SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

A Direcção eleita para o biénio 1947-48 não poude, por motivos alheios à sua vontade, realizar o programa de trabalhos apresentado aos sócios na parte relativa a comunicações, conferências e colóquios. A sua actividade limitou-se, assim, à publicação do Boletim da S. P. M., como já foi referido no n.º 34 de *Gazeta de Matemática* e à tradução da obra fundamental de Van der Waerden, *Álgebra Moderna* (2.ª ed. alemã). Deste trabalho encarregou-se o sócio Dr. Hugo B. Ribeiro como lhe foi pedido pela Direcção anterior. Encontra-se no prelo o 1.º fascículo do vol. 1 abrangendo 5 capítulos (Números e conjuntos, Grupos, Anéis e corpos, Funções racionais inteiras e Teoria dos corpos), devendo a publicação estar concluida dentro de 3 meses.

A Direcção reconheceu também as vantagens que adviriam à Sociedade do estabelecimento dum intercâmbio no plano cultural com Sociedades congéneres estrangeiras. Assim aceitando a sugestão do Secretário da Sociedade Matemática de França, Paul Belgodère, também sócio da S. P. M., foi elaborado e discutido um acordo de reciprocidade de regalias entre os membros das duas sociedades (redução de quotas para os membros duma sociedade admitidos como sócios da outra e redução de preço para certas publicações matemáticas).

Oportunamente a Direcção estudará outros aspectos do problema de intercâmbio e esforçar-se-á por estabelecer acordos análogos com outras Sociedades, nomeadamente com a Real Sociedade Matemática Espanhola e a Sociedade Matemática de S. Paulo.

Brevemente será distribuído um novo número do Boletim com colaboração dos sócios Maurice Fréchet, António Gião, G. Viguier e de Enzo Aparo.

COLABORADORES DA GAZETA DE MATEMÁTICA

A *Gazeta de Matemática* tem o prazer de comunicar aos seus leitores que a Redacção conta mais dois colaboradores estrangeiros, os Profs. Emma Castelnuovo, de Roma, e Luiz Freire, de Recife. A nossa revista incluiu já, no n.º 33, colaboração da distinta professora italiana, que muito apreciámos, e num próximo número publicar-se-á um artigo do novo colaborador, professor L. Freire, que teremos o prazer de ler. Regosijamo-nos por contribuir assim para o estreitamento das relações culturais no campo da matemática com outros países, e podermos, mais fàcilmente, conhecer e divulgar algumas das recentes conquistas e iniciativas progressivas no campo científico e pedagógico fora de Portugal.

—Dois dos nossos colaboradores e amigos ausentaam-se para o estangeiro privando temporàriamenter o meio matemático português da sua tão valiosa cooperação. Referimo-nos ao Doutor Hugo B. Ribeiro, que se encontra em Berkeley, Califórnia, desde o início do presente ano lectivo, a convite do Departamento Matemático da Universidade, desempenhando actualmente as funções de «lecturer», e ao Doutor Alfredo Pereira Gomes, agora em Paris, como bolseiro do «Centre National de la Recherche Scientifique» onde prossegue as suas investigações sob a orientação dos professores Fréchet e Denjoy.

Se sentimos bastante a sua ausência e lastimamos a perda do auxílio prestado às nossas tarefas quotidianas continuamos pensando que contribuem para fazer, no estrangeiro, a melhor propaganda cultural portuguesa.

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

UM PROBLEMA DE GEOMETRIA ELEMENTAR

DETERMINAÇÃO, POR MEIO GEOMÉTRICO, DO RAIO DA CIRCUNFERÊNCIA CIRCUNSCRITA A UM PENTÁGONO REGULAR DE LADO CONHECIDO

*por **Mário da Silva Reis***

1. Dado o lado do pentágono regular $l_5 = \overline{PQ}$ (fig. 1), construa-se uma circunferência que tenha esse lado por diâmetro. Numa das extremidades deste diâmetro faça-se centro e trace-se uma nova circunferência de raio igual ao lado do pentágono dado. Levante-se nesse mesmo ponto uma perpendicular ao diâmetro, $\overline{QS}$. Considere-se a recta $\overline{SO}$, definida pelo ponto S e pelo centro da primeira circunferência.

A recta $\overline{SO}$ intersecta a circunferência de diâmetro $\overline{PQ}$ no ponto R; o segmento $\overline{PQ}$ é o raio da circunferência procurado.

