# APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA

## FÍSICA TEÓRICA

## PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DE LA MATIÈRE EN ROTATION

par **Antonio Gião**

### *II. Applications*

*Application à l'électron.* Le globule de matière et d'électricité qui correspond à l'électron peut être considéré comme une sphérule en rotation (spin). Appliquons-lui la formule fondamentale. Compte tenu de la valeur du moment magnétique de l'électron et de la valeur de son moment de rotation propre (spin) qui est $\pm h/4\pi$, en trouve immédiatement par (28), en supposant naturellement qu'à l'intérieur de la sphérule électronique la densité matérielle et la rotation ont une symétrie sphérique ou sont constantes $(\gamma=1)$:

$$\xi = \frac{\chi}{2}\,\frac{e^2}{K\,(m_0)_e^2} \tag{30}$$

ou bien en utilisant le résultat (21′):

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}\,\frac{e^2}{K\,(m_0)_e^2}\sqrt{\frac{\chi}{\chi_0}} \quad (\text{avec } \chi_0 = 1/P_0)\,. \tag{31}$$

La relation (10 $a$) devient donc pour l'électron:

$$\Phi_{m1} = \left(\frac{1}{2}\,\frac{e^2}{K\,(m_0)_e^2}\sqrt{\frac{\chi}{\chi_0}}\right)^{1/2}\Psi_{m1} \tag{32}$$

d'où l'on déduit:

$$\sum_1^4{}_m\,\Phi_{m1}^2 = \left(\frac{1}{2}\,\frac{e^2}{K\,(m_0)_e^2}\sqrt{\frac{\chi}{\chi_0}}\right)\sum_1^4{}_m\,\Psi_{m1}^2\,. \tag{33}$$

Or, d'après la Mécanique ondulatoire que nous avons développée parallèlement à la théorie unitaire de la gravitation et de l'électromagnétisme (voir les mémoires cités), $\sum_1^4{}_m\Psi_{m1}^2$ et $\sum_1^4{}_m\Psi_{m1}^2$ sont les «*intensités de présence*» de l'électron considéré respectivement en tant que particule de matière et d'électricité. D'autre part, remarquons que $(m_0)_e\sqrt{K}$ est la masse de l'électron en «unités gravitationnelles». *La constante* $\lambda$ *de* (10 $a$), *dans le cas de l'électron, est donc, au facteur* $\sqrt[4]{\chi/4\chi_0}$ *près, la charge spécifique gravitationnelle de l'électron; et le résultat* (33) *exprime que le rapport des intensités de présence électrique et matérielle de l'électron est, au facteur* $\sqrt{\chi}/2\sqrt{\chi_0}$ *près, le carré de sa charge spécifique gravitationnelle.*

Comme on a:

$$\frac{e}{(m_0)_e\sqrt{K}} = 0{,}2\times10^{22}\,,$$

on voit que l'intensité de présence électrique de l'électron est *beaucoup plus grande* que son intensité de présence matérielle. Ceci n'est en somme qu'une traduction du fait que le rapport $F_g/F_e$ des forces gravifiques et électrostatiques agissant sur un électron se trouvant dans un champ gravifique et électrostatique produit par des masses $M$ et des chargos $Q$ comparables est beaucoup plus petit que l'unité. On a en effet:

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{(m_0)_e\sqrt{K}}{e} = 4{,}9\times10^{-22}$$

si $M\sqrt{K}/Q=1$.

*Moments magnétiques du neutron et du proton.* Comme deuxième application de la formule fondamentale (28) nous allons maintenant analyser le cas du neutron et du proton. On sait que le moment magnétique du neutron n'est pas nul malgré l'absence de charge électrique et que sa valeur est donnée par:

$$a_N\,\frac{e h}{4\pi\,(m_0)_e\,c}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_N}$$

