determinado por extrapolação e para o obtermos em certo dia nó somaremos um milésimo do segundo ao do dia anterior. Imediatamente antes da observação seguinte nós teremos adicionado setenta milésimos ao estado determinado pela observação anterior. Se na medida do segundo intervalo tivermos errado da mesma quantidade e para menos, como é natural segundo as leis do acaso, verificaremos que o estado determinado por extrapolação requer a correção de dezassete centésimos do segundo.

Quer dizer: a observação indica-nos que tínhamos o relógio errado de cento e setenta milésimos. Que isto nos suceda irremediavelmente em plena era do milésimo é coisa que não cabe na cabeça de ninguém.

E afinal, todas estas conclusões são ilusórias porque de antemão supozemos que é nula a marcha do cronómetro.

Conclusão real, verdadeira, só pode ser esta: *No estado actual da Astronomia é impossível reconhecer pela observação que as irregularidades da marcha dum cronómetro são da ordem do milesimo do segundo.*

E por muito tempo ainda se manterá a situação visto que a revisão das ascensões rectas e a determinação rigorosa dos movimentos próprios das estrelas não é tarefa de meia dúzia de anos. Quanto a refracções laterais cremos bem que nem mesmo se sabe por onde se lhes pegar.

O problema da hora na actualidade é, pois, o de ontem e será o de amanhã porque não são o relógio de quartzo e o instrumento moderno que lhe dão a solução.

Como é então que com tanta facilidade e convicção, que só o entusiasmo irreflectido pode justificar, se afirma que entrámos na era do milésimo do segundo?

Haverá algum processo alheio à Astronomia, processo de laboratório que desconheçamos, que permita reconhecer a rigorosa uniformidade do relógio de quarto e determinar rigorosamente a sua marcha em relação à rotação da Terra, já que por esta temos regulado o calendário e a nossa vida toda? Dispensa de facto esse relógio o «*controle*» da Astronomia?

Em caso afirmativo, parece naturalmente indicado o abandono do padrão clássico e a sua substituição pelo padrão de laboratório. Mas haverá alguem que se atreva a fazê-lo sem recear sèriamente ter de constatar, passado algum tempo, que, por exemplo, o dia de S. Martinho indicado pelo seu padrão lhe cai exactamente em verdadeiro I°. de Dezembro de tão grata comemoração para os portugueses?

Lisboa, Maio de 1948.

PEDAGOGIA

INSEGNARE COSE VECCHIE IN MODO NUOVO

di ***Umberto Forti*** (Milano)

Da tempo lo spirito dogmatico, che aspirava a fare del sapere una collezione di «nozioni», è stato detronizzato. Noi cerchiamo di cogliere le dottrine ed i fatti nella loro genesi e nel loro significato. La storia, la poesia, la filosofia, vogliamo studiarle al vero, cogliendone i valori nel loro stesso prodursi, nell'atto unico e — in certo senso — supremo in cui si formano, e prendono vita, e parlano al nostro spirito. Nè è da rimproverare ai docenti di matematica di rimanere indietro in questo moto della coscienza moderna. Ma quà e là, nella matematica come in ogni altro dominio del sapere, vi sono ancora «nozioni» così semplici e di cosi scarso rilievo — vere cenerentole della scienza — che passando accanto ad esse noi non vi gettiamo più di uno sguardo sbadato, per puro obbligo di ufficio.

Se una volta però, noi ci soffermiamo a pensarle, anche queste nozioni ci appaiono interessanti, e presto osserviamo che esse sono tanto vive quanto altre, a cui siamo soliti dedicare meno affrettata considerazione. Ma per le prime occorre propiziare il genio delle piccole cose, se non addirittura quell'esprit des infiniments petits che un Ministro poco benevolo rimproverava al grande Newton. E noi lo propiziamo volentieri a favore di un vecchio e modesto argomento: *Il quadrato del binomio.* La prima osservazione è che esso, insieme al prodotto notevole, non è che un caso particolare di un'operazione più generale: e che dunque converrebbe che come tale venisse insegnato, per ragioni che accenneremo poco appresso, e che — del resto — è facile intuire.

