os seus termos sejam do mesmo sinal. As raizes do numerador são 5 *e* $-7/2$ *e as do denominador* 8 *e* -2. *Então os valores de* x *que verificam a desigualdade são os que verificam uma das seguintes desigualdades*

$$x<-7/2\,,\ -2<x<5 \quad ou \quad x>8\,.$$

2640 — Determine o resto da divisão por 11 do produto $37^4\times 1020$. R: $37=\dot{1}\dot{1}+4$ e $1020=\dot{1}\dot{1}+1$, *então o resto da divisão por* 11 *do produto considerado é o mesmo que o da divisão por* 11 *de* $4^4\times 1=256$ *o qual é* $5-8+11=8$.

2641 — Sabendo que: um número primo é o que só é divisível por si mesmo e pela unidade; demonstre que, se um número primo p é a diferença dos quadrados de dois números, estes dois números são $(p-1)/2$ e $(p+1)/2$. R: *Seja* $p=a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$: *então* $a+b$ *e* $a-b$ *só podem ser: um dcles igual a* 1 *e o outro igual a* p. *Se* a *e* b *são inteiros positivos necessàriamente é* $a+b=p$ *e* $a-b=1$ donde $a=(p+1)/2$ *e* $b=(p-1)/2$.

2642 — Considere o seguinte:

Problema: Construir em triângulo ABC, sendo dados os ângulos A e B e o perímetro p.

Resolução: Construir um triângulo $A'B'C'$ em que o ângulo $A'=$ ângulo A e o ângulo $B'=$ ângulo B. Dividir o segmento p em partes a b e c proporcionais aos lados a', b' e c' do triângulo $A'B'C'$. Os lados do triângulo pedido são a, b e c.

Demonstração: O triângulo ABC é semelhante ao triângulo $A'B'C'$ por ter dois ângulos iguais cada um a cada um.

O perímetro do triângulo é p, visto que, por construção $a+b+c=p$. Qual foi o método empregado na resolução do problema? Qual foi o método empregado na demonstração?

Soluções dos n.os 2631 a 2641 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

I — ESCOLAS PORTUGUESAS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **1.º Exame de frequência, 1947-48.**

1.º Ponto

2643 — Resolver a equação $\log 5+\log(x+1)=\log(9x-3)+\operatorname{colog}(x-1)$. R: $x=10/9$.

2644 — Calcular $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{n!\left(\dfrac{2}{n\pi}\right)^n}$. R: $\dfrac{2}{e\pi}$.

2645 — Para que valores de x converge a série de termo geral $u_n=\sqrt[n]{\dfrac{\log(n+1)}{(x+2)^n}}$? R: *Tem de ser* $x>3$ *ou* $x<-2$.

2.º Ponto

2646 — Resolver a equação $\sec^2 x-2\operatorname{cosec}^2 x+2\sec^2 x\operatorname{cosec}^2 x=0$. R: $x=k\pi$ (k *inteiro, qualquer*).

2647 — Para que valores de λ se tem a igualdade $\lim\limits_{n=\infty}\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}\lambda^n}=2$. R: $\lambda=2e$.

2648 — Para que valores de x é convergente a série de termo geral $u_n=\dfrac{\binom{n}{k}}{x^n}$ ($k>0$ e inteiro)? R: $|x|>1$.

F. C. C. — ÁLGEBRA SUPERIOR — **2.º Exame de Frequência, 1947-48.**

1.º Ponto

2649 — Nos rectângulos de área constante, substitua-se um dos lados pela semi-circunferência que o tem por diâmetro. Em que condições atinge um extremo o perímetro da figura? R: *Se* 4k *representa a área do rectângulo, o perímetro da figura dada é máximo quando os lados do rectângulo são*

$$\sqrt{\frac{2k}{\pi+4}} \quad e \quad \sqrt{\frac{k(\pi+4)}{2}}.$$

2650 — Determinar a equação do lugar geométrico dos pontos médios da hipotenusa dos triângulos de área igual a 4 cujos catetos estão sobre os semi-eixos positivos Ox e Oy. R: *É a hipérbole de equação* $xy=1$.

2651 — Primitivar a função $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{6-x-x^2}}$.

R: $$\mathrm{P}f(x)=\frac{1}{\sqrt{6}}\log\left(\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{6}}\log\left(\sqrt{\frac{2-x}{x+3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+C.$$

2.º Ponto

2652 — Considerem-se os triângulos rectângulos de área constante. Em que condições atinge um extremo a área da circunferência circunscrita? R: *A área é mínima quando o triângulo rectângulo é equilátero.*

2653 — Estabelecer a equação do lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos determinados nas rectas que contêm o ponto $(1,0)$ por este ponto e pela recta $y=x$. R: $2y=x$.

2654 — Primitivar a função

$$f(x)=\frac{1}{x+1-\sqrt{3+2x-x^2}}.$$

R: $$\mathrm{P}f(x)=\log\left(\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}-1\right)-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x+1}}-$$
$$-\frac{1}{2}\log\frac{4}{x+1}+C.$$

Soluções dos n.os 2643 a 2654 de L. Mendonça de Albuquerque

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 2.º **exame de frequência extraordinário — 29 de Maio de 1948.**

2655 — Dada a série $\sum(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$,

a) Investigue a sua natureza (em caso de convergência verificar se é simples ou absolutamente convergente). *b*) Determine x e y de modo a transformar a relação $\dfrac{2n+1}{n(n+1)}=\dfrac{x}{n}+\dfrac{y}{n+1}$ numa identidade e, a partir dela, calcule a soma da série. R: *A série é simplesmente convergente e tem por soma*

$$S=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\right.$$
$$\left.+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\right]=1.$$

