ANO VIII - N.º 35 GAZETA DE MATEMÁTICA FEVEREIRO - 1948

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Introdução ao estudo das geometrias baseado no conceito de transformação

por J. Sebastião e Silva

No célebre programa de Erlangen [1], mostrou FELIX KLEIN como o conceito de transformação permite iluminar a interdependência lógica dos diversos conceitos da geometria, sugerindo novas conexões e conduzindo a uma visão do mundo geométrico, que é a mais penetrante, a mais racional e a mais dominadora a que se possa chegar. As ideias de F. KLEIN neste campo foram também fecundamente exploradas por SOPHUS LIE e por HENRI POINCARÉ — e a elas anda indissolùvelmente ligado o nome de ÉVARISTE GALOIS, que tinha anteriormente introduzido o conceito de «grupo», para o estudo da resolubilidade algébrica das equações.

Não se limitaram estas pesquizas ao domínio da geometria elementar, nem se reduziram a um simples trabalho de classificação. Com a contribuição de vários investigadores, entre os quais é forçoso destacar o nome de ÉLIE CARTAN, tem sido possível chegar a resultados de ampla projecção, mesmo fora do campo da matemática. As aplicações destes resultados à física e, em particular, à teoria da relatividade, não podem hoje de nenhum modo passar despercebidas. É bem significativo o facto [2] de, algum tempo antes da guerra, em Liège, ter sido concedido por unanimidade o prémio MONTEFIORE a um engenheiro americano, GABRIEL KRON, que mostrou como o uso das geometrias mais gerais, aliado ao emprego do cálculo matricial e tensorial, permite simplificar e generalizar a resolução de importantes problemas de electrotecnia, relativos à construção de máquinas de corrente contínua ou de corrente alterna [1].

Os artigos que vou aqui publicar sobre este assunto terão carácter elementar e divulgativo. Eles são dedicados aos estudantes de matemática das nossas universidades, aos quais me pareceu que poderiam ser de algum auxílio no estudo da geometria, constituindo, ao mesmo tempo, um pretexto para os pôr em contacto com os problemas empolgantes da filosofia da matemática. Na apresentação dos assuntos, e em certas demonstrações, poderá também o leitor mais informado encontrar aqui alguma novidade.

1. Os conceitos primitivos da geometria euclideana. É um facto geralmente conhecido que, em geometria elementar, como em qualquer ciência dedutiva, é necessário fixar como *primitivas* ou *indefiníveis* certas noções, a partir das quais é possível depois definir formalmente todas as outras noções que se apresentam no desenvolvimento lógico da teoria — chamadas, por isso mesmo, *noções derivadas*. Todavia, este facto só ficou devidamente esclarecido com a análise lógica das geometrias empreendida em fins do século passado por vários matemáticos, entre os quais HILBERT em lugar proeminente [2].

Foi assim possível *demonstrar* que, tomando como elemento genérico do espaço o *ponto*, e considerando portanto as rectas e os planos como particulares con-

---

(1) Programa exposto por F. KLEIN ao tomar posse duma cátedra da Universidade de Erlangen, em 1872.

(2) Citado por LANGEVIN na sua última conferência, de que se publicou um extrato no n.º 31 da *Gazeta de Matemática* (pág. 16),

(1) De G. KRON é conhecida em Portugal entre outras a obra *Tensor Analysis of networks*, WILEY, New York, 1939 (duma série escrita no interesse do *Advanced Course in Engineering of the General Electric Company*).

(2) Será brevemente publicada uma tradução portuguesa da obra de HILBERT «Grundlagen der Geometrie».

juntos de pontos, se podem adoptar como noções primitivas da geometria euclideana, *por exemplo*, a de «recta», a de «situado entre» e a de «igualdade de distâncias» (sem falar já do conceito de «ponto», nem dos conceitos lógico-formais comuns a todas as ciências dedutivas).

Em vez da noção de «recta» (como conjunto de pontos), preferem ainda alguns autores tomar para primitiva a noção de «colinearidade», referida a grupos de três pontos. Como se sabe, dizer que três pontos A, B, C são *colineares*, equivale a dizer que existe uma recta que os contém. Para indicar que esta propriedade é verificada, faremos uso da expressão simbólica [1]

$Rt(A, B, C)$ (ler: «A, B, C são colineares»).