I vari libri di algebra elementare indicano quà e là questa operazione più generale, ma non le danno una speciale denominazione, ciò che è in contrasto tanto con la sua importanza, quanto con l'opportunità che vi è, invece, di inciderla nella memoria del principiante.

Proporrò dunque di denominarla *prodotto abbreviato.* [1]

Il lettore ha già compreso che tale operazione è il ben noto prodotto

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab\,.$$

Se $a=b$, si ha $x^2+(a+a)\,x+a^2$, cioè il quadrato del binomio; se invece $b=-a$ si ha $x^2+(a-a)\,x-a^2$, cioè il prodotto notevole.

Coordinare queste nozioni nel modo anzidetto, sarebbe molto opportuno, in primo luogo per abituare il principiante a unificare le sue formule scorgendone le relazioni, e poi anche perchè fissare l'attenzione sul prodotto abbreviato significa fissarla su una formula chiave. A parte infatti il piccolo vantaggio che deriva dall'abituarsi a scrivere sempre in tre termini quel prodotto, ciò che più conta è l'uso dell'operazione inversa, cioè la scomposizione in fattori del trinomio di 2° grado. Semplici applicazioni fatte ad occhio, come $x^2-5x+6=(x-2)\,(x-3)$ costituiranno una efficace preparazione all'equazione di 2° grado, e allo studio delle relazioni fra coefficienti e radici. Non è detto che tale studio debba assolutamente presentarsi in modo indipendente da tali nozioni, e solo a grande distanza di tempo, quando l'alunno — per mancanza di memoria — non è più in grado di scorgere la relazione fra i due argomenti. Ma di ciò vedremo più oltre.

Ora converrà invece notare che lo studio del prodotto abbreviato può essere esteso a tre o più fattori conducendo ad intravedere punti di vista nuovi, e risultati brillanti, atti a sviluppare ed a soddisfare quel gusto per la vera ricerca matematica che non manca quasi mai in un giovinetto intelligente, e che — ad ogni modo — è la qualità più preziosa che noi cerchiamo di suscitare.

Spesso, per naturale desiderio di completezza, noi siamo indotti ad introdurre le successive potenze del binomio mediante il celebre *triangolo* detto di Tartaglia, perchè edito da questo grande matematico italiano nel suo *General Trattato di numeri e misure* (1556). Notiamo di passata che quel triangolo era già noto in Oriente alcuni secoli prima, tanto che un enunciato se ne trova nel *Prezioso specchio dei quattro elementi*, del cinese Tchou-Che-Kie (1303).

Ora del triangolo stesso noi diamo, in genere, una formulazione astratta e dogmatica che non ne chiarisce in alcun modo la genesi, ciò che è contrario a quello spirito di inventività cui sopra si è accennato, e che soprattutto interessa al vero maestro. E del resto, anche ai più, e giustamente, che cosa importa che i coefficienti di una potenza siano tali o tal'altri? Ma, al contrario, non è mai priva di interesse quella ricerca attiva che portandoci nel vivo del problema ci mostra come la formula viene a costituirsi in base alle stesse leggi fondamentali del calcolo, per cui la formula stessa non ti sta più avanti nella sua vuota esteriorità, ma si inserisce organicamente nel tutto.

A ciò si giunge in modo molto semplice estendendo appunto il *prodotto abbreviato*, e fornendo così, naturalmente, una prima introduzione al concetto di combinazione, secondo la via più piana ed interessante, che è quella stessa della evoluzione storica.