2656 — Seja C a curva formada pelo arco do círculo de centro $(-1,0)$ e raio 2 situado no 2.º quadrante e pelo arco do círculo de centro $(1,0)$ e raio 2 situado no 1.º quadrante. Considere o segmento variável OM com os extremos O em $(0,0)$ e M em C. *a*) Defina o comprimento OM como uma função $f(x)$. *b*) Verifique se $f(x)$ satisfaz às condições do teorema de Rolle. *c*) Determine os máximos e mínimos de $f(x)$. Explique como operou. R:

$$f(x)=\sqrt{3+2|x|}=\begin{cases}\sqrt{3-2x} & \text{para } -3\le x\le 0\\ \sqrt{3+2x} & \text{para } \quad 0\le x\le 3\end{cases}$$

é contínua no intervalo $[-3,3]$, *em cujos extremos toma valores iguais, mas não é derivável para* $x=0$; $f(-3)$ *e* $f(3)$ *são máximos e* $f(0)$ *é um mínimo, sendo* $f'_e(0)<0, f'_d(0)>0$.

2657 — Estude as variações da função assim definida:

$f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ para $x\le 0$, e $f(x)=e^{-1/\sqrt{x}}-2$ para $x>0$.

R: *Para* $x<0$: $y'=-\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$ $y''=4\dfrac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}$.

Para $x>0$:

$$y'=\frac{1}{2x\sqrt{2}}e^{-1/\sqrt{x}},\ y''=\frac{1}{4x^2}e^{-1/\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right).$$

$$y'_e(0)=y'_d(0)=0 \quad \text{mas} \quad y''_e(0)<0;\ y''_d(0)=0.$$

A função é crescente, apresenta um ponto de inflexão para $x=1/9$ *e a curva por ela representada tem como assíntotas* $y=0$, $x=-1$, $y=-1$. *Em* $(-1,0)$ *a 2.ª derivada é negativa e em* $(0,1/9)$ *positiva.*

2658 — Estude para os pontos do intervalo $[0,3]$ a continuidade e a derivabilidade da função $y=I(x)-|2-x|^{I(x)}$. Caso seja possível, calcule o valor da sua derivada nos pontos de abcissa $x=1/2$, $x=3/2$, $x=5/2$. Esboce o gráfico da função no intervalo considerado. R: *Contínua e derivável em* $[0,1)$ (*onde* $y=-1$), *em* $(1,2)$ (*onde* $y=x-1$) *e em* $(2,3)$ (*onde* $y=-(x^2-4x+2)$). *No ponto* $x=0$ *só pode definir-se* $y'_d(0)$; $y'(1/2)=0$ $y'(3/2)=1$ $y'(5/2)=-1$.

2659 — Considere o triângulo ABC de base $AB=6$ e altura $h=8$. Seja L um ponto qualquer em AB e r uma recta paralela a AB que intersecta AC e BC respectivamente, em M e N. Para que posição da recta r é máxima a área do triângulo LMN? R: *Designando por* b *a base e* h *a altura do triângulo, a função* $S(h)=3h(8-h)/8$ *será máxima para* $h=4$, *pelo que* r *deve passar pelos pontos médios de* AC *e* BC.

I. S. A. — Matematicas Gerais — 2.º **Exame de frequência (extraordinário) — 29-5-948.**

2660 — Considere a série $\sum u_n$ definida por $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^2$ para $n\ge 0$, $u_0=1$. *a*) Determine a sua natureza. *b*) Determine o termo geral. *c*) Calcule um limite superior do êrro que se comete quando se toma para soma da série a soma dos seus 9 primeiros termos. R: *Como* $\lim\limits_{n\to\infty} n(u_n/u_{n+1}-1)=2$, *a série é convergente. O termo geral é* $u_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}$ *e*

$$R_9=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\cdots<\frac{1}{9\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 11}+\cdots=$$
$$=\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\cdots=\frac{1}{9}.$$

2661 — Considere o sector circular determinado no círculo $x^2+y^2=2$ pelas bissectrizes do 1.º e 4.º quadrantes e designe por $f(x)$ o comprimento do segmento variável, perpendicular a Ox, cujas extremidades se apoiam na fronteira do sector. *a*) Defina $f(x)$ e verifique se satisfaz às condições exigidas pelo teorema de Rolle. *b*) Determine os pontos de máximo e mínimo de $f(x)$. *c*) Como explica que $f(x)$ tenha um máximo sem que $f'(x)$ se anule? R: *A função*

$$f(x)=\begin{cases} 2x & se\ \ 0\leq x\leq 1 \\ 2\sqrt{2-x^2} & se\ \ 1\leq x\leq\sqrt{2} \end{cases}$$

é contínua no intervalo $[0,\sqrt{2}]$, *em cujos extremos se anula, mas não é derivável para* $x=1$. $f(0)$ *e* $f(\sqrt{2})$ *são mínimos e* $f(1)=2$ *é um máximo, sendo* $f'_e(1)>0$, $f'_d(1)<0$.

2662 — Estude as variações da função

$y=\log\left(\dfrac{x+1}{x}e^{2x}\right)$. R: $y=2x+\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; $y'=2-\dfrac{1}{x(x+1)}$; $y''=\dfrac{2x+1}{(x+1)^2x^2}$. *A função não está definida no intervalo* $[-1,0]$, *sendo* $x=-1$, $x=0$ *e* $y=2x$ *assíntotas da curva por ela representada. Tem um máximo para* $x=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, *um mínimo para* $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ *e não tem inflexões. É crescente para* $x<\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ *e* $x>\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ *e decrescente em* $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},-1\right)$ *e* $\left(0,\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

2663 — Estude, no intervalo $[0,3]$, a continuidade e derivabilidade da função $y=|1-x|^{I(x)-1}$. Caso seja possível, calcule o valor da sua derivada nos pontos de abcissa $x=1/2$, $x=3/2$, $x=5/2$. Esboce o gráfico da função no intervalo considerado. R: *Contínua e derivável em* $[0,1)$ $\left(\textit{onde}\ y=\dfrac{1}{1-x}\right)$; *em* $(1,2)$ (*onde* $y=1$) *e em* $(2,3)$ (*onde* $y=x-1$); $x=3\to y=4$. *No ponto* $x=2$ *a função é contínua mas não derivável* ($y'_e(2)=0$; $y'_d(2)=1$); $y'(1/2)=4$; $y'(3/2)=0$; $y'(5/2)=1$.