Trata-se portanto aqui duma *relação ternária*, isto é, duma propriedade relativa a *ternos* de pontos.

Um outro exemplo de relação ternária é aquela a que se refere a expressão «situado entre». Para indicar que, sendo A, B, M três pontos colineares, o ponto M está *situado entre* A e B, escreveremos simbòlicamente

$Tr(M; A, B)$ (ler: «M está situado entre A e B»)

Finalmente, a noção de «igualdade de distâncias» consiste em saber quando é que, a respeito de quatro pontos A, B, C, D, se diz que *a distância de A a B é igual à distância de C a D*; facto que podemos traduzir mais brevemente pela expressão:

$$dist(A, B) = dist(C, D).$$

Trata-se portanto duma *relação quaternária*. Veremos contudo mais adiante que, em vez desta relação, basta tomar como primitiva a noção de «equidistância», aplicada a grupos ordenados de três pontos. Para indicar que dois pontos A e B são *equidistantes* dum terceiro ponto C ou (o que é o mesmo) que o ponto C é *equidistante* de A e de B, usaremos a abreviatura:

$Eq(A, B; C)$ (ler: «A e B são equidistantes de C»).

Posto isto, importa observar que as três referidas noções (correspondentes aos símbolos «Rt», «Tr» e «Eq») não são ainda independentes entre si. Assim, por exemplo, a noção de colinearidade pode ser definida a partir da noção de equidistância: «Diz-se que três pontos distintos A, B, C são *colineares*, quando não existe nenhum ponto que seja equidistante de A, de B e de C; isto é, quando não existe nenhum ponto X tal que se tenha ao mesmo tempo: $Eq(A, B; X)$, $Eq(B, C; X)$». (É preciso não perder de vista que, enquanto nada se diga em contrário, estas considerações se referem ao *espaço euclideano*, isto é, ao conjunto de todos os pontos possíveis na geometria de EUCLIDES — conjunto que designaremos por R_3).

Por outro lado, teremos a oportunidade de ver que a relação de «situado entre» é — por muito estranho que tal pareça — lògicamente exprimível na relação de colinearidade. E deste modo chegaremos à conclusão de que a *noção de equidistância pode ser tomada como única noção primitiva da geometria euclideana*. Todavia, quando se trata de desenvolver sistemàticamente a geometria euclideana a partir dos postulados, revela-se *mais cómodo*, e sobretudo *mais natural*, assumir como primitivas as três referidas noções: a de «colinearidade» (ou de «recta»), a de «situado entre» e a de «equidistância».

2. Noções métricas e noções afins. Chamam-se *noções afins* ou *descritivas* aquelas noções da geometria euclideana que podem ser definidas partindo ùnicamente das noções de «recta» e de «situado entre» [1].

Dizem-se *métricas* as noções euclideanas em que intervem necessàriamente o conceito de equidistância.

Importa desde logo observar que, além das noções métricas euclideanas (que poderíamos também denominar *noções métricas relativas*), há ainda a considerar as *noções métricas absolutas*. Quando eu digo, por exemplo, que um dado segmento mede 5 cm, enuncio uma propriedade métrica absoluta, visto que não é possível, de modo nenhum, definir o conceito de «centímetro» a partir do conceito de «igualdade de distâncias»; mas se eu disser, por exemplo, que a *razão* entre um dado segmento $\overline{AB}$ e um dado segmento $\overline{CD}$ é igual a $5/3$, então sim, terei afirmado um facto respeitante à geometria euclideana. É interessante notar ainda que — ao contrário do que sucede com as unidades de medida de segmentos — as unidades de medida de ângulos (grau, radiano, etc.) constituem noções métricas euclideanas.

