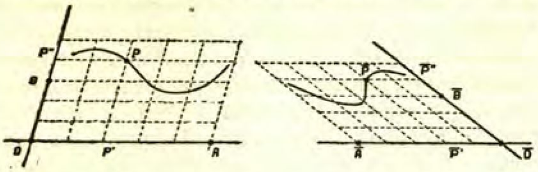
ção a O, e por y a razão $\overline{OP''}/\overline{OB}$, afectada do sinal $+$ ou do sinal $-$ conforme P'' e B estiverem do mesmo lado ou de lados opostos em relação a O. Diremos então que x, y são, respectivamente a 1.ª e a



2.ª *coordenada* (ou a *abscissa* e a *ordenada*) do ponto P a respeito do *referencial* $[OAB]$. Assim, por exemplo, no caso da fig. 2, tem-se $x=2/5$, $y=4/3$.

Deste modo, a cada ponto P de α, ficará a corresponder *um, e um só*, par ordenado (x, y) de números reais; reciprocamente, para cada par ordenado (x, y) de números reais existirá *um, e um só*, ponto P de α que admite x, y como abscissa e ordenada a respeito de $[OAB]$. Além disso, a relação de colinearidade poderá agora ser traduzida por meio das coordenadas, *de maneira independente do referencial considerado:*

Dados três pontos de α, $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$, *condição necessária e suficiente para que* P_1, P_2, P_3 *sejam colineares é que se tenha*

$$(y_1-y_3)/(x_1-x_3)=(y_2-y_3)/(x_2-x_3). \tag{3}$$

Esta proposição é uma consequência imediata do teorema de TALES e do seu recíproco.

Consideremos agora um outro plano, $\overline{\alpha}$ (podendo ser, em particular, $\alpha\equiv\overline{\alpha}$), e seja Θ uma afinidade de α sobre $\overline{\alpha}$. Em tal hipótese, os pontos *não colineares* O, A, B, serão transformados por Θ em pontos *não colineares* $\overline{O}, \overline{A}, \overline{B}$; por outro lado, sendo $\overline{P}$ o transformado de P por meio de Θ, as projecções P', P'' de P, respectivamente, sobre OA e sobre OB, paralelamente a OB e a OA, serão transformadas, respectivamente, nas projecções $\overline{P'}$ e $\overline{P''}$ de $\overline{P}$ sobre $\overline{O}\overline{A}$ e sobre $\overline{O}\overline{B}$, paralelamente a $\overline{O}\overline{B}$ e a $\overline{O}\overline{A}$ (visto que a relação de paralelismo é respeitada por Θ). Deste modo, atendendo a que razão entre dois segmentos de um mesma recta é uma propriedade afim, chega-se finalmente à conclusão de que as coordenadas de $\overline{P}$ em relação ao referencial $[\overline{O}\,\overline{A}\,\overline{B}]$ coincidem com as coordenadas x, y de P em relação a $[OAB]$. *A afinidade* Θ *fica portanto determinada uma vez conhecidos os pontos* $\overline{O}, \overline{A}, \overline{B}$ *de* $\overline{\alpha}$ *em que são transformados por* Θ *os pontos do referencial* $[OAB]$ *de* α: *basta fazer corresponder, a cada ponto* P *de* α, *o ponto* $\overline{P}$ *de* $\overline{\alpha}$, *cujas coordenadas em relação a* $[\overline{O}\,\overline{A}\,\overline{B}]$ *são precisamente as mesmas que as de* P *em relação a* $[OAB]$.