2664 — Determine a posição do ponto P do semi-eixo positivo dos xx do qual se vê sob um ângulo máximo o segmento $\overline{BC}$, onde B e C são os pontos de coordenadas $(0,b)$ e $(0,a+b)$ respectivamente $(a>0,\ b>0)$. R: *Designando por* β *e* γ *os ângulos segundo os quais se vêem de* P *os segmentos* $\overline{OC}$ *e* $\overline{OB}$ *respectivamente e maximizando a função*

$$\operatorname{tg}(\beta-\gamma)=\frac{ax}{x^2+(a+b)b},\ \textit{vem}\ x=\sqrt{b(a+b)}.$$

Soluções dos n.os 2645 a 2664 de F. R. Dias Agudo

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência ordinário — Março de 1948.

2665 — Derive

$$y=e^{2x}\cdot\operatorname{sen}(x^2-1)+x\cdot\operatorname{sen}x\cdot\log x+\operatorname{arctg}\frac{\pi}{x+1}.$$

Sabe de algum ponto onde seja imediata ou particularmente simples a derivada de uma ou outra parcela? R: $y'=2\cdot x\cdot e^{2x}\cdot\cos(x^2-1)+2\cdot e^{2x}\cdot\operatorname{sen}(x^2-1)+\operatorname{sen}x\cdot\log x+x\cdot\cos x\cdot\log x+\operatorname{sen}x-\dfrac{\pi}{(x+1)^2+\pi^2}$ *para* $x=1$ *as duas primeiras parcelas simplificam-se vindo*

$$[y']_{x=1}=2\cdot e^2+\operatorname{sen}1-\frac{\pi}{4+\pi^2}.$$

2666 — Escreva as equações gerais das cordas suplementares da elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ e determine o ângulo dessas rectas. Determine os pontos de ordenada positiva, em que a tangente tem o coeficiente angular $+1$ ou -1. Determine uma hipérbole (de focos em $x'ox$) cujas assíntotas sejam diâmetros conjugados da elipse. R: *As equações são*

$$\frac{y}{b}=\lambda\left(1-\frac{x}{a}\right);\ \frac{y}{b}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

Os coeficientes angulares são $m_1=-\lambda\dfrac{b}{a}$; $m_2=+\dfrac{1}{\lambda}\dfrac{b}{a}$ *e portanto* $\operatorname{tg}\varphi=-\dfrac{ab}{a^2-b^2}\left(\lambda+\dfrac{1}{\lambda}\right)$; *o ângulo que as cordas suplementares fazem entre si é*

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{-ab}{a^2-b^2}\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right).\ \textit{Tem-se}\ \frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

e portanto $-\dfrac{b^2x}{a^2y}=\pm1$. *Então os pontos onde a ordenada é positiva e o coeficiente angular da tangente* $+1$ *ou* -1 *são as soluções do sistema*: $y=\pm\dfrac{b^2}{a^2}x$, $y=+b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$. *As assíntotas da hipérbole são diâmetros conjugados da elipse igualmente inclinados sôbre o eixo maior, e portanto paralelos às cordas suplementares* $\dfrac{y}{b}=\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$, $\dfrac{y}{b}=\left(1+\dfrac{x}{a}\right)$ *de coeficientes angulares* $m_1=-\dfrac{b}{a}$, $m_2=+\dfrac{b}{a}$; *as equações das assíntotas são portanto* $Y=-\dfrac{b}{a}X$; $Y=+\dfrac{b}{a}X$ *ou*

$\frac{Y}{b}+\frac{X}{a}=0$; $\frac{Y}{b}-\frac{X}{a}=0$. *A equação da hipérbole obtém-se particularizando* k *em*

$$\left(\frac{Y}{b}+\frac{X}{a}\right)\left(\frac{Y}{b}-\frac{X}{a}\right)=\frac{Y^2}{b^2}-\frac{X^2}{a^2}=-k^2.$$

2667 — Defina série absolutamente convergente e prove que uma tal série é sempre convergente. Prove também que a ordem dos termos não influi na soma. Que se entende por intervalo de convergência da série $\Sigma a_n x^n$? Como se lhe determina a semi-amplitude λ? e como se porta a série no interior? Que valor tem λ quando Σa_n é simplesmente convergente?

2668 — Seja $f(x)$ definida em (a,b), mas em ponto algum igual ao número λ, compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$. Prove que $f(x)$ é descontínua em algum ponto, e mostre que havendo uma só descontinuidade e sendo a função crescente, λ não é o único valor inatingido entre $f(a)$ e $f(b)$.

Sendo $f(x)$ crescente, e com um só ponto de descontinuidade $c>a$, como fica constituido em geral o conjunto dos valores de $y=f(x)$ em (a,c)? Há casos particulares?

2669 — Defina as derivadas laterais de $f(x)$ para $x=c$ e figure geomètricamente a hipótese $f'(c)=\mp\infty$. Supondo $f(x)$ par em $(-a,a)$, prove que $f'(c)$ existe sempre que exista $f'(c)$ $(0\leq c<a)$ e relacione os dois valores. Que deduz daí quanto a $f'(0)$? e quanto a $f'(x)$, $f''(x)$, $\cdots$?

Exemplifique com alguma função indefinidamente derivável.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — 1.º exame de frequência extraordinário — Março de 1948.

