attuabile solo in parte. Ma quello che abbiamo voluto raccomandare è un metodo che permetta di integrare e coordinare le sparse membra di nozioni prospettate sovente in un poco opportuno isolamento. In questa continua coordinazione e trasformazione é gran parte dello stesso spirito matematico, e bisogna conservare appunto tale spirito, più che non le singole nozioni. Chi è disposto benevolmente a condividere il nostro punto di vista, ci rimprovererà di non aver considerato affatto la geometria: ad esempio la nota trasformazione del teorema di Pitagora ottenuta da Ippocrate (il quadrato del lato opposto all'angolo ottuso o acuto, ecc.), facilmente ricavabile dal quadrato del binomio.

Ci scuseremo osservando che abbiamo già abbastanza abusato della pazienza del lettore, insistendo troppo a lungo su di un tema così comune.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAME DO CURSO COMPLEMENTAR DE CIÊNCIAS DOS LICEUS

Ponto 1

2631 — Determine os valores de K para os quais é negativa a raiz da equação $K^2(1-x)=4-5Kx$. R: *Como* $x=(K^2-4):(K^2-5K)$, *a raiz da equação será negativa quando o for o produto* $(K^2-4)(4^2-5K)$ *ou seja quando* $(K+2)K(K-2)(K-5)<0$. *Ora para* $K<-2$ *todos os factores se tornam negativos e o seu produto é positivo; se* $-2<K<0$ *três deles são negativos e o outro é positivo, logo o produto é negativo se* $0<K<2$, *dois são negativos e dois positivos, e o produto é positivo; se* $2<K<5$, *três dos factores são positivos e um negativo e o produto é negativo, e finalmente se* $K>5$ *todos os factores são positivos. São então soluções do problema os valores de* K *tais que* $-2<K<0$ *e* $2<K<5$.

2632 — Calcule m de modo que

$$[m!+(m-1)!]:[(m+1)!-m!]=6:25.$$

R: *Se no primeiro membro pusermos em evidência os factores comuns ao numerador e denominador, simplificando, obtém-se sucessivamente:*

$$[(m-1)!\,(m+1)]:[(m-1)!\,(m^2+m-m)=6:25$$

ou $(m+1):m^2=6:25$, *donde* $m=5$.

2633 — Sabendo que: na equação $ax^2+bx+c=0$ é $x'+x''=-b/a$ e $x'x''=c/a$; demonstre que: se uma das raizes de $x^2+px+q=0$ é o quadrado da outra tem lugar a relação $p^3-q(3p-1)+q^2=0$. R: *Notemos que será* $x_1+x_2=-p$ *e* $x_1x_2=q$ *se forem* x_1 *e* x_2 *as raizes de* $x^2+px+q=0$ *e então* $p^3=-(x_1+x_2)^3=-(x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3)$ $q(3p-1)=-(3x_1^2x_2-3x_1x_2^2-x_1x_2)$ *e* $q^2=x_1^2x_2^2$. *Como, por hipótese, é* $x_1^2=x_2$, *obtém-se imediatamente* $p^3-q(3p-1)+q^2=0$.

2634 — Indique a expressão geral dos múltiplos de 3 que divididos por 9 produzem restos superiores a 4. R: *As expressões gerais dos números que divididos por* 9 *dão restos superiores a* 4 *são* $9m+5$; $9m+6$; $9m+7$ *e* $9m+8$ *onde* m *é um inteiro qualquer; destes o único que é múltiplo de* 3 *é* $9m+6$.

2635 — Mostre que a soma $\dfrac{7n+1}{7}+\dfrac{5p-1}{5}$ é uma fracção irredutível. R: *De facto*

$$(7n+1):7\ (+5p-1):5=[(35n+5)+35p-7]:35=(35n-2):35,$$

e como $35n-2$ *é primo com* 35 *então a fracção é irredutível.*

2636 — Resolva pelo método das figuras semelhantes o problema: «Construa um triângulo conhecendo o comprimento h_1 da altura relativa a um dos lados e os ângulos α e β adjacentes a esse lado».

Indique em que consiste o método: R: *Constroe-se um triângulo cujos angulos sejam* α, β *e* $180°-(\alpha+\beta)$ *e de altura* h *qualquer. Constroe-se em seguida um triângulo homotético do primeiro e cuja razão de homotetia seja* h_1/h *se* h_1 *for o comprimento dado da altura relativa ao lado a que* α *e* β *são adjacentes.*

Ponto 2

2637 — Dada a equação $2x^2-2(1-2m)x+m^2=0$ de raizes x' e x'' forme a equação do 2.º grau cujas raízes são $y'=x'+m$ e $y''=x''+m$. R: *Como* $y'+y''=x'+x''+2m=1-2m+2m=1$ *e* $y'y''=x'x''+m(x'+x'')+m^2=m^2/2+m(1-2m)+m^2=(2m-m^2)/2$, *a equação pedida será* $2y^2-2y+2m-m^2=0$.