$(m_0)_N$ étant la masse propre du neutron et $a_N$ un coefficient numérique égal à $-1{,}911$ d'après les déterminations les plus récentes. La valeur négatice de $a_N$ signifie que le moment magnétiqne du neutron est antiparallèle à son spin. Comme ce spin a les valeurs $\pm h/4\pi$, la formule (29) donne:

$$|\,a_N\,|\,\frac{e h}{4\pi\,(m_0)_e\,c}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_N} = 2\bar{\lambda}^2\,\frac{(m_0)_e}{ec}\,K\gamma\,\frac{h}{4\pi}$$

c'est-à-dire

$$\bar{\lambda}_N^2\,\gamma_N = \frac{|\,a_N\,|}{2}\,\frac{e^2}{(m_0)_e^2\;K}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_N}$$

les indices $N$ du premier membre indiquant qu'il s'agit des valeurs de $\lambda$ et de $\gamma$ pour le neutron. On voit donc que dans le cas du neutron il faut utiliser la solution négative de (21′) pour la constante $\xi$.

Remarquons maintenant que le moment magnétique du proton doit être la somme du moment magnétique qu'aurait le proton s'il n'avait pas de charge et du moment magnétique qui est dû exclusivement à cette charge douée de spin. Le moment magnétique $(M_{\text{magn}})_P$ du proton doit donc avoir la valeur :

$$(M_{\text{magn.}})_P = a_P \frac{eh}{4\pi\,(m_0)_e\,c}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_P} + \frac{eh}{4\pi\,(m_0)_e\,c}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_P}.$$

La formule (29), appliquée au moment magnétique du proton engendré par son spin $(\pm h/4\pi)$ *indépendamment de sa charge électrique*, donne avec la valeur positive (21′) de $\xi$:

$$\bar{\lambda}_P^2\,\gamma_P = \frac{a_P}{2}\,\frac{e^2}{(m_0)_e^2\,K}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_P},$$

ou bien:

$$(34)\qquad \bar{\lambda}_P^2\,\gamma_P \cong \frac{a_P}{2}\,\frac{e^2}{(m_0)_e^2\,K}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_N} = \frac{a_P}{|\,a_N\,|}\,\bar{\lambda}_N^2\,\gamma_N,$$

puisque la masse propre du proton est presque égale à la masse propre du neutron. En supposant que la densité et la vitesse de rotation ont une symétrie sphérique ou sont constantes dans les sphérules neutroniques et protoniques, ce qui est naturel puisque ces particules se comportent comme des particules élémentaires [bien qu'étant formées par la fusion d'électrons et de microélectrons [1]], il faut poser $\gamma_P=\gamma_N=1$, de sorte que:

$$a_P = |\,a_N\,| \left(\frac{\lambda_P^0}{\lambda_N}\right)^2,$$

et compte tenu du fait que $\xi<0$ pour le neutron et $>0$ pour le proton, le moment magnétique du proton sera donc donné par:

$$(M_{\text{magn}})_P = \frac{eh}{4\pi\,(m_0)_e\,c}\,\frac{(m_0)_e}{(m_0)_P}\left[\,|\,a_N\,|\left(\frac{\lambda_P^0}{\lambda_N}\right)^2 + 1\right],$$

ou bien en petits magnétons de Bohr:

$$(M_{\text{magn}})_P = 1 + |\,a_N\,|\left(\frac{\lambda_P^0}{\lambda_N}\right)^2.$$

Mais on a d'après $(10a)$:

$$(\lambda_P^0)^2 = \left[\frac{\sum_1^4{}_m\,(\Phi_{m1}^{(0)})^2}{\sum_1^4{}_m\,\Psi_{m1}^2}\right]_P\ ;\qquad \lambda_N^2 = \left[\frac{\sum_1^4{}_m\,\Phi_{m1}^2}{\sum_1^4{}_m\,\Psi_{m1}^2}\right]_N$$