2670 — Derive

$$y=\sqrt{1-x^3}+\operatorname{sen} x\cdot\log(1+x)\cdot e^{x^2}+\frac{x}{chx}\cdot$$

Prove que $f(x)$ é contínua onde tenha derivada finita.

R: $$y'=-\frac{3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}+\cos x\cdot\log(1+x)\cdot e^{x^2}+$$
$$+\operatorname{sen} x\cdot\frac{1}{1+x}e^{x^2}+$$
$$+2x\cdot\operatorname{sen} x\cdot\log(1+x)\,e^{x^2}+\frac{chx-xshx}{ch^2 x}\cdot$$

Se o $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

é finito quando h *tende para* 0, *então* $|f(x+h)-f(x)|=$ $=f'(x)\cdot h+\varepsilon h$, *isto é*, $|f(x+h)-f(x)|<\delta$ *na vizinhança* h *de* x, *o que significa ser* f(x) *contínua em* x.

2671 — Escreva a equação da circunferência que passa pela origem 0 e que tem por centro $C(\alpha,\alpha)$ $(\alpha>0)$. Ache a tangente no ponto P diametralmente oposto a 0, e a sua intersecção com $\overline{OX}$. Deduza a equação da parábola de foco C e directriz conduzida por $H(\beta,0)$ $(\beta>2\alpha)$ perpendicularmente a $\overline{OP}$, e ache a equação da recta que passa pela intersecção desta curva com a anterior. Indique os limites entre os quais deve variar β para que as duas linhas tenham realmente pontos comuns. Que se observa quando β atinge o seu máximo? R: *A equação da circunferência é* $(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=2\alpha^2$; *a equação do diâmetro que passa pela origem é* $y=x$ *e o sistema*

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=2\alpha^2\\ y=x\end{cases}$$

dá para coordenadas de P: $x=2\alpha$, $y=2\alpha$. *Tem-se*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=-\frac{x-\alpha}{y-\alpha}$$

que para as coordenadas de P *dá* $=-1$; *a equação da tangente em* P *será pois* $Y-2\alpha=-(X-2\alpha)$. *O traço desta recta é a solução do sistema*

$$\begin{cases}y-2\alpha=-(X-2\alpha)\\ y=0\end{cases}$$

isto é, o ponto de coordenadas $(4\alpha,0)$.

A equação da directriz é da forma $Y=m(X-\beta)$ *porque passa por* H, *e como deverá ser perpendicular a* $y=x$, *será* $m=-1$; *portanto*, $y=-(x-\beta)$ *ou* $y+x-\beta=0$.

Seja M(x, y) *um ponto corrente da parábola; distância de* M *ao foco* $+\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2}$, *distância de* M *à directriz* $\frac{|y+x-\beta|}{+\sqrt{2}}$; *logo*

$$(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=(y+x-\beta)^2/2$$

é a equação da parábola. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=(y+x-\beta)^2/2\\ (x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2=2\alpha^2\end{cases}$$

tem-se $y+x-\beta=2\alpha$ *para equação da recta pedida. Deverá ser* $\frac{|2\alpha+2\alpha-\beta|}{\sqrt{2}}=-\sqrt{(2\alpha-\alpha)^2+(2\alpha-\alpha)^2}$ *e portanto* $2\alpha<\beta\leq 6\alpha$.

2672 — Qual é a condição necessária e suficiente para que uma série alternada decrescente convirja? Satisfeita essa condição, como se aprecia R_n? De acordo com a resposta à pregunta precedente, quantos termos se hão-de tomar em $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots$ para se obter S a menos de uma milésima (erro sistemático)?

Enuncie e demonstre algum teorema que possa esclarecer a natureza de uma série em que a_{n+1}/a_n tem por limite a unidade.

2673 — Que se entende por sucessão crescente? e em que condições admite tal sucessão limite finito? Que é o limite relativamente ao conjunto dos termos da sucessão?

Prove que uma função crescente em (a,b) tem limite finito para $x=b$. Está este limite na dependência do valor $f(b)$? Razão disso.

2674 — Seja $f(x)$ pròpriamente crescente em (a,b) e descontínua no ponto intermédio c, onde a oscilação tem o valor Δ.

Prove que $f(x'')-f(x')$ excede Δ sempre que seja $x'<c<x''$. Pode $f(x)$ ter em uma infinidade de pontos oscilação igual ou superior a Δ? Nas condições precedentes, determine as derivadas laterais de $\varphi(x)=(x-c)f(x)$ para $x=c$.

Soluções dos n.os 2665 a 2671 de José R. de Albuquerque.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. P. — Cálculo — Junho de 1947

I

2675 — Determinar a tangente à linha $y^x+(\operatorname{sen} x)^z=2$, $x+y+z=2+\pi/2$, no ponto $(\pi/2,1,1)$.
R: $X+Z=\pi/2+1$, $Y=1$.

2676 — Calcular $\int_0^{1/2} \operatorname{arc\,tg} 2x\,dx$.

R: $I=[x \operatorname{arc\,tg} 2x-1/4\log(1+4x^2)]_0^{1/2}=\pi/8-1/4\log 2$.