2. *Demonstração.* Pretende demonstrar-se que

$$\overline{PR}=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,l_5.$$

Por construção, tem-se

$$\overline{PQ}\perp\overline{SQ}\,,\ \overline{RT}\perp\overline{SQ}\,,\ \overline{OP}=l_5/2\quad\text{e}\quad\overline{SQ}=l_5\,.$$

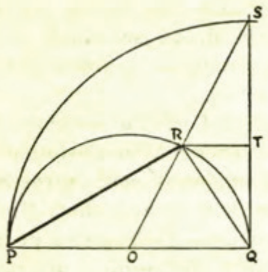

Fig. 1

Pelo teorema de Pitágoras

$$\overline{OS}^2=\overline{OQ}^2+\overline{QS}^2=l_5^2/4+l_5^2=5l_5^2/4$$

e

$$\overline{OS}=\sqrt{5}\,l_5/2\,;$$

observando a figura vê-se que:

$$\overline{RS}=\overline{OS}-\overline{OR}=\sqrt{5}\,l_5/2\quad l_5/2=(\sqrt{5}-1)\,l_5/2\,;$$

Pelo teorema de Thales temos ainda:

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{OS}}=\frac{\overline{ST}}{\overline{SQ}}$$

donde resulta

$$\overline{ST}=\frac{\overline{RS}\cdot\overline{SQ}}{\overline{OS}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\,l_5\,;$$

analisando a figura, vemos também que

$$\overline{QT}=\overline{SQ}-\overline{ST}=l_5-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}\,l_5=\frac{1}{\sqrt{5}}\,l_5\,;$$

recorrendo de novo ao teorema de Thales

$$\frac{\overline{RT}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{ST}}{\overline{QS}}\quad\text{ou}\quad\frac{\overline{RT}}{l_5/2}=\frac{\overline{ST}}{l_5}$$

donde, evidentemente $\overline{RT}=\overline{ST}/2$.

Temos, finalmente, todos os elementos para justificar a construção, pois a aplicação do teorema de Pitágoras dá:

$$\overline{PR}^2=\overline{PQ}^2-\overline{RQ}^2=\overline{PQ}^2-(\overline{RT}^2+\overline{TQ}^2)=$$

$$=\overline{PQ}^2-(\overline{ST}^2/4+\overline{TQ}^2)=l_5^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\right)^2 l_5^2-$$

$$-\frac{1}{5}\,l_5^2=\frac{4}{10-2\sqrt{5}}\,l_5^2$$

ou seja, como queríamos provar

$$\overline{PR}=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\,l_5\,.$$

3. A demonstração que acabo de fazer é, como se vê, analítica. Dou, a seguir, duas demonstrações feitas por colegas meus da Faculdade de Ciências do Porto, demonstrações essas de carácter geométrico.

a) Demonstração de Mário Rui Flores dos Santos (Preparatórios de Engenharia). Na fig. 2, $\overline{DE}$ é,

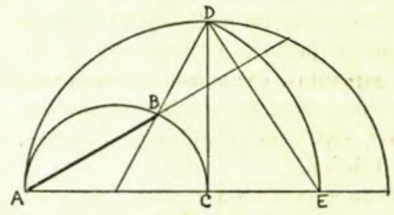

Fig. 2

como é sabido, o lado do pentágono inscrito na circunferência de lado $\overline{AC}$. Se conseguirmos provar que os triângulos ABC e DCE são semelhantes então $\overline{AB}$ será o raio da circunferência na qual se pode inscrever o pentágono de lado $\overline{AC}$.

Por construção:

$$\overline{BC}//\overline{DE}\,;\ \overline{AB}\perp\overline{BC}\,;\ \overline{AB}\perp\overline{DE}\,;\ \overline{AC}\perp\overline{CD}\,.$$

Por consequência os ângulos BAC e CDE são iguais, ou seja, os triângulos ABC e DCE, rectângulos res-

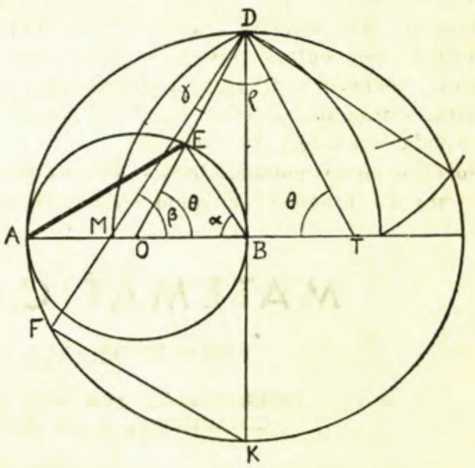

Fig. 3

pectivamente em B e C, são semelhantes, como queríamos provar. Nestas condições

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

o que mostra o rigor da construção indicada.

b) Demonstração de António Andrade Guimarães (Licenciatura em Ciências Matemáticas).

Tese: $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{DB}}{\overline{DM}}$ (fig. 3).