Chama-se *geometria afim* aquela parte da geometria euclideana que se limita ao estudo das noções afins. Entre estas, apresentam-se em primeiro lugar a noção de «plano» e a de «paralelismo»: «Dadas duas rectas a e b distintas, com um ponto comum M, chama-se *plano* definido por a e por b, ao conjunto dos pontos de todas as rectas que intersectam ao mesmo tempo a e b em pontos distintos de M [2]. Duas rectas dizem-

(1) Em vez do símbolo «Rt», usa HILBERT o símbolo «Gr» (de «Gerade», *recta*) e, em vez do símbolo «Tr» que introduzimos mais abaixo, usa o símbolo «Zw» (de «zwischen», *entre*). Veja-se HILBERT und BERNAYS, «Grundlagen der Mathematik» Springer, Berlim, 1934.

(1) É claro que, sendo a noção de «situado entre», como veremos adiante, definível a partir da noção de «recta», bastará definir *noções afins* como aquelas noções geométricas que se podem exprimir lògicamente na noção de colineariedade.

(2) Os planos são pois todos os conjuntos de pontos assim gerados, *e só esses*.

-se *paralelas* quando, pertencendo a um mesmo plano, ou não têm nenhum ponto comum ou são coincidentes». Como se vê, não chega a intervir nestas definições o conceito de «equidistância», nem sequer o de «situado entre».

São ainda noções afins as de «semi-recta», «semi-plano», «segmento de recta», «polígono», etc., que se reduzem imediatamente às noções de «recta» e de «situado entre». Mas não é uma noção afim a de «igualdade de segmentos»: «Dizer que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *iguais* (ou *congruentes*) equivale a dizer que $dist\,(A\,,B)=dist\,(C,D)$». Para indicar que dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são iguais, podemos também escrever $\overline{AB}=\overline{CD}$ [1].

Observe-se todavia o seguinte facto, de importância capital para o que segue: *O conceito de igualdade de segmentos só é um conceito métrico enquanto referido a segmentos não paralelos (isto é, não pertencentes a rectas paralelas), reduzindo-se a conceito afim, quando aplicado a segmentos duma mesma recta ou de rectas paralelas.* Com efeito, sabe-se que: 1) dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ contidos em rectas paralelas não coincidentes, dizer que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *iguais*, equivale a dizer que eles são os lados opostos dum paralelogramo (isto é, equivale a dizer que se verifica uma, pelo menos, das relações: $AC//BD$, $AD//BC$); 2) dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ contidos numa mesma recta r, dizer que $\overline{AB}=\overline{CD}$, equivale a dizer que existe pelo menos um terceiro segmento $\overline{EF}$, contido numa recta s paralela a r (mas distinta de r), de modo que se tenha, simultâneamente: $\overline{AB}=\overline{EF}$, $\overline{CD}=\overline{EF}$. [2]

Uma consequência fundamental deste facto é a seguinte: *O conceito de «razão entre dois segmentos» reduz-se a conceito afim, quando referido a segmentos paralelos.* Com efeito, recordemos as seguintes definições: «Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$: 1) diz-se que $\overline{AB}=n\cdot\overline{CD}$ (com n inteiro), quando existem $n+1$ pontos *distintos* $P_0\,,P_1\,,\cdots,P_n$, pertencentes à recta AB, tais que: $P_0\equiv A$, $\overline{P_0P_1}=\overline{P_1P_2}=\cdots=\overline{P_{n-1}P_n}=\overline{CD}$, $P_n\equiv B$; 2) diz-se que $\overline{AB}=m/n\,.\,\overline{CD}$ (com m e n inteiros) quando existe pelo menos, um terceiro segmento $\overline{EF}$ tal que: $\overline{AB}=m\cdot\overline{EF}$, $\overline{CD}=n\cdot\overline{EF}$; 3) diz-se que $\overline{AB}=\alpha\cdot\overline{CD}$ (com α irracional), quando, dado um número racional r qualquer, se tem: $\overline{AB}>r\cdot\overline{CD}$ ou $\overline{AB}<r\cdot\overline{CD}$, conforme for $\alpha>r$ ou $\alpha<r$» [1]. Ora é fácil ver, depois do que atrás foi dito, que, *tratando-se de segmentos paralelos*, as definições precedentes não exigem outros conceitos primitivos além dos de «recta» e de «situado entre» (as duas primeiras não exigem sequer o conceito de «situado entre»).