II

2677 — Dada a equação $z=\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\left(x-\frac{dz}{dx}\right)$, determinar a solução na qual a $x=1/2$ corresponde $dz/dx=0$. Determinar a equação da superfície gerada pela rotação em torno da recta $x=1/2$, da curva obtida. Calcular a curvatura da secção feita na superfície encontrada, no ponto $(1/2,0,0)$, pelo plano $2x-4y+8z=1$. R: *Fazendo* $z'=p$ *e derivando em ordem a* x *temos:* $\frac{dx}{dp}+\frac{2x}{p-1}=\frac{3p}{p-1}$; *integrando vem:* $x=c_1(p-1)^{-2}$, $c_1=p^3-3p^2/2+c_2$. *Portanto:*
$$x=\frac{c_2}{(p-1)^2}+\frac{2p^3-3p^2}{2(p-1)^2}.$$ *A solução pedida é:*
$$x=\frac{2p+1}{2},\quad z=\frac{p^2}{2}.$$ *Eliminando* p *temos:* $z=(2x-1)^2/8$. *A equação da superfície é:* $4x^2+4y^2-8z-4x+1=0$. *Temos no ponto* $(1/2,0,0)$; $p=0$; $q=0$; $r=1$; $s=0$ e $t=1$. *A curvatura feita pelo plano* $2x+4y-1=0$ *é:* $1/\rho=1$. *A curvatura da secção plana pedida é:* $\frac{1}{R}=\sqrt{\frac{21}{5}}$.

2678 — Dada a linha
$$x=\frac{2t}{1+t+t^2+t^3};\quad y=\frac{2}{1+t+t^2+t^3},$$
determinar o lugar dos pontos donde se podem tirar tangentes cujos pontos de contacto estão em linha recta. Determinar a envolvente destas rectas.

R: $x'=2\frac{1-t^2-2t^3}{(1+t+t^2+t^3)^2}$; $y'=-2\frac{1+2t+3t^2}{(1+t+t^2+t^3)^2}$.

A equação da tangente é:
$$Y(1-t^2-2t^3)+X(1+2t+3t^2)=2.$$
Se a recta $ax+by=c$ *passa por* $x=\frac{2t}{1+t+t^2+t^3}$, $y=\frac{2}{1+t+t^2+t^3}$ *temos:* $2at+2b=c(1+t+t^2+t^3)$.

Portanto: $\frac{-2Y}{c}=\frac{3X-Y}{c}=\frac{2X}{c-2a}=\frac{X+Y-2}{c-2b}$ *donde* $-2Y=3X-Y$ *ou seja* $3X+Y=0$, *equação do lugar pedido. As rectas são:* $2xX+(4x+1)Y-6x=0$ *que passam todas por* $(3,0)$.

Soluções dos n.os 2675 a 2678 de Jayme Rios de Souza

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal — 2.º exame de frequência ordinário — 1947-48.

2679 — Um triângulo rectângulo isósceles variável com os extremos da hipotenusa assentes nas curvas do plano xoy, de equações $y=3x$ e $x^2+y=0$ e cujo plano é perpendicular ao plano xoy está animado dum movimento de translação de tal modo que a sua hipotenusa se conserva sempre paralela a oy. Calcule: *a*) O volume do sólido gerado pelo triângulo quando a sua hipotenusa se desloca desde a recta $x=0$ até à recta $x=2$; *b*) Usando coordenadas polares a área limitada pelo eixo dos xx e pela curva descrita pelo ponto médio da hipotenusa. R: *a*) *Comprimento da hipotenusa* $3x+x^2$; *área do triângulo* $(3x+x^2)^2/4$, *logo*
$$V=\int_0^2(3x+x^2)^2/4\,dx=68/5.$$ *b*) *Curva descrita pelo ponto médio da hipotenusa* $y=(3x-x^2)/2$ *ou em coordenadas polares* $\rho=(3\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta)/\cos^2\theta$, *logo*

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arctg} 3/2} \rho^2\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[9 \operatorname{tg}\theta + \frac{4}{3}\operatorname{tg}^3\theta - 6 \sec^2\theta\right]_0^{\operatorname{arctg} 3/2} = 27/12 .$$

2680 — Se $z=f(x,y)$ é máxima ou mínima em (a,b), a função $z=f(a+ht, b+kt)$ obtida da anterior fazendo a substituição $x=a+ht, y=b+kt$ (h e k arbitrários não conjuntamente nulos) é também máxima ou mínima em $t=0$. *a*) Verifique, considerando o caso particular da função $z=(2y-x^2)(y-4x^2)$, se a afirmação recíproca desta é ou não verdadeira. *b*) Discuta o problema e justifique as conclusões a que for conduzido. R: *a*) *Com efeito, fazendo a substituição indicada, tem-se* $z=(2kt-h^2t^2)(kt-4h^2t^2)$ *mínima para* $t=0$; *no entanto para a função original tem-se, em* $(0,0)$, $s^2-rt=0$ *e é fácil de ver estudando-a directamente que não é máxima nem mínima no referido ponto.* *b*) *A substituição considerada, para efeitos de determinação dos pontos de máximo e mínimo, não é em geral legítima, porquanto equivale a estudar o comportamento da função dada apenas ao longo de todas as rectas que passam pelo ponto* (a,b).

2681 — Considere o sistema $x+yz=1, xz-y=-1$. *a*) Mostre que este sistema define nas vizinhanças do ponto $(1,1,0)$ y e z como funções de x. *b*) Calcule d^2z e d^2y. R: *a*) *Com efeito* $(1,1,0)$ *é uma solução inicial, as derivadas parciais são contínuas e*

$$\partial(f_1, f_2)/\partial(y,z) = 1 \neq 0 .$$

b) *Efectua-se pelo método habitual.*

2682 — Calcule $I=\iiint_D z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ onde D é definido pelas superfícies de equações $z=0$, $z=h$ e $x^2+y^2=a^2$ (h e a constantes positivas). R: *Em coordenadas cilíndricas é*

$$I=\iiint_{D'} z\rho^3\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a} d\rho \int_0^{h} z\rho^3\,dz = \pi h^2 a^4/16 .$$

2683 — Seja C uma curva plana, fechada, simples e regular que delimita um domínio S de área A. *a*) Mostre que $\int_C ay\,dx + bx\,dy = (b-a)A$. *b*) Calcule $\oint (3y\,dx + x\,dy)$ ao longo do triângulo de vértices $(1,1)$, $(4,1)$ e $(2,3)$ e verifique o resultado usando a fórmula da alínea *a*). R: *a*) *Obtém-se imediatamente usando a fórmula de Green.* *b*) *É*

$$\oint (3y\,dx + x\,dy) = \int_1^3 3dx + \int_2^4 (6x-18)\,dx - $$

$$-\int_1^2 (12x-9)\,dx = -9;$$

por outro lado é $b=1$, $a=3$ e $A=9/2$, *logo* $(b-a)A=-9$.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal — 2.º exame de frequência extraordinário — 1947-48.