Sarà facile infatti comprendere che — nel caso di tre fattori — il prodotto abbreviato diviene

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c) = x^3 + (a+b+c)\,x^2 + \\ + (ab+ac+bc)\,x + abc$$

con le combinazioni a uno a uno, a due a due, a tre a tre delle lettere a, b, c, ed ecco così aprirsi alla mente del principiante un punto di vista nuovo, capace di chiarire un campo che appariva confuso e imprevedibile. Opportunissimo sarà spiegare il perchè di tale struttura singolare, osservando che in quella moltiplicazione occorre moltiplicare fra loro tanti singoli termini quanti sono i fattori (e cioè x per x per x, poi x per x per c, ecc.); ciò che risulterá forse più chiaro servendosi anche del passagio intermedio $(x+c)\,[x^2+(a+b)\,x+ab]$. La ricerca può essere portata facilmente anche sul prodotto di quattro o cinque fattori $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)$, ecc. e la notazione già usata dal Leibniz riuscirà molto opportuna per riassumerne i risultati:

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c) = x^3 + \begin{array}{r|l} a & x + ab \\ b & \end{array}$$

$$(x+a)\,(x+b) = x^2 + \begin{array}{r|r|l} a & x^2 + ab & x + abc \\ b & ac & \\ c & bc & \end{array}$$

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d) = x^4 + \begin{array}{r|r|l} a & x^3 + ab & x^2 + \\ b & ac & \\ c & ad & \\ d & bc & \\ & bd & \\ & cd & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} +\,abc & x + abcd \\ abd & \\ acd & \\ bcd & \end{array}$$

[1] Come io stesso ho fatto nei miei trattati di *Algebra* (Torino, Paravia, e Milano, Garzanti) nonchè nei miei volumetti *Il Primo libro di Algebra* (Carabba, Lanciano) *Nel Mondo di Diofanto* (Carabba) e *Capire l'Algebra* (Pin, Varese).

Nulla esclude che a questo punto possa accennarsi ai noti simboli $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \cdots$ che indicano i numeri delle combinazioni degli n elementi a uno a uno, a due a due, ... pur notando che in questo caso le combinazioni sono — in pari tempo — moltiplicazioni.

Per il nostro scopo basta ora porre:

$$a = b = c = d = e$$

per avere subito:

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4,$$
$$(x+a)^5 = \cdots$$

da cui è, infine, facile ricavare la trascrizione del triangolo di Tartaglia, e le regole di formazione che vi si riferiscono.

Oggi che il calcolo delle probabilità acquista sempre maggiore importanza, una breve parentesi su questo punto potrebbe tentare più di un docente. A noi è capitato più di una volta di vedere a questo punto un'intera classe alzarsi in piedi per non lasciarsi sfuggire il numero di combinazioni di quattro giocatori di *scopa* che possono formare otto amici, o il numero di ambi (o di terni) che possono formarsi con i cinque numeri estratti al Lotto, e quello degli ambi (o terni) che possono formarsi con i totali *novanta*, e la conseguente probabilità di vincere (1:11748 per il terno, com'è noto), e *il vantaggio* che l'Erario ne trae, e i naturali accenni alla *legge dei grandi numeri*, e via dicendo.

Ed ora un'ultima osservazione:

Si giudicherebbe un mediocre maestro quello che insegnasse la tavola pitagorica solo per prodotti, senza insistere ugualmente sulla operazione inversa.

Avviene spesso però di non insistere abbastanza sulle operazioni correlative al quadrato del binomio come: scrivere sotto forma di quadrato perfetto un dato trinomio (se possibile), o completare un binomio in modo da renderlo quadrato perfetto. Il risultato è che l'alunno messo — più tardi — di fronte ai semplici processi di calcolo che conducono alla formula dell'equazione di 2° grado o alla ricerca delle coordinate del centro di una circonferenza di data equazione, o alla stessa equazione di una parabola, e via dicendo, ha l'impressione di trovarsi di fronte a procedimenti artificiosi che richiedono un notevole intervento della memoria e non riflette che tutto si riduce ad un procedimento naturale e ben noto fino dalle prime tappe dell'algebra. Se invece il completamento del quadrato fosse stato fissato nella mente al momento opportuno, l'alunno non avrebbe ora quasi nulla di nuovo da imparare, il suo sforzo sarebbe quasi nullo, e il risultato ben maggiore perchè egli potrebbe rammentare indefinitamente quelle nozioni, e se ne renderebbe conto in modo più profondo.