Reciprocamente, tomados três pontos não colineares $\overline{O}, \overline{A}, \overline{B}$ *sobre* $\overline{\alpha}$, *completamente ao arbítrio, existe sempre uma, e uma só, transformação afim* Θ *de* α *sobre* $\overline{\alpha}$, *tal que* $\overline{O}\equiv\Theta(O)$, $\overline{A}\equiv\Theta(A)$, $\overline{B}\equiv\Theta(B)$: *e é a transformação que faz corresponder a cada ponto* P *de* α, *o ponto* $\overline{P}$ *de* $\overline{\alpha}$ *cujas coordenadas em relação a* $[\overline{O}\,\overline{A}\,\overline{B}]$ *são precisamente as mesmas que as de* P *em relação a* $[O\,A\,B]$. A transformação Θ assim definida respeita efectivamente a relação de colinearidade: dizer que três pontos P_1, P_2, P_2 de α são colineares equivale a dizer que as suas coordenadas em relação a $[OAB]$ verificam a igualdade (3); mas as coordenadas das imagens $\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ destes pontos, em relação a $(\overline{O}\,\overline{A}\,\overline{B})$, coincidem, por hipótese, respectivamente com as de P_1, P_2, P_3 em relação a $[OAB]$; ora, como já atrás observámos, a maneira por que a condição de colinearidade se traduz mediante as coordenadas é independente do referencial adoptado. Tem-se pois: $Rt(P_1, P_2, P_3) \rightleftarrows Rt(\overline{P}_1, \overline{P}_2, \overline{P}_3)$.

Ficam assim determinadas todas as possíveis afinidades (reversíveis) entre dois planos. Anàlogamente se determinam todas as possíveis afinidades entre o espaço R_3 e ele mesmo: neste caso, cada referencial deve ser constituído por quatro pontos O, A, B, C não complanares. *(Continua)*

Sobre uma fórmula simbólica de Topologia

Tradução dum artigo publicado em *Elemente der Mathematik*, II. 2, amàvelmente autorizada pelo Autor e pela Redacção

por **H. Hadwiger** (Berne)

A presente Nota trata duma fórmula topológica elementar da geometria plana que, apesar de não revelar resultados novos para os topologistas, merece no entanto ser considerada na forma simbólica que lhe daremos.

Encarada assim, a fórmula em questão resume diferentes relações e expressões da topologia combinatória (por ex. o teorema de Euler sobre os poliedros, a relação das «árvores», o teorema de Helly-Radon) e também muitas outras fórmulas combinatórias como as que se apresentam na divisão do plano por meio de rectas, etc.

Notemos a este respeito que a fórmula é susceptível de sêr generalizada de diferentes maneiras, mas em vista do carácter elementar deste trabalho é recomendável considerá-la apenas com certas restrições.

No estudo que segue limitar-nos-emos aos conjuntos planos A que podem ser considerados como a reunião

(1) $$A = K_1 + K_2 + \cdots K_n$$

de conjuntos K_i fechados, convexos, limitados e em número finito. A fig. 1 representa um destes conjuntos.

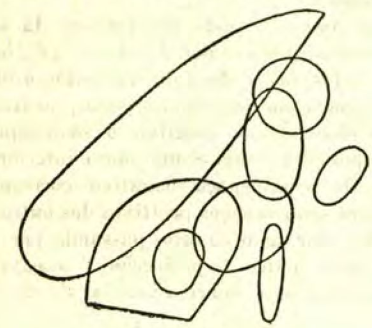


Fig. 1

Todos os conjuntos que gozam desta propriedade formam um sistema ao qual pertencem, ao mesmo tempo que dois conjuntos A e B, a soma $A+B$ (reunião) e o produto AB (intersecção) de A e de B.

Designaremos sempre por E o plano indefinido. Como A é fechado, o seu conjunto complementar $E-A$ será aberto. Seja $z(A)$ o «índice de divisão» de A, isto é o número de componentes[1] diferentes em que A pode ser dividido; anàlogamente, designaremos por $z(E-A)$ o «índice de divisão» de $E-A$, isto é o número de regiões[2] diferentes em que $E-A$ pode ser dividido.

Temos então a seguinte fórmula simbólica:

(2) $$(E-K_1)(E-K_2)\cdots(E-K_n) = z(E-A) - z(A),$$

onde o primeiro membro deve ser desenvolvido completamente como se fosse um produto algébrico, dando em seguida a dada parcela o valor 0 ou 1 conforme essas parcelas, consideradas como produtos de conjuntos, forem ou não vazias.