2684 — Sejam a e b os catetos dum triângulo rectângulo cujo plano é perpendicular ao plano xoy. O cateto a tem as suas extremidades apoiadas nas curvas, do plano xoy, de equações $y=x^2$ e $y=x^2-2x$ e o cateto b tem um comprimento igual a 10. Supondo o triângulo animado de um movimento de translação de tal maneira que o cateto a se conserva sempre paralelo ao eixo dos yy, calcule: *a*) O volume gerado pelo triângulo, quando o cateto a se desloca desde a recta de equação $x=0$ à recta de equação $x=1$; *b*) Usando coordenadas polares a área do domínio do 4.º quadrante limitado pelo eixo dos xx e pela curva gerada pelo ponto médio do cateto a. R: *a*) *Comprimento do cateto* $2x$; *área do triângulo* $10x$; *volume*

$$V=\int_0^1 10x\,dx = 5;$$

b) *Curva descrita* $y=x^2-x$; *área em coordenadas polares* $\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{0} \frac{(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^2}{\cos^4\theta}\,d\theta = 1/6$.

2685 — Considere o sistema $zx+xy-yz^2=1; yz-x^2=1$ *a*) Verifique se este sistema define nas vizinhanças do ponto $(1,2,1)$, y e z como funções de x; *b*) Calcule d^2y no ponto $(1,2,1)$. R: *a*) *Define de facto visto* $(1,2,1)$ *ser uma solução inicial, as derivadas parciais serem contínuas e* $\partial(f_1,f_2)/\partial(y,z)=3\neq 0$.

2686 — Considere a função $z=4y^2+x+x^2$ e a equação de condição $x+x^2+2y+y^2+1=0$. *a*) Exprimindo z como função da variável única y determine os seus pontos de máximo e mínimo; *b*) Resolva o problema sem explicitar na equação de condição qualquer das variáveis; *c*) Como explica os resultados obtidos? Qual dos métodos é correcto e porquê? R: *a*) *Se da equação de condição tirarmos* $x+x^2=-$ $-y^2-2y-1$ *é* $z=3y^2-2y-1$, $dz/dy=6y-2$ *e* $dz/dy=0$ *e* $d^2z/dy^2>0$ *para* $y=1/3$. *b*) *Não explicitando, são* $(-1/2, -1/2)$ *e* $(-1/2, -3/2)$ *as soluções do sistema de estacionaridade. Como se trata de determinar os pontos de máximo e mínimo de uma função contínua, para os pontos* (x,y) *variando sobre uma curva fechada, a menos que a função seja constante, existem necessàriamente um máximo e um mínimo. Substituindo as soluções achadas na função dada tem-se, respectivamente*

$z=3/4$ *e* $z=35/4$, *correspondendo, portanto, a primeira a um mínimo e a segunda a um máximo. c) A contradição é aparente e provém do facto de em a) termos feito uma escolha ilegítima da variável independente. A equação de condição não define nas vizinhanças de* $y=1/3$ *qualquer função* $x(y)$ *visto a este valor de* y *corresponderem valores complexos de* x. *Se em a) exprimissemos* y *em função de* x *e portanto* z *em função de* x, *obteríamos os resultados determinados em b).*

2687 — Calcule $I=\iiint_D z\,dx\,dy\,dz$ onde D é o domínio do primeiro oitante limitado pelas superfícies de equações $x+y=4$, $x+y-2z=-2$, $z=0$, $y=0$, $x=0$. R: *Tem-se*

$$I=\int_0^4 dx\int_0^{4-x} dy\int_0^{\frac{x+y+2}{2}} z\,dz.$$

2688 — Sejam $f(x)$ e $g(y)$ funções contínuas. *a*) Mostre que $\oint_C [by+f(x)]\,dx+[ax+g(y)]\,dy$ é constante ao longo de qualquer circunferência de raio r. *b*) Calcule $I=\oint 4y\,dx+2x\,dy$ ao longo da circunferência de equações $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$ e verifique o resultado recorrendo à propriedade *a*).
R: *a) Recorrendo à fórmula de Green é fácil de ver que o integral dado é igual a* $-(b-a)\pi r^2$. *b) Tem-se*

$$I=\int_0^{2\pi} -6\operatorname{sen}^2 t\,dt+2\,dt=-2\pi.$$ *Por outro lado é* $f(x)=0$, $g(y)=0$, $a=2$, $b=4$ *e portanto* $I=-2\pi$ *visto* $r=1$.

Soluções dos n.os 2678 a 2689 de F. Carvalho Araujo

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — 1.º exame de frequência ordinário — 3 de Março de 1948.

2689 — Estudar a convergência do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2}.$$

2690 — Achar os máximos e mínimos da função

$$z=(x^2+y^2)\,e^{x^2-y^2}.$$

2691 — Calcular a distância mínima da origem à circunferência definida pelas equações: $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-9=0$ e $ax+by+cz-d=0$.

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — 1.º exame de frequência extraordinário — 10 de Março de 1948.