Em particular, são noções afins: a de «paralelogramo», a de «trapézio», a de «ponto médio dum segmento», a de «baricentro dum triângulo» (ponto de intersecção das medianas), a de «figuras homotéticas entre si», etc. etc. Mas já a noção de «ortocentro dum triângulo» (ponto de concurso das alturas), a de «circunferência», a de «triângulo escaleno», a de «losango» a de «perpendicularidade», a de «ângulo agudo», etc. etc. — são noções euclideanas não afins, como teremos ocasião de verificar.

3. Transformações pontuais. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$ dois conjuntos de pontos quaisquer. Chama-se *transformação pontual unívoca de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{A}^*$* toda a operação Φ que faça corresponder a cada ponto P de $\mathcal{A}$, um *e um só*, ponto P^* de $\mathcal{A}^*$, chamado a *imagem* ou o *transformado* de P *por meio de* Φ, e que se poderá designar pelo símbolo $\Phi\,(P)$:

$$P^*\equiv\Phi\,(P)\,.$$

O ponto variável P^* de $\mathcal{A}^*$ dir-se-á ainda *função unívoca* do ponto variável P de $\mathcal{A}$. Quando se tem $\mathcal{A}\equiv\mathcal{A}^*$, diz-se que Φ é uma transformação unívoca do conjunto $\mathcal{A}$ *sobre si mesmo*.

A transformação unívoca Φ de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{A}^*$ dir-se-á uma transformação *biunívoca* ou *reversível* (de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{A}^*$), quando, para cada ponto P^* de $\mathcal{A}^*$, existir *um, e um só*, ponto P de $\mathcal{A}$, do qual P^* seja a imagem por meio de Φ; isto é, tal que $\Phi\,(P)\equiv P^*$. Em tal hipótese, chama-se transformação *inversa* de Φ, e representa-se por Φ^{-1}, a transformação de $\mathcal{A}^*$ sobre $\mathcal{A}$ que faz passar de P^* para P; em símbolos:

$$P\equiv\Phi^{-1}\,(P^*)\,.$$

Exemplos: 1) Seja $\mathcal{A}$ o espaço inteiro, isto é: $\mathcal{A}\equiv R_3$, e seja $\mathcal{A}^*$ um plano α qualquer, isto é: $\mathcal{A}^*\equiv\alpha$. Se fizermos corresponder a cada ponto P do espaço a sua projecção P' sobre α, segundo uma direcção determinada d (não paralela a α), a correspondência $P\rightarrow P'$ assim definida será uma transfor-

(1) Transigimos aqui com a tradição, usando o sinal «$=$» para exprimir *igualdade euclideana* (ou *congruência*) e o sinal «$\equiv$» para exprimir *coincidência* (ou *identidade*). Todavia, modernamente, usa-se o sinal «$=$» para exprimir *identidade* e um outro sinal para exprimir *igualdade geométrica*.

(2) É assim que se reconhece o facto (a que já atrás aludimos) de ser possível tomar como primitiva a relação ternária de equidistância, em vez da relação de igualdade de distâncias referida a dois pares de pontos.

(1) Como se sabe, dados dois segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$, diz-se que $\overline{MN}<\overline{PQ}$, quando existe um ponto N^* *situado entre* P e Q tal que $\overline{PN^*}=\overline{MN}$.

mação unívoca de R_3 sobre α; mas não uma transformação biunívoca de R_3 sobre α, porque, dado um ponto M qualquer de α, existem infinitos pontos de R_3 cujas projecções coincidem com M: todos os pontos da recta projectante que passa por M.

2) Sejam agora dois planos quaisquer, α e β. A operação Φ que faz corresponder, a cada ponto P de α, a projecção P' desse ponto sobre β segundo uma determinada direcção d (não paralela a nenhum dos planos), é visìvelmente uma transformação biunívoca de α sobre β, cuja transformação inversa, Φ^{-1}, é a que consiste em passar, de cada ponto de β, para a projecção desse ponto sobre α, segundo a *mesma* direcção d.