Demonstraremos a fórmula (2) por indução, supondo pois que ela é verdadeira para todos os conjuntos A' que podem ser representados como somas de $n-1$ conjuntos convexos K_i. Escrevemos então

$$A' = K_1 + K_2 + \cdots + K_{n-1}$$

(3) $$(E-K_1)\cdots(E-K_n) = E(E-K_1)\cdots(E-K_{n-1}) - K_n(E-K_1)\cdots(E-K_{n-1}).$$

O factor E pode evidentemente ser suprimido no primeiro termo do segundo membro porque não tem influência sobre o valor numérico do factor seguinte. No segundo termo podemos primeiramente escrever $n-1$ vezes o factor K_n sem influenciar o valor do produto, de maneira que cada parêntese pode ser afectado por este factor. Em seguida, podemos escrever evidentemente:

$$K_n(E-K_i) = (EK_n - K_i K_n).$$

Finalmente, a redução $(EK_n - K_i K_n) = (E - K_i K^n)$ de cada parentese não altera o valor do produto. Com efeito, temos por um lado $(EK_n)^{n-1} = E^{n-1} = 1$ e por outro lado todos os termos do desenvolvimento dos produtos que se não confundem com este primeiro termo só diferem entre si por potências diferentes de K_n de expoentes positivos. Podemos portanto escrever

$$(E-K_1)\cdots(E-K_n) = (E-K_1)\cdots(E-K_{n-1}) - (E-K_1K_n)\cdots(E-K_{n-1}K_n).$$

Sequndo a hipótese de indução temos pois

(4) $$(E-K_1)\cdots(E-K_n) = [z(E-A') - z(A')] - [z(E-A'K_n) - z(A'K_n)].$$

Definindo pela expressão

(5) $$\varphi(A) = z(E-A) - z(\mathrm{A})$$

uma função $\varphi(A)$ para um conjunto arbitrário A da espécie considerada, então é fácil verificar a validade do teorema bem conhecido de adição:

(6) $$\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A+B) + \varphi(AB).$$

Tendo em conta a condição $\varphi(K_n) = 0$ [em virtude das propriedades a priori de K_n temos com efeito $z(K_n) - z(E-K_n) = 0$], resulta agora de (4) que

$$(E-K_1)\cdots(E-K_n) = \varphi(A') + \varphi(K_n) - \varphi(A'K_n) = \varphi(A'+K_n),$$

isto é $(E-K_1)\cdots(E-K_n) = \varphi(A)$.

Fica assim provado que a fórmula (2) tambem é verdadeira para todos os conjuntos A que podem ser representados como somas de n conjuntos convexos K_i. Isto completa a demonstração por indução, visto que (2) é trivialmente verdadeira para $n=1$.

Vamos agora examinar algumas aplicações e consequências da fórmula (2).

1. Complexos de segmentos

Um complexo de segmentos de recta do plano, isto é um sistema finito de segmentos de recta (lados) sem pontos comuns excepto certas extremidades (vértices), é evidentemente um conjunto da espécie estudada neste trabalho. A fig. 2 representa um complexo de segmentos de recta.

(1) Damos o nome de componente a uma parte conexa máxima.

(2) Uma região é um conjunto aberto e conexo.

Os conjnntos convexos K_i de que se compõe o conjunto A (isto é o complexo de segmentos) são evidentemente neste caso os diferentes lados ou arestas.

Seja k o número de arestas e e o número de vértices de A onde concorrem ν arestas.