2692 — Calcular o integral $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$. R: *Fazendo* $\operatorname{tg} x=t^2$ *vem* $I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=2\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^4}$, *integral impróprio de 2.ª espécie convergente. Tem-se*

$$I=\frac{2}{4\sqrt{2}}\left[\log\frac{1+t\sqrt{2}+t^2}{1-t\sqrt{2}+t^2}+2\operatorname{arctg}\frac{t\sqrt{2}}{1-t^2}\right]_0^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2693 — Achar os máximos e mínimos da função

$$f(x,y)=x^4+x^2y+y^2.$$

R: *O sistema de estacionaridade* $4x^3+2xy=0$, $x^2+2y=0$ *tem por solução* $x=0$, $y=0$ *e neste ponto é* $s^2-rt=0$. *Como* $f(x,y)=(x^2+y/2)^2+3y^2/4>0$ *trata-se de um mínimo.*

2694 — Determinar sobre o plano $x+ay+z=3$ um ponto cuja soma dos quadrados das distâncias a dois pontos dados seja mínima. R: $F=\overline{PM}^2+\overline{PM'}^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2$ *é a função soma dos quadrados das distâncias do ponto* $P(x,y,z)$ *do plano dado aos pontos dados* $M(\alpha,\beta,\gamma)$ *e* $M'(\alpha',\beta',\gamma')$. *A equação de ligação é* $\varphi\equiv x+ay+z-3=0$. *Tem-se*

$$\frac{\partial(F,\varphi)}{\partial(x,y)}=2\begin{vmatrix}2x-\alpha-\alpha' & 2y-\beta-\beta'\\ 1 & a\end{vmatrix}$$
$$\frac{\partial(F,\varphi)}{\partial(y,z)}=2\begin{vmatrix}2y-\beta-\beta' & 2z-\gamma-\gamma'\\ a & 1\end{vmatrix}.$$

Resolvendo o sistema

$$\varphi=0,\ \frac{\partial(F,\varphi)}{\partial(x,y)}=0,\ \frac{\partial(F,\varphi)}{\partial(y,z)}=0$$

obtinham-se as possíveis soluções do problema.

Soluções dos n.os 2689 a 2694 de Mário Madureira.

I. S. T. — Calculo Infinitesimal — Exame final — 1947

2695 — Dada a curva $y=x^2+3x^3$, $z=ax^2+4y^2$ será possível determinar a de modo tal que o plano osculador da curva na origem dos eixos passe pelo ponto $P(0,1,2)$? R: *Tem-se* $x'=1$, $x''=0$, $y'_0=0$, $y''_0=2$, $z'_0=0$ *e* $z''_0=2a$. *A equação do plano osculador na origem é* $\begin{vmatrix}X & Y & Z\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2a\end{vmatrix}=0$. *Para o plano passar por* $P(0,1,2)$ *terá de ser* $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2a\end{vmatrix}=0$ *ou* $a=2$.

2696 — Determinar a família de curvas planas para as quais a projecção da ordenada sobre a normal é igual à abscissa. R: *Designando por* α *o ângulo da ordenada com a normal tem-se* $\operatorname{tg}\alpha = y'$ *e a projecção de ordenada sôbre a normal é pois* $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}}$. *A equação diferencial da família de curvas procurada é então* $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = x$, *quação linear em* y *e* x .

2697 — Substituir, na equação

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

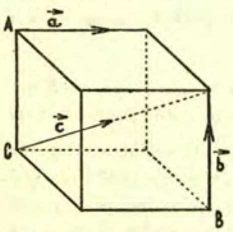
a variável dependente z e a variável independente x, respectivamente por v e u, sendo $v = z^2 x$ e $u = x + z$.

2698 — Investigar a existência de máximos e mínimos para a função

$$f(u) = \int_0^{u^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{u^2} \, dx .$$

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — Mecânica Racional — **Exame final — Outubro, 1947.**



2699 — Três vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ estão aplicados sôbre duas arestas e uma diagonal dum cubo de lado l, como se indica na figura.

Determinar a, b e c de modo tal que o sistema seja equivalente a um vector único e determinar o eixo central nesse caso.

2700 — Verificar se um cone de revolução homogéneo pode ter pontos focais e determiná-los, no caso afirmativo.

2701 — Um pêndulo composto é constituído por uma esfera de raio R e massa M, suspensa por um fio de comprimento l e de peso despresível. Determinar o comprimento do pêndulo simples síncrono e calcular a reacção no eixo de suspensão.

2702 — Sejam

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial q'_h} \qquad h = 1, 2 \cdots n$$

as equações do movimento dum sistema holónomo, sendo λ uma constante. Verificar que, mudando a variável t na variável t_1, com ela ligada pela relação $dt = e^{-\lambda t} dt_1$, as precedentes equações se reduzem às dum movimento espontâneo.

I. S. T. — Mecânica Racional — **2.º exame de frequência ordinário — Abril de 1948.**

Parte Prática

2703 — Determinar o centro de gravidade do sólido que se obtém fazendo girar as duas parábolas $y^2 = 4x$ e $y^2 = 6(1-x)$ em torno do eixo comum.

2704 — Um ponto P descreve a espiral hiperbólica $r\theta = 5$ cm com movimento central, no sentido dos θ crescentes. Se a aceleração estiver dirigida para o polo da espiral, e se para $t = 0$ for $\theta = \pi$ radianos e $|P'| = 10$ cm/seg., qual é a constante das áreas e quais são a velocidade e a aceleração de P para $\theta = 5\pi/6$ rad.?

Parte Teórica

2705 — Conceito geral de tensor — Tensores de Ricci e suas operações — Tensores em elasticidade.

2706 — Donde resulta a importância analítica dos sistemas de referência de König?

No movimento mais geral dum sólido, haverá sempre, num dado instante, algum ponto de aceleração nula?