2638 — Escreva, convenientemente simplificado, o 5.º termo do desenvolvimento de $(a\sqrt{b}/2+i\sqrt{2}/a^2b)^8$. R: $T_5={}^8C_4 i^4\cdot 2^2\cdot a^4\cdot b^2/2^4\cdot a^8\cdot b^4=35/2a^4b^2$.

2639 — Resolva a inequação

$$(2x^2-3x-35):(x^2-6x-16)>0.$$

R: *Para que a fracção seja positiva é necessário que* *os seus termos sejam do mesmo sinal. As raízes do numerador são* 5 *e* $-7/2$ *e as do denominador* 8 *e* -2. *Então os valores de* x *que verificam a desigualdade são os que verificam uma das seguintes desigualdades*

$$x<-7/2\,,\ -2<x<5 \quad \textit{ou} \quad x>8\,.$$

2640 — Determine o resto da divisão por 11 do produto $37^4 \times 1020$. R: $37=\dot{1}\dot{1}+4$ e $1020=\dot{1}\dot{1}+1$, *então o resto da divisão por* 11 *do produto considerado é o mesmo que o da divisão por* 11 *de* $4^4\times 1=256$ *o qual é* $5-8+11=8$.

2641 — Sabendo que: um número primo é o que só é divisível por si mesmo e pela unidade; demonstre que, se um número primo p é a diferença dos quadrados de dois números, estes dois números são $(p-1)/2$ e $(p+1)/2$. R: *Seja* $p=a^2-b^2=(a+b)\cdot$ $\cdot(a-b)$: *então* $a+b$ *e* $a-b$ *só podem ser: um deles igual a* 1 *e o outro igual a* p. *Se* a e b *são inteiros positivos necessàriamente é* $a+b=p$ *e* $a-b=1$ donde $a=(p+1)/2$ *e* $b=(p-1)/2$.

2642 — Considere o seguinte:

Problema: Construir em triângulo ABC, sendo dados os ângulos A e B e o perímetro p.

Resolução: Construir um triângulo $A'B'C'$ em que o ângulo $A'=$ ângulo A e o ângulo $B'=$ ângulo B. Dividir o segmento p em partes a b e c proporcionais aos lados a', b' e c' do triângulo $A'B'C'$. Os lados do triângulo pedido são a, b e c.

Demonstração: O triângulo ABC é semelhante ao triângulo $A'B'C'$ por ter dois ângulos iguais cada um a cada um.

O perímetro do triângulo é p, visto que, por construção $a+b+c=p$. Qual foi o método empregado na resolução do problema? Qual foi o método empregado na demonstração?

Soluções dos n.os 2631 a 2641 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

I — ESCOLAS PORTUGUESAS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — **1.º Exame de frequência, 1947-48.**

1.º Ponto

2643 — Resolver a equação $\log 5+\log(x+1)=$ $=\log(9x-3)+\operatorname{colog}(x-1)$. R: $x=10/9$.

2644 — Calcular $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{n!\left(\frac{2}{n\pi}\right)^n}$. R: $\frac{2}{e\pi}$.

2645 — Para que valores de x converge a série de termo geral $u_n=\sqrt[n]{\frac{\log(n+1)}{(x+2)^n}}$? R: *Tem de ser* $x>3$ *ou* $x<-2$.

2.º Ponto

2646 — Resolver a equação $\sec^2 x-2\operatorname{cosec}^2 x+$ $+2\sec^2 x\operatorname{cosec}^2 x=0$. R: $x=k\pi$ (k *inteiro, qualquer*).

2647 — Para que valores de λ se tem a igualdade $\lim_{n=\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}\lambda^n}=2$. R: $\lambda=2e$.

2648 — Para que valores de x é convergente a série de termo geral $u_n=\frac{\binom{n}{k}}{x^n}$ ($k>0$ e inteiro)? R: $|x|>1$.

F. C. C. — Álgebra Superior — **2.º Exame de Frequência, 1947-48.**

1.º Ponto

2649 — Nos rectângulos de área constante, substitua-se um dos lados pela semi-circunferência que o tem por diâmetro. Em que condições atinge um extremo o perímetro da figura? R: *Se* $4k$ *representa a área do rectângulo, o perímetro da figura dada é máximo quando os lados do rectângulo são*

$$\sqrt{\frac{2k}{\pi+4}} \quad e \quad \sqrt{\frac{k(\pi+4)}{2}}\,.$$

2650 — Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos médios da hipotenusa dos triângulos de área igual a 4 cujos catetos estão sobre os semi-eixos positivos Ox e Oy. R: *É a hipérbole de equação* $xy=1$.

2651 — Primitivar a função $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{6-x-x^2}}$.

$$\text{R:}\quad \mathrm{P}f(x)=\frac{1}{\sqrt{6}}\log\left(\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{6}}\log\left(\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+C.$$