Por construção $\overline{DM}=l_5$ (na circunferência de raio $\overline{BD}$); $\overline{AB}=l'_5$ (na circunferência de raio $\overline{OA}$). Da figura tira-se $M\widehat{D}T=T\widehat{M}D$ e ainda $O\widehat{E}B=O\widehat{B}E$. Vamos provar que $O\widehat{B}E=D\widehat{M}B$ porque então fica provada a tese. Para isso, façamos $O\widehat{B}E=\alpha, E\widehat{O}B=\theta$, $D\widehat{M}B=\beta, M\widehat{D}O=\gamma$, e $O\widehat{D}T=\rho$.

Provar que $\beta=\alpha$ é o mesmo que provar a igualdade $\beta=(\pi-\theta)/2$; ora $\theta=\beta+\gamma$, por ser ângulo externo do triângulo DOM; e também $2\theta=\pi-\beta$, bem como $\rho+\gamma=\beta$. Portanto: $2\theta=\pi-\beta+\gamma$ e ainda

$$2\theta=\pi-\beta-\beta+\theta$$

donde

$$\beta=(\pi-\theta)/2 \quad \text{q. e. d.}$$

Conclui-se, pois, a semelhança dos triâugulos e então

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DM}}$$

o que prova ser $\overline{AE}$, de facto, o raio da circunferência cujo pentágono regular tem por lado $\overline{AB}$.

PONTOS DE EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES — 1947

Exames de aptidão para frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia — 1947.

2546 — Dê a forma de um polinómio ordenado, de coeficientes inteiros, igualado a zero, à equação

$$(1-x/3)^3-(1/2-x^2)^2/6=3-(1-x)/2$$

R: $36x^4+8x^3-108x^2+108x+333=0$.

2547 — Resolva a inequação

$$2(x^2-3x-1)(3x^2-x+1)>0$$

R: *Os zeros do factor* $3x^2-x+1$ *são números complexos, por isso este factor é sempre positivo qualquer que seja o valor real atribuido a* x; *basta então que seja* $x^2-3x-1>0$; *os zeros do trinómio* x^2-3x-1 *são os valores* $(3+\sqrt{13}):2$ *e* $(3-\sqrt{13}):2$; *então o trinómio é positivo para valores de* x *tais que* $x>(3+\sqrt{13}):2$ *ou* $x<(3-\sqrt{13}):2$.

2548 — Dispondo de umas tábuas que lhe dêem os logaritmos, com o mínimo de 5 algarismos decimais, dos números e das funções goniométricas, determine, com a aproximação que aqueles lhe permitirem, os valores de α que satisfazem à equação

$$\cot g^2\alpha=-\frac{0{,}27562}{\cos 342^\circ 45' 20''}$$

R: *Tem-se*

$$2\log\cot g\,\alpha=\log 0{,}27562+\mathrm{colg}\cos 35^\circ 14' 40''=$$
$$=\bar{1}{,}44031+0{,}08795=0{,}52826$$

donde $\log\cot g\,\alpha=0{,}26413$ *e, por isso,* $\alpha=28^\circ 33' 58''$.

2549 — Diga o que é um triedro. Enuncie as relações que conhece entre os seus elementos.

2550 — Escreva o 5.º termo do desenvolvimento de $(a^3\sqrt{x}-x^{-2})^7$ e simplifique-o.

R: $T_5=\binom{7}{4}(a^3\sqrt{x})^3\cdot(x^{-2})^4=35a^9x^{-7}\sqrt{x}$.

2551 — Construa um triângulo sendo dada a base e as alturas correspondentes aos outros dois lados.

Que método ou métodos geométricos empregou para a sua resolução? O problema tem sempre solução? Justifique a resposta. R: *Seja* $\overline{AB}$ *o lado dado e* h_a *e* h_b *as alturas relativas aos outros dois lados. Com centros em* A *e* B *trace duas circunferências de raios respectivamente* h_a *e* h_b. *Dos pontos* A *e* B *tire as tangentes às duas circunferências, respectivamente, de centros* B *e* A. *A intersecção destas tangentes é o terceiro vértice* C *do triângulo. O problema tem uma solução se* A *e* B *são ambos exteriores, ou um deles exista sobre uma das circunferências, de centros respectivamente* B *e* A. *Não tem solução se o raio* h_a *ou o raio* h_b *são maiores do que o lado* $\overline{AB}$.

Soluções dos n.os 2546 a 2551 de J. da Silva Paulo.

I. S. C. E. F. — Ponto n.º 3 — 10 de Outubro de 1947

NOTA — É obrigatória a resolução de 4 pontos

I — Aritmética

2552 — Números primos; decomposição em factores primos; divisores de um número composto.

2553 — Dada a fracção 39/91, determine uma fracção que lhe seja igual e tal que a soma dos seus termos seja um múltiplo de 15. Das soluções possíveis escolha a fracção de termos menores. R: 9/21.