II — ESCOLAS ESTRANGEIRAS

Université de Paris — Faculté des Sciences — Certificat d'Algèbre et de Théorie des Nombres — **Mars 1948.**

Épreuve pratique

2707 — On considère le groupe abélien G engendré par deux éléments A_1 et A_2 indépendants et chacun d'ordre 4, de sorte que:

$$A_1^x \times A_2^y = 1 \quad \text{équivalent à} \quad x \equiv 0 \quad \text{et} \quad y \equiv 0 \ (4)$$

1. Construire les sous-groupes *cycliques* de G, d'ordre 4 et indiquer pour chacun d'eux la structure du groupe quotient. On pourra raisonner directement ou passer par l'intermédiaire de matrices.

2. On considère le groupe abélien H' engendré par deux éléments B_1 et B_2, indépendants et chacun d'ordre 2. Montrer qu'il y a un et un seul sous-groupe H de G_1, isomorphe à H'. Indiquer la structure du groupe quotient G/H. Montrer que H reste invariant dans tout automorphisme de G.

3. Montrer que le groupe des automorphismes de H' est isomorphe au groupe symétrique de *degré* 3. Montrer qu'il est isomorphe au groupe des matrices carrées d'ordre 2, à termes entiers, défini mod. 2 et de déterminant non congru à 0 (mod. 2) (groupe multiplicatif).

4. Indiquer quels sont les automorphismes de G qui laissent invariants *chacun* des éléments de H. En déduire l'ordre du groupe des automorphismes de G. Montrer que ce groupe est isomorphe au groupe multiplicatif des matrices carrées d'ordre 2, à termes entiers, définis, mod. 4, et à determinant non congru à 0, mod. 4. Vérifier l'égalité des ordres.

Note — Les questions 2, 3, 4 peuvent être traitées indépendament de 1. La première partie de la question 4 peut être traitée indépendament de la deuxième partie de 3.

ÉPREUVE THÉORIQUE

2708 — On considère des systèmes de n nombres entiers (positifs, negatifs ou nuls): $\overline{a} = \| a_1 \, a_2 \cdots a_n \|$, constituant un espace E, de dimension n. L'addition des points $\overline{a}$ est définie par l'addition de leurs coordonnées de même rang. On appellera matrices des matrices carrées d'ordre n, dont les lignes (ou les colonnes) sont des points de E.

I

2709 — On définit dans E une comparaison (ou une relation d'ordre) des points par la condition que un point $\overline{a}'$ est au plus égal à un point $\overline{a}$, lorsque chacune de ses coordonnées a'_i est au plus égale à la coordonnée a_i de même rang de $\overline{a}$.

1. Démontrer que l'ensemble des points $\overline{\delta}$ au plus égaux à deux points $\overline{a}$ et $\overline{b}$ est égal à l'ensemble des points au plus égaux à un point (déterminé) qu'on notera $\overline{d} = (\overline{a}, \overline{b})$.

2. Montrer que l'ensemble des points $\overline{\mu}$ au moins égaux à $\overline{a}$ et $\overline{b}$ est égal à l'ensemble des points au moins égaux à un point (déterminé), qu'on notera $\overline{m} = [\overline{a}, \overline{b}]$.

On a ainsi défini deux opérations sur des points (de E); indiquer leurs propriétés, montrer que chacune d'elles est distributive par rapport à l'autre.

3. Montrer que, pour 4 points, notés $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$

$$[\cdots \overline{i} + \overline{j} + \cdots] + (\cdots \overline{i} + \overline{j} \cdots) = \overline{1} + \overline{2} + \overline{3} + \overline{4};$$

les opérations $[\cdots]$ et $(\cdots)$ étant étendues aux 6 couples de points. Généraliser cette propriété pour un système de n points groupés k à k et $n-k$ à $n-k$.

4. Appliquer ces résultats à l'ensemble des nombres rationnels, obtenus en considérant les produits des puissances entières (positives, négatives et nulles) d'un système de h facteurs premiers différents.

II (indépendant de I)

2710 — On considère deux matrices regulières (á déterminants non nuls) A et B et les deux modules de points: $\mathcal{A}$ de base A et $\mathcal{B}$ de base B. On suppose que le seul module (dans E) qui contient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est E lui même. Rappeler comment cette hypothèse peut être exprimée par une propriété des matrices A et B.

1. On cherche l'ensemble des points communs aux deux modules, c'est-à-dire, les systèmes d'entiers x'_i et y'_i tels que:

$$\| x'_1 \, x'_2 \cdots x'_n \| \times A = \| y'_1 \, y'_2 \cdots y'_n \| \times B .$$

Montrer que ces systèmes, considérés dans un espace E', constituent des modules $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ dont on peut déterminer des bases A' et B' telles que:

$$A' \times A = B' \times B .$$

2. Montrer que l'hypothèse sur A et B reste vérifiée et que le problème précédent est remplacé par un problème «équivalent» quand on remplace A et B respectivement par des matrices:

$$A_1 = S \times A \times \Sigma , \quad B_1 = S' \times B \times E ,$$

S, S', Σ étant des matrices unimodulaires. Préciser le sens du mot «équivalent».

3. On profitera de ce changement pour prendre A_1 sous la forme réduite d'Hermite et B_1 sous la forme réduite de Smith:

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ a'_1 & a_2 & 0 & \cdots \\ a''_1 & a''_2 & a_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\| , \qquad B_1 = \left\| \begin{matrix} e_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & e_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & e_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\| ;$$

e_i divisant e_{i+1}. Montrer que la condition necessaire et suffisante pour que la condition imposée à A et B soit vérifiée est que a_i et e_i soient premiers entre eux (pour chaque valeur de i). Determiner alors une base du module et montrer qu'elle est équivalente à la matrice A (on pourra se borner au cas de matrices d'ordre 3).

En déduire une propriété générale de 4 matrices régulières A, A', B, B' telles que:

$$A' \times A = B' \times B ;$$

A et B étant sans diviseurs à droite et A' et B' sans diviseurs à gauche.