Per contro, sfogliando vari trattati di algebra, non accade nemmeno di incontrare un enunciato esplicito della regoletta che si segue completando il quadrato, sicchè lo scolaro si abitua ad andare a tentoni: riesce nei casi facili, è imbarazzato in quelli difficili, e finisce con il non rendersi nemmeno conto che l'operazione è sempre possibile, qualunque sia il dato binomio di cui un termine rappresenta un quadrato, e l'altro un doppio prodotto. Provate a dare ad uno scolaro da completare, non dico $36\,a^4-31\,b^2$ ma soltanto un'espressione come $4\,a^4-80\,a^2\,b^3$, e lo vedrete cercare ad occhio, molto imbarazzato — ciò che fa a al caso suo. Che accadrebbe se gli si ponesse un a^2+b^2 in cui $+b^2$ dovesse figurare come doppio prodotto? E perchè mai non toglierlo d'imbarazzo una volta per tutte spiegandogli la regola che deve seguire, come gli si spiega quella del quadrato? Spiegandogliela, cioè portandolo a riflettere che se nella relazione $(a+b)^2=a^2+2\,ab+b^2$ egli dovesse trovare il b, null'altro dovrebbe fare che estrarre la radice del primo termine, e dividere il secondo per il doppio di tale radice. E il principiante non avrà neanche bisogno di studiare tale regola perchè essa non è altro che il procedimento da lui seguito in aritmetica per estrarre una radice quadrata: opportuno avvicinamento dunque, anche qui, fra nozioni artificialmente separate da un astrattismo dogmatico.

Si apre così una finestra a cui sarà opportuno affacciarsi — sia pure per pochi minuti — per vedere su un chiaro esempio numerico come la regola di estrazione di radice quadrata sia appunto il procedimento inverso del quadrato. Ad esempio: $1369=1300+69=$ $=900+420+49=30^2+2\cdot30\cdot7+7^2$, accompagnando alla lavagna con la nota trascrizione della estrazione di radice.

Infine, quando l'alunno avrà imparato le equazioni di primo grado (se già non ne ha idea da un più riassuntivo corso precedente) queste nozioni potrebbero essere applicate a titolo di esercizio, e per fissare bene una relazione che forse più tardi sfuggirebbe, alla risoluzione di qualche facile equazione di secondo grado *senza l'uso di formula alcuna*, ma solo completando quadrati perfetti, come ad esempio: $4x^2-7x-$ $-30=0$ attraverso i notti passaggi (dividere per 4 ambo i membri, completare il quadrato perfetto, ecc.).

Le radici trovate offrirebbero infine il modo di scomporre in fattori anche quel trinomio. Così una riflessione attiva ci avrebbe ricondotto al punto di partenza, ma con possibilità accresciute rispetto al primo momento, quando il trinomio doveva scomporsi ad occhio.

Forse la trattazione quì proposta sarà giudicata attuabile solo in parte. Ma quello che abbiamo voluto raccomandare è un metodo che permetta di integrare e coordinare le sparse membra di nozioni prospettate sovente in un poco opportuno isolamento. In questa continua coordinazione e trasformazione é gran parte dello stesso spirito matematico, e bisogna conservare appunto tale spirito, più che non le singole nozioni. Chi è disposto benevolmente a condividere il nostro punto di vista, ci rimprovererà di non aver considerato affatto la geometria: ad esempio la nota trasformazione del teorema di Pitagora ottenuta da Ippocrate (il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso o acuto, ecc.), facilmente ricavabile dal quadrato del binomio.

Ci scuseremo osservando che abbiamo già abbastanza abusato della pazienza del lettore, insistendo troppo a lungo su di un tema così comune.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAME DO CURSO COMPLEMENTAR DE CIÊNCIAS DOS LICEUS

Ponto 1

2631 — Determine os valores de K para os quais é negativa a raiz da equação $K^2(1-x)=4-5Kx$. R: *Como* $x=(K^2-4):(K^2-5K)$, *a raiz da equação será negativa quando o for o produto* $(K^2-4)(4^2-5K)$ *ou seja quando* $(K+2)K(K-2)(K-5)<0$. *Ora para* $K<-2$ *todos os factores se tornam negativos e o seu produto é positivo; se* $-2<K<0$ *três deles são negativos e o outro é positivo, logo o produto é negativo se* $0<K<2$, *dois são negativos e dois positivos, e o produto é positivo; se* $2<K<5$, *três dos factores são positivos e um negativo e o produto é negativo, e finalmente se* $K>5$ *todos os factores são positivos. São então soluções do problema os valores de* K *tais que* $-2<K<0$ *e* $2<K<5$.