3) Exemplos notáveis de transformações biunívocas do espaço R_3 sobre si mesmo ou dum plano sobre si mesmo são as *homotetias*, as *rotações*, as *translações* e as *simetrias*: *a*) Chama-se homotetia de *centro* O e de *razão* r a transformação que faz corresponder a cada ponto $P \neq O$ o ponto P^* tal que $\overline{OP^*}/\overline{OP} = |r|$, ficando P e P^* do mesmo lado ou de lados opostos a respeito de O, conforme r for positivo ou negativo; ao ponto O corresponderá o próprio ponto O, o que se exprime dizendo que O é *invariante* para a transformação considerada [1]. *b*) Chama-se translação definida pelo *segmento orientado* $\overrightarrow{AA^*}$ a transformação que faz corresponder a cada ponto P o ponto P^* tal que os segmentos $\overrightarrow{PP^*}$ e $\overrightarrow{AA^*}$ resultem *equipolentes* (isto é, com o mesmo *comprimento*, a mesma *direcção* e o mesmo *sentido*) [2]. *c*) Chama-se rotação do plano, de *centro* O e de *amplitude* θ, a transformação que deixa o ponto O invariante e transforma cada ponto $P \neq O$ no ponto P^* tal que: $dist\,(P^*, O) = dist\,(P, O)$, $P\hat{O}P^* = \theta$. [3] Quanto às rotações do espaço em torno dum *eixo*, a definição é análoga. *d*) Cada simetria é, como se sabe, definida por um ponto, por uma recta ou por um plano.

4. Transformações afins.

Seja Θ uma correspondência pontual biunívoca entre dois planos α e α^* (distintos ou coincidentes) ou entre o espaço inteiro R_3 e ele mesmo. Diz-se que Θ é uma *transformação afim* ou uma *afinidade*, quando respeita a relação de colinearidade, isto é, quando transforma pontos A, B, C colineares em pontos A^*, B^*, C^* ainda colineares — o que, em símbolos, se pode exprimir do seguinte modo:

$$(1) \qquad Rt\,(A, B, C) \rightarrow Rt\,(A^*, B^*, C^*), \text{[1]}$$

sendo

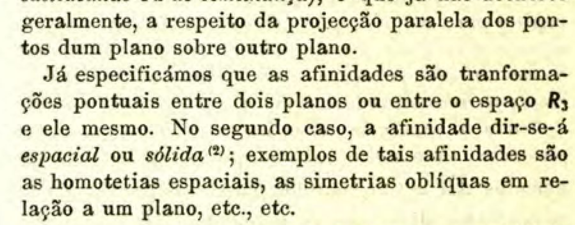
$$A^* \equiv \Theta\,(A),\ B^* \equiv \Theta\,(B),\ C^* \equiv \Theta\,(C).$$

Exemplo duma transformação afim é a projecção dos pontos dum plano α sobre um outro plano β, segundo uma direcção d que não seja paralela nem a α nem a β. São afinidades as homotetias, as rotações, as translações e as simetrias; mas estas, além da relação de colinearidade, respeitam ainda a relação de equidistância (chamam-se por isso *transformações euclideanas* ou *de semelhança*), o que já não acontece geralmente, a respeito da projecção paralela dos pontos dum plano sobre outro plano.

Já especificámos que as afinidades são tranformações pontuais entre dois planos ou entre o espaço R_3 e ele mesmo. No segundo caso, a afinidade dir-se-á *espacial* ou *sólida* [2]; exemplos de tais afinidades são as homotetias espaciais, as simetrias oblíquas em relação a um plano, etc., etc.

TEOREMA. *A transformação inversa duma afinidade (biunívoca) é ainda uma afinidade* [3].

(Demonstraremos este teorema apenas para o caso das afinidades entre dois planos; para o caso das afinidades sólidas, a demonstração pode fazer-se de modo análogo). Sejam pois α e α^* dois planos quaisquer, distintos ou coincidentes, e seja Θ uma transformação afim (reversível) de α sobre α^*. Suponhamos, por um momento, que a transformação Θ^{-1} não é uma afinidade: quer isto dizer que existem pelo menos três pontos *colineares* A^*, B^*, C^* de α^*, os quais são trans-



formados por Θ^{-1} em três pontos A, B, C (de α) *não colineares* (fig. 1). Mas seja então P^* um ponto de α^* não pertencente à recta $A^* B^*$ $(\equiv B^* C^*)$. É claro

(1) É claro que, se for $r=1$, todos os pontos serão invariantes, e então a homotetia será a chamada «transformação idêntica» ou «identidade». Notemos ainda que a transformação inversa da homotetia de centro O e de razão r é, precisamente, a homotetia de centro O e de razão $1/r$.