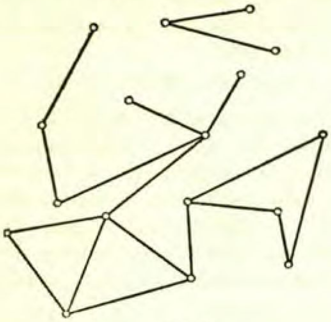


Fig. 2

Temos então as relações

(7) $e = e_1 + e_2 + e^3 + \cdots, \quad 2k = e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \cdots$

Para determinar o produto da formula (2) calculemos preparatòriamente:

$$\begin{aligned} E^k &= 1 \\ K_1 + \cdots &= k \\ K_1 K_2 + \cdots &= \binom{2}{2} e_2 + \binom{3}{2} e_3 + \cdots \\ K_1 K_2 K_3 + \cdots &= \binom{3}{3} e_3 + \binom{4}{3} e_4 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Obtemos pois em primeiro lugar

$$(E - K_1)(E - K_2) \cdots (E - K_k) = 1 - k +$$
$$+ \binom{2}{2} e_2 + \left[\binom{3}{2} - \binom{3}{3} \right] e_3 + \left[\binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \right] e_4 + \cdots$$

ou ainda em virtude de (2)

$$z(E - A) - z(A) = 1k + e_2 + 2e_3 + 3e_4 + \cdots$$

e finalmente, tendo em conta a relação (7)

(8) $$z(E - A) - z(A) = 1 + k - e$$

Esta relação (8) é uma *fórmula topológica geral para complexos de segmentos* [1]

2. Relação das «árvores»

Para «árvores», isto é para complexos conexos de segmentos de recta sem cadeias fechadas, devemos pôr $z(A) = z(E - A) = 1$ na relação (8). Obtém-se então a *relação das «árvores»* [1]:

(9) $$1 + k - e = 0 .$$

Na fig. 3 está representada uma árvore.

3. Teorema de Euler sobre os poliedros

Consideremos um complexo de segmentos de recta, imagem estereográfica do sistema de arestas dum poliedro convexo.

Uma tal imagem pode construir-se da seguinte maneira: Se designarmos por $E_1, E_2, \cdots, E_f$ os planos definidos pelas faces do poliedro, então o plano E_i divide o espaço em dois semi-espaços, positivo e negativo, e chamaremos positivo o semi-espaço que contém o poliedro. Seja S um ponto interior da intersecção do semi-espaço negativo correspondente a E_1 com os semi-espaços positivos dos outros planos $E_2, \cdots, E_f$. Por meio de raios passando por S (considerado como centro de projecção) é possível representar únivocamente, sobre o interior da face situada

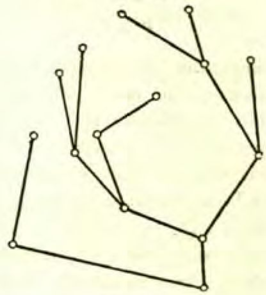


Fig. 3

sobre E_1, a parte da superfície do poliedro sem pontos comuns com E_1. O bordo da face situada sobre E_1 é a sua própria projecção. Esta representação do sistema de arestas do poliedro é um simples complexo de segmentos no plano E_1.

A cada parte de E_1 limitada por uma cadeia fechada de segmentos do complexo corresponde uma face do poliedro não situada sôbre E_1. Finalmente, pode-se fazer corresponder a face situada sobre E_1 à parte externa ilimitada do complexo.

Temos então evidentemente: $z(A) = 1$ e $z(E - A) = f$, sendo f o número de faces do poliedro. Da relação (8) resulta portanto a fórmula clàssica de Euler [2]:

(10) $$f - k + e = 2 .$$

---

[1] Designando por z o número de partes conexas do complexo de segmentos A, o número $\mu = z + k - e$ é o «número de conexão» de A. Ver D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1936, p. 53.

[1] Cf. sobre este teorema de Listing as considerações de D. König, loc. cit., p. 51.

[2] cf. por ex. a demonstração simples de D. HILBERT—S. COHN-VOSSEN, *Anschauliche Geometrie*, Berlin 1932, pp. 255-256.