2632 — Calcule m de modo que

$$[m!+(m-1)!]:[(m+1)!-m!]=6:25.$$

R: *Se no primeiro membro pusermos em evidência os factores comuns ao numerador e denominador, simplificando, obtém-se sucessivamente:*

$[(m-1)!(m+1)]:[(m-1)!(m^2+m-m)=6:25$ *ou* $(m+1):m^2=6:25$, *donde* $m=5$.

2633 — Sabendo que: na equação $ax^2+bx+c=0$ é $x'+x''=-b/a$ e $x'x''=c/a$; demonstre que: se uma das raizes de $x^2+px+q=0$ é o quadrado da outra tem lugar a relação $p^3-q(3p-1)+q^2=0$. R: *Notemos que será* $x_1+x_2=-p$ *e* $x_1x_2=q$ *se forem* x_1 *e* x_2 *as raizes de* $x^2+px+q=0$ *e então* $p^3=-(x_1+x_2)^3=-(x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3)$ $q(3p-1)=-(3x_1^2x_2-3x_1x_2^2-x_1x_2)$ *e* $q^2=x_1^2x_2^2$. *Como, por hipótese, é* $x_1^2=x_2$, *obtém-se imediatamente* $p^3-q(3p-1)+q^2=0$.

2634 — Indique a expressão geral dos múltiplos de 3 que divididos por 9 produzem restos superiores a 4. R: *As expressões gerais dos números que divididos por* 9 *dão restos superiores a* 4 *são* $9m+5$; $9m+6$; $9m+7$ *e* $9m+8$ *onde* m *é um inteiro qualquer; destes o único que é múltiplo de* 3 *é* $9m+6$.

2635 — Mostre que a soma $\dfrac{7n+1}{7}+\dfrac{5p-1}{5}$ é uma fracção irredutível. R: *De facto*

$$(7n+1):7\ (+5p-1):5=[(35n+5)+35p-7]:35=(35n-2):35,$$

e como $35n-2$ *é primo com* 35 *então a fracção é irredutível.*

2636 — Resolva pelo método das figuras semelhantes o problema: «Construa um triângulo conhecendo o comprimento h_1 da altura relativa a um dos lados e os ângulos α e β adjacentes a esse lado».

Indique em que consiste o método: R: *Constroe-se um triângulo cujos angulos sejam* α, β *e* $180°-(\alpha+\beta)$ *e de altura* h *qualquer. Constroe-se em seguida um triângulo homotético do primeiro e cuja razão de homotetia seja* h_1/h *se* h_1 *for o comprimento dado da altura relativa ao lado a que* α *e* β *são adjacentes.*

Ponto 2

2637 — Dada a equação $2x^2-2(1-2m)x+m^2=0$ de raizes x' e x'' forme a equação do 2.º grau cujas raízes são $y'=x'+m$ e $y''=x''+m$. R: *Como* $y'+y''=x'+x''+2m=1-2m+2m=1$ *e* $y'y''=x'x''+m(x'+x'')+m^2=m^2/2+m(1-2m)+m^2=(2m-m^2)/2$, *a equação pedida será* $2y^2-2y+2m-m^2=0$.

2638 — Escreva, convenientemente simplificado, o 5.º termo do desenvolvimento de $(a\sqrt{b}/2+i\sqrt{2}/a^2b)^8$. R: $T_5={}^8C_4 i^4\cdot 2^2\cdot a^4\cdot b^2/2^4\cdot a^8\cdot b^4=35/2a^4b^2$.

2639 — Resolva a inequação

$$(2x^2-3x-35):(x^2-6x-16)>0.$$

R: *Para que a fracção seja positiva é necessário que*