II — Cálculo Numérico

2554 — Simplifique a expressão

$$E=\frac{\operatorname{tg}(\pi/2+2x)-\cot g(2x)}{\operatorname{sen}(2j-5\pi/2)}$$

e calcule o seu valor numérico para $x=18^\circ 30' 41''$ e $j=22^\circ 17' 52''$. (*Utilize logaritmos*). R: Tem-se $E=(2\cot g\,2x)/\cos 2j$, *donde* $E=3{,}724$.

III — Algebra

2555 — Dada a equação $(k-2)\,x^2-(k+2)\,x+2k=0$ determine k de modo que a soma dos quadrados das raízes seja igual a 13. R: *Sendo* x_1 *e* x_2 *as raízes, deverá ser* $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2\,x_1\,x_2=13$. *Tendo em conta os valores de* x_1+x_2 e $x_1\,x_2$ *obtém-se* $k=(-3\pm\pm\sqrt{3}\,i)/2$.

IV — Geometria Plana

2556 — Divisão da circunferência em partes iguais; polígonos regulares inscritos; determinação dos seus perímetros expressos no raio da circunferência circunscrita.

2557 — Duas circunferências do mesmo raio r são descritas de modo que cada uma passa pelo centro da outra. Calcule, expressa em r, a área do quadrilátero cujos vértices são os centros das duas circunferências e os seus pontos de encontro. R: *Trata-se dum losango de lado* r, *cuja área é* $r^2\cdot\sqrt{3}/2$.

V — Geometria no Espaço

2558 — Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo rectângulo em torno da hipotenusa, sabendo que um dos ângulos do triângulo é de 60° e que a hipotenusa é igual a $2\,a$. R: *O triângulo rectângulo considerado é metade dum triângulo equilátero de lado* $2a$, *portanto, de catetos* a e $a\sqrt{3}$ *e altura relativa à hipotenusa,* $a\sqrt{3}/2$. *O sólido gerado é constituído por dois cones de revolução de base comum, de raio* $a\sqrt{3}/2$ *e geratrizes* a *e* $a\sqrt{3}$. *O seu volume é* $V=\pi a^3/2$.

VI — Trigonometria

2559 — Quais são os ângulos compreendidos entre 3π e 5π radianos e cujo seno é igual a $-\sqrt{2}/2$? R: $13\pi/4$ e $15\pi/4$.

Soluções dos n.os 2552 a 2559 de Orlando Morbey Rodrigues

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

I — ESCOLAS PORTUGUESAS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra — 1.° Exame de frequência — 1946-47 — 1.° Ponto.

2560 — Calcular a soma da série de termo geral $u_n=n/4^n$ com erro inferior a 10^{-2}. R: *Devem somar-se cinco termos da série.* $S=0{,}44$.

2561 — Primitivar a função $y=(1+\operatorname{sen} x)/(1+\cos x)$. R: *Multiplicando ambos os membros da fracção por* $1-\cos x$, *conclui-se logo que:* $Py=\log|\operatorname{sen} x|-\log|\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x|-(\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x)+C$.

2562 — Primitivar a função $y=(x^2+1)/(x+1)^3$. R: *O método de Fubini conduz a* $Py=\log|x+1|+\dfrac{1}{4}\,\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}+C$.

2.° Ponto

2563 — Determinar a natureza do produto infinito de termo geral $u_n=1+\left(1+\dfrac{0{,}5}{n}\right)^{n^2}$. R: *A natureza do produto infinito é a da série corrospondente de termo geral* $v_n=(1+0{,}5/n)^{n^2}$. *Pelo critério de Cauchy, conclui-se a divergência.*

2564 — Primitivar a função $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x+1}$.
R: *Primitivando por partes vem:*

$$Py=\sqrt{x}\operatorname{arc\,sec}\sqrt{x+1}-\log\sqrt{x+1}+c.$$

2565 — Primitivar a função $y=(3x^2-1)/(x^3-x)$. R: *Pelo método de Fubini tem-se* $Py=\log|x|+\log|x+1|+\log|x-1|+C$.

F. C. C. — 2.° Exame de frequência — 1946-47 — 1.° Ponto.

2566 — Escrever a equação das assíntotas da curva de equação $y=x\,th\,x$. R: *Pode escrever-se* $y=x\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ *e tem-se* $m=\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{y}{x}=1$ *e* $k=\lim\limits_{x=\infty}(y-mx)=0$. *Logo a equação da assíntota é* $y=x$.

2567 — De que natureza é o sistema

$$x+3y+2z=0,\quad x-y=0,\quad 9x-y+4z=0\,?$$

R: *Compatível e indeterminado.*