4. Fórmula de divisão do plano

Consideremos uu sistema de n conjuntos K_i convexos e limitados, tendo dois quaisquer desses conjuntos uma intersecção não vazia e três quaisquer uma intersecção vazia. A reunião A dos K_i será evidentemente conexa e portanto $z(A)=1$. No caso particular que consideramos agora temos o valor seguinte do 1.º membro de (2):

$$1-n+\binom{n}{2},$$

e obtemos portanto:

$$z(E-A)=2-n+\binom{n}{2},$$

o que significa que:

«*Se de n conjuntos conexos e limitados dois quaisquer têm uma intersecção não vazia e três quaisquer uma intersecção vazia, então esses n conjuntos dividem o plano*[1] *em* $(n^2-3n+4)/2$ *regiões*»[2]. Ver as figuras 4 e 5.

5. Teorema de Helly-Radon

Consideremos um sistema de n conjuntos convexos e limitados, dos quais três quaisquer tem uma intersecção não vazia. Se $n\geq 4$ escolhemos arbitràriamente 4 dos conjuntos K_i e escrevemos

$$(E-K_1)(E-K_2)(E-K_3)(E-K_4)=z(E-A)-z(A)$$

de acordo com a nossa fórmula (2).

Como A é evidentemente conexo, teremos $z(A)=1$, e visto que A é limitado $z(E-A)\geq 1$, de maneira que devemos ter

$$1-\binom{4}{1}+\binom{4}{2}-\binom{4}{3}+K_1K_2K_3K_4\geqq 0$$

em virtude das condições admitidas. Donde se deduz que

$$K_1K_2K_3K_4=1$$

e portanto que 4 quaisquer dos conjuntos K_i do sistema tem uma intersecção não vazia. Se $n\geq 5$ então consideramos um sistema parcial de 5 conjuntos K_i escolhidos arbitràriamente e construimos os 4 conjuntos-intersecções convexos:

$$K_1K_5,\ K_2K_5,\ K_3K_5,\ K_4K_5.$$

Em consequência do que acabámos de demonstrar, 3 quaisquer destes conjuntos tem uma intersecção não vazia e portanto, segundo os mesmos resultados, tam-

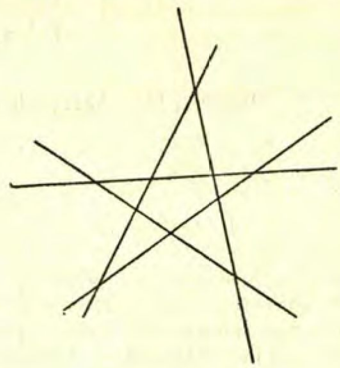


Fig. 4

bem estes 4 conjuntos devem ter uma intersecção não vazia; isto mostra pois que os 5 conjuntos K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 tem uma intersecção não vazia. O racio-

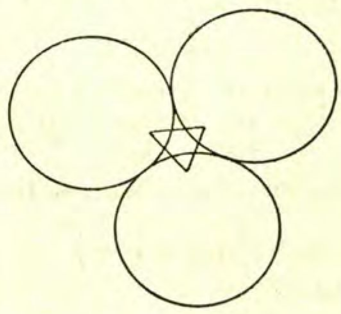


Fig. 5

cínio pode repetir-se e permite portanto deduzir o seguinte resultado:

«*Se três quaisquer de* n *conjuntos convexos e limitados tem uma intersecção não vazia, esses* n *conjuntos tem também uma intersecção não vazia*».

Este enunciado é, como se sabe, uma forma algum tanto especializada do teorema de Helly-Radon para o plano[1].

Trad. de A. G.

---

[1] Um conjunto fechado A divide o plano E em m regiões quando o conjunto complementar $E-A$ pode ser decomposto em m regiões.

[2] O problema que acabamos de resolver está intimamente relacionado com a determinação do número de regiões em que um plano indefinido é dividido por n rectas arbitràriamente situadas. Cf. E. STEINITZ, *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Berlin, 1934, p. 274.

[1] Cf. J. Radon, Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten, Math. Ann, 83, 113-115, 1921; E. Helly, Uber Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten, Jber. D. M. V. 32, 175-176, 1923.