(2) É fácil ver que a transformação inversa da translação definida por $\overrightarrow{AA^*}$ é a translação definida por $\overrightarrow{A^*A}$. É claro que, se for $A \equiv A^*$, a translação se reduz à identidade.

(3) A transformação inversa da rotação de centro O e de amplitude θ é a rotação de centro O e de amplitude $-\theta$. Se $\theta=0$, a rotação reduz-se à identidade.

(1) O sinal «$\rightarrow$» deve ler-se «implica».

(2) Muitos autores chamam *afinidade espacial* à transformação afim entre dois planos distintos, reservando a denominação «afinidade plana» para o caso das transformações afins dum plano sobre si mesmo.

(3) Quando nada se diga em contrário, subentende-se que as afinidades são transformações reversíveis.

que o ponto P de α, correspondente ao ponto P^* de α^* (segundo Θ^{-1}) não pode pertencer a nenhuma das rectas AB, AC e BC, de contrário o ponto P^* (sendo Θ uma afinidade) pertenceria a $A^*B^*(\equiv B^*C^*)$ — contra o que supusemos. Por outro lado, se P não pertence a nenhuma das rectas AB, AC e BC, será sempre possível conduzir por P uma recta que encontre em dois pontos *distintos* M, N duas das rectas AB, AC e BC (por exemplo, AB e BC) e, como os transformados M^*, N^* de M, N por meio de Θ devem pertencer a A^*B^* $(\equiv B^*C^*)$, também P^* deveria pertencer a A^*B^* $(\equiv M^*N^*)$ — o que é ainda contrário ao que supusemos. Tem-se pois que a transformação biunívoca Θ^{-1} de α^* sobre α não pode deixar de ser uma afinidade. q. e. d.

Podemos ainda exprimir este teorema dizendo que as afinidades respeitam *nos dois sentidos* ou deixam *invariante* a relação de colinearidade, e poderemos escrever, em vez de (1), a condição mais explícita

$$(2) \qquad Rt(A, B, C) \rightleftarrows Rt(A^*, B^*, C^*),$$

que é, como acabámos de ver, equivalente a (1).

Ora o estudo das geometrias mediante o conceito de transformação assenta precisamente sobre o seguinte

Princípio fundamental. *Se uma transformação biunívoca respeita nos dois sentidos uma dada noção ou um dado conjunto de noções, respeita necessàriamente qualquer outra noção que se possa definir lògicamente a partir das primeiras. Recìprocamente, se uma noção é respeitada por todas as transformações biunívocas que deixam invariantes as noções dadas, ela será lògicamente exprimível a partir destas* [1].

Deste modo, qualquer noção afim será respeitada por todas as possíveis transformações afins, visto que as noções afins são, *por definição*, todas aquelas que se podem exprimir lògicamente no conceito de colinearidade (admitindo já que o é também a noção de «situado entre») e as transformações afins são, *por definição*, precisamente aquelas que respeitam a noção de colinearidade. Tem-se pois que *toda a transformação afim deve transformar planos em planos, rectas paralelas entre si em rectas paralelas entre si, o ponto médio dum segmento no ponto médio do transformado desse segmento, o baricentro dum triângulo no baricentro do transformado desse triângulo*, etc., etc.

Se quisermos demonstrar directamente, prescindindo do anterior princípio fundamental, que um dado conceito afim é respeitado por todas as transformações afins, não temos mais do que seguir *pari passu* a definição desse conceito. Seja, por exemplo, a noção de «paralelismo»: consideremos uma transformação afim, Θ, entre dois planos α e α^*, e proponhamo-nos demonstrar que Θ transforma necessàriamente rectas paralelas entre si em rectas paralelas entre si; suponhamos então, por um momento, que tal não acontece, isto é, que existem duas rectas a, b de α, *paralelas entre si*, as quais são transformadas por Θ em duas rectas a^*, b^* (de α^*) *não paralelas entre si:* quere isto dizer, *segundo a definição de paralelismo*, que as rectas a^*, b^* terão um (e um só) ponto comum P^*; mas, sendo assim, também as rectas a, b devem ter um, e um só, ponto comum, que será o ponto $P \equiv \Theta^{-1}(P^*)$: ora isto é contrário à hipótese de ser a paralela a b.