(l'indice 0 qui affecte les $\Phi_{m1}$ dans l'expression de $\lambda_P^2$ sert à rappeler qu'il s'agit des fonctions d'onde indépendamment de la charge électrique du proton). Comme l'intensité de présence matérielle du proton doit être pratiquement égale à l'intensité de présence matérielle du neutron puisque ces deux particules ont presque la même masse, on a simplement:

$$\left(\frac{\lambda_P^{(0)}}{\lambda_N}\right)^2 = \frac{\sum_1^4{}_m\,(\Phi_{m1}^{(0)})_P^2}{\sum_1^4{}_m\,(\Phi_{m1})_N^2} = \frac{(\mathcal{J}_e^{(0)})_P}{(\mathcal{J}_e)_N} = k,$$

$(\mathcal{J}_e^{(0)})_P$ et $(\mathcal{J}_e)_N$ désignant les intensités de présence électriques du proton (*abstraction faite de sa charge*) et du neutron. Le rapport ci-dessus doit donc être voisin de l'unité. Il doit cependant être légèrement inférieur à l'unité puisque, quand on fait abstraction de sa charge, le proton manifeste sa présence électrique d'une manière légèrement moins intense que le neutron, par suite de l'influence de l'énergie de pression du «fluide électrique» sur le tenseur de densité d'énergie-quantité de mouvement électrique $U_{ik}$ (voir dans *Port. Math.* vol. 5, loc. cit., p. 163, l'expression de ce tenseur en fonction de la densité de charge et des tensions du fluide électrique). Dans ces conditions, la formule (36) donne pour le moment magnétique du proton avec $|\,a_N\,| = 1{,}911$:

$$(M_{\text{magn}})_P = 1 + 1{,}911\,k$$

$k$ étant un coefficient numérique légèrement inférieur à l'unité. Pour avoir la valeur expérimentale 2,785 il suffit de poser $k=0{,}934$. On voit que l'explication des moments magnétiques du neutron et du proton est possible par la formule (28) grâce essentiellement au fait, démontré plus haut, qu'à une seule solution $g_{ik}$ pour la métrique interne relative à un tenseur donné de densité d'énergie-quantité de mouvement matérielle dans un domaine quasi statique, correspondent a priori deux solutions pour la métrique externe $\omega_{ik}$, ces deux solutions ne différant que par leur signe.

*Application astrophysique.* Dans un travail récent [1], M. Blackett a trouvé empiriquement que le moment magnétique $M_{\text{magn}}$ de la Terre, du Soleil et de l'étoile 78 Virginis (l'une des seules étoiles dont on a déterminé (Babcock) jusqu'à présent le champ magnétique par voie spectroscopique) est proportionnel à leur moment de rotation $M_{\text{rot}}$ conformément à la formule

$$(37)\qquad M_{\text{magn}} = \beta\,\frac{\sqrt{K}}{2c}\,M_{\text{rot}},$$

$\beta$ étant un coefficient numérique voisin de 1/4. Le point important est la constance du rapport $M_{\text{magn}}/M_{\text{rot}}$ pour les trois astres examinés et ce résultat découle immédiatement de notre formule (28) appliquée à l'échelle macroscopique [2]. Par la comparaison de la

(1) La théorie des particules fondamentales lourdes (neutrons protons, mésons), considerées comme le résultat de la fusion d'électrons et microélectrons, fait l'objet d'un travail qui paraîtra bientôt.

(1) *Nature,* 159 (1947), pp. 658-666.

(2) Des mesures récentes de Babcock pour d'aurtes étotles confirment (37).

relation (28) et de (37) on trouve immédiatement, compte tenu de (21'), que la valeur $\bar{\lambda}_m$ de $\bar{\lambda}$ qui convient à l'échelle macroscopique est la suivante

$$(38) \qquad \bar{\lambda}_m^2 = \frac{1}{4}\,\frac{\beta}{\gamma}\,\frac{e}{(m_0)_e\sqrt{K}}\,.$$

Le coefficient $\beta$ de M. Blackett subit une légère influence de la non-uniformité spatiale de la densité de l'astre et de la vitesse angulaire de rotation de ses éléments matériels. Il en est de même, comme nous l'avons vu, de notre coefficient $\gamma$ et il est permis de supposer que $\beta/\gamma \cong 1$ pour les trois astres analysés, surtout pour les deux astres fluides: le Soleil et l'étoile 78 Virginis. La comparaison de la relation (38) et de (31) donne:

$$(39) \qquad \lambda_m^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{\beta}{\gamma}\left(\frac{\chi}{\chi_0}\right)^{1/4}\lambda_e \cong \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\lambda_e\,,$$

$\lambda_e$ étant la valeur de la constante fondamentale $\lambda$ qui convient à l'échelle électronique. Il est clair que la relation (39) doit avoir une signification physique profonde, puisque ce résultat provient évidemment de l'influence sur les fonctions d'onde du passage de l'échelle électronique à l'échelle macroscopique dans les équations des valeurs propres (8) et (1) des opérateurs laplaciens de la métrique interne et externe [1].

Octobre, 1947.

---

[1] Remarquons que (29) montre qu'un même $M_{rot}$ est compatible avec deux $M_{magn}$ égaux et de signes contraires, de sorte que $\beta$ peut être négatif. Ce résultat, joint à une éventuelle variation de $\lambda$ quand $\gamma M_{rot}$ est fonction du temps, expliquerait que certaines étoiles puissent présenter un renversement de polarité au cours d'un «cycle».

# MOVIMENTO CIENTÍFICO

## ISTITUTO ROMANO DI CULTURA MATEMATICA

Este centro de estudos pedagógicos a que nos referimos no número anterior iniciou em 31 de Janeiro de 1948 o seu quarto ciclo anual de conferências. Duma carta circular enviada a grande número de professores transcrevemos o programa das conferências:

31 de Janeiro — *G. Fano.* Matemáticos e filósofos;

14 de Fevereiro — *U. Bini*, *L. Lombardo Radice* e *E. Monferrini.* Debate sobre o tema: É lícito ignorar a matemática?

28 de Fevereiro — *R. Roghi*, *T. Viola*, *M. Tereza Zapelloni.* Debate sobre o tema: O ensino da algebra nas escolas secundárias.

13 de Março — *M. Ageno*, *A. Fraiese* e *M. Manacorda.* Debate sobre o tema: Relações entre o ensino da matemática e das outras disciplinas nas escolas secundárias.

10 de Abril — *R. Giannarelli.* A preparação dos professores de matemática.

24 de Abril — *Emma Castelnuovo*, *G. Cerocchi* e *A. Perna.* Debate sobre o tema: O ensino da geometria nas escolas secundárias.

15 de Maio — *G. Colonnetti.* O valor formativo e humanístico dos ensinamentos da matemática e da física nas escolas secundárias.

Os quatro debates servem também para retomar e enquadrar os assuntos e idéias expostos nas conferências realizadas nos anos precedentes e nas discussões que se seguiram.

## UNIÃO MATEMÁTICA INTERNACIONAL

A Sociedade Matemática de França promoveu uma reunião de matemáticos de vários países com o objectivo de reorganizar a União Matemática Internacional, dissolvida no Congresso de Zurique de 1932, e solicitou a representação da Sociedade Portuguesa de Matemática. A Direcção da S. P. M. tendo julgado útil a reorganização da U. M. I. pediu ao sócio Dr. António Gião, então em Paris, para a representar.

A reunião teve lugar em 24 de Junho de 1947, na Casa da U. N. E. S. C. O. e foi presidida pelo Prof. Chatelet (França). A ela assistiram os seguintes matemáticos: Balanzat (Argentina), Bureau (Bélgica), H. Bohr e B. Jessen (Dinamarca), P. Belgodère, Chapelon, A. Denjoy, Janet, G. Julia, Mandelbrojt e Valiron (França), Bruins e Van der Corput (Holanda), Nikodym (Polónia), A. Gião (Portugal), Sergescu (Roménia), de Beurling e Carleman (Suécia), Ostrowski, Plancherel e de Rham (Suíça), Compton, Lyndon, Salem, Whitney e Wiener (E. U. A.) e como representantes da U. N. E. S. C. O. os Drs. Establier, Laves e Malina.

Não foi completamente atingido o objectivo proposto pelo que ficou decidido retomar o assunto em discussão em reuniões posteriores.