Este e outros exemplos dão uma idea de qual possa ser o espírito duma demonstração geral do anterior princípio, pelo menos no que se refere à sua primeira parte.

Consideremos agora a noção de «igualdade de segmentos». É um facto bem conhecido que, em projecção paralela, dois segmentos iguais entre si, exceptuadas posições particulares, se projectam segundo dois segmentos desiguais — o que significa, portanto, segundo o anterior princípio, que *o conceito geral de igualdade de distâncias não é redutível ao de colinearidade.* Existe portanto toda uma classe de noções euclideanas não afins (a que já no n.º 2 chamámos *noções métricas*); tais são, por exemplo — além da noção geral de equidistância — a de perpendicularidade, a de bissectriz dum ângulo, a de losango, a de baricentro dum triângulo, etc., etc. Que estas noções não são afins, podemos reconhecê-lo agora, observando que não são necessàriamente respeitadas por projecção paralela.

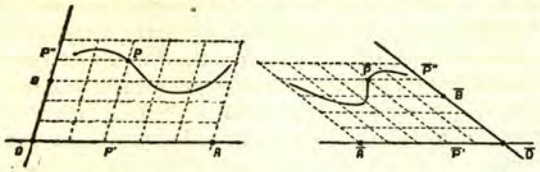
Todavia, como já vimos no n.º 2, a noção de igualdade de segmentos (e portanto a de razão entre dois segmentos) reduz-se a conceito afim, quando referido a segmentos paralelos. Tem-se pois que *a razão entre dois segmentos paralelos é necessàriamente respeitada por toda a transformação afim.*

5. Determinação de todas as possíveis transformações afins. Consideremos um plano α qualquer e, sobre α, três pontos O, A, B, *não colineares*, fixados ao arbitrio (fig. 2).

Sendo agora P um ponto qualquer de α, designemos por P' a projecção de P sobre OA paralelamente a OB, e por P'' a projecção de P sobre OB paralelamente a OA; designemos ainda por x a razão $\overline{OP'}/\overline{OA}$, afectada do sinal + ou −, conforme A e P' estiverem do mesmo lado ou de lados opostos em rela-

[1] É este um teorema pertencente a um novo ramo da matemática, chamado *metamatemática* ou *sintaxe*. No que se refere à sua primeira parte, a veracidade desta proposição pode ser reconhecida mesmo intuitivamente. Exemplo dum outro teorema de metamatemática é o princípio da dualidade da geometria projectiva.

ção a O, e por y a razão $\overline{OP''}/\overline{OB}$, afectada do sinal $+$ ou do sinal $-$ conforme P'' e B estiverem do mesmo lado ou de lados opostos em relação a O. Diremos então que x, y são, respectivamente a 1.ª e a



2.ª *coordenada* (ou a *abscissa* e a *ordenada*) do ponto P a respeito do *referencial* $[OAB]$. Assim, por exemplo, no caso da fig. 2, tem-se $x=2/5$, $y=4/3$.

Deste modo, a cada ponto P de α, ficará a corresponder *um, e um só*, par ordenado (x, y) de números reais; reciprocamente, para cada par ordenado (x,y) de números reais existirá *um, e um só*, ponto P de α que admite x, y como abscissa e ordenada a respeito de $[OAB]$. Além disso, a relação de colinearidade poderá agora ser traduzida por meio das coordenadas, *de maneira independente do referencial considerado:*

Dados três pontos de α, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, *condição necessária e suficiente para que* P_1, P_2, P_3 *sejam colineares é que se tenha*

(3) $$(y_1-y_3)/(x_1-x_3)=(y_2-y_3)/(x_2-x_3).$$

Esta proposição é uma consequência imediata do teorema de Tales e do seu recíproco.

Consideremos agora um outro plano, $\overline{\alpha}$ (podendo ser, em particular, $\alpha\equiv\overline{\alpha}$), e seja Θ uma afinidade de α sobre $\overline{\alpha}$. Em tal hipótese, os pontos *não colineares* O, A, B, serão transformados por Θ em pontos *não colineares* $\overline{O}, \overline{A}, \overline{B}$; por outro lado, sendo $\overline{P}$ o transformado de P por meio de Θ, as projecções P', P'' de P, respectivamente, sobre OA e sobre OB, paralelamente a OB e a OA, serão transformadas, respectivamente, nas projecções $\overline{P'}$ e $\overline{P''}$ de $\overline{P}$ sobre $\overline{O}\overline{A}$ e sobre $\overline{O}\overline{B}$, paralelamente a $\overline{O}\overline{B}$ e a $\overline{O}\overline{A}$ (visto que a relação de paralelismo é respeitada por Θ). Deste modo, atendendo a que razão entre dois segmentos de um mesma recta é uma propriedade afim, chega-se finalmente à conclusão de que as coordenadas de $\overline{P}$ em relação ao referencial $[\overline{O}\,\overline{A}\,\overline{B}]$ coincidem com as coordenadas x, y de P em relação a $[OAB]$. *A afinidade* Θ *fica portanto determinada uma vez conhecidos os pontos* $\overline{O}, \overline{A}, \overline{B}$ *de* $\overline{\alpha}$ *em que são transformados por* Θ *os pontos do referencial* $[OAB]$ *de* α: *basta fazer corresponder, a cada ponto* P *de* α, *o ponto* $\overline{P}$ *de* $\overline{\alpha}$, *cujas coordenadas em relação a* $[\overline{O}\,\overline{A}\,\overline{B}]$ *são precisamente as mesmas que as de* P *em relação a* $[OAB]$.

Reciprocamente, tomados três pontos não colineares $\overline{O}, \overline{A}, \overline{B}$ *sobre* $\overline{\alpha}$, *completamente ao arbítrio, existe sempre uma, e uma só, transformação afim* Θ *de* α *sobre* $\overline{\alpha}$, *tal que* $\overline{O}\equiv\Theta(O)$, $\overline{A}\equiv\Theta(A)$, $\overline{B}\equiv\Theta(B)$: *e é a transformação que faz corresponder a cada ponto* P *de* α, *o ponto* $\overline{P}$ *de* $\overline{\alpha}$ *cujas coordenadas em relação a* $[\overline{O}\,\overline{A}\,\overline{B}]$ *são precisamente as mesmas que as de* P *em relação a* $[OAB]$. A transformação Θ assim definida respeita efectivamente a relação de colinearidade: dizer que três pontos P_1, P_2, P_2 de α são colineares equivale a dizer que as suas coordenadas em relação a $[OAB]$ verificam a igualdade (3); mas as coordenadas das imagens $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ destes pontos, em relação a $(\overline{O}\,\overline{A}\,\overline{B})$, coincidem, por hipótese, respectivamente com as de P_1, P_2, P_3 em relação a $[OAB]$; ora, como já atrás observámos, a maneira por que a condição de colinearidade se traduz mediante as coordenadas é independente do referencial adoptado. Tem-se pois: $Rt(P_1, P_2, P_3) \rightleftarrows Rt(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3)$.

Ficam assim determinadas todas as possíveis afinidades (reversíveis) entre dois planos. Anàlogamente se determinam todas as possíveis afinidades entre o espaço R_3 e ele mesmo: neste caso, cada referencial deve ser constituído por quatro pontos O, A, B, C não complanares. *(Continua)*

Sobre uma fórmula simbólica de Topologia

Tradução dum artigo publicado em *Elemente der Mathematik*, II. 2, amàvelmente autorizada pelo Autor e pela Redacção

por **H. Hadwiger** (Berne)

A presente Nota trata duma fórmula topológica elementar da geometria plana que, apesar de não revelar resultados novos para os topologistas, merece no entanto ser considerada na forma simbólica que lhe daremos.

Encarada assim, a fórmula em questão resume diferentes relações e expressões da topologia combinatória (por ex. o teorema de Euler sobre os poliedros, a relação das «árvores», o teorema de Helly-Radon) e também muitas outras fórmulas combinatórias como as que se apresentam na divisão do plano por meio de rectas, etc.