III — Algebra

2555 — Dada a equação $(k-2)\,x^2-(k+2)\,x+2k=0$ determine k de modo que a soma dos quadrados das raízes seja igual a 13. R: *Sendo* x_1 *e* x_2 *as raízes, deverá ser* $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2\,x_1\,x_2=13$. *Tendo em conta os valores de* x_1+x_2 e $x_1\,x_2$ *obtém-se* $k=(-3\pm\pm\sqrt{3}\,i)/2$.

IV — Geometria Plana

2556 — Divisão da circunferência em partes iguais; polígonos regulares inscritos; determinação dos seus perímetros expressos no raio da circunferência circunscrita.

2557 — Duas circunferências do mesmo raio r são descritas de modo que cada uma passa pelo centro da outra. Calcule, expressa em r, a área do quadrilátero cujos vértices são os centros das duas circunferências e os seus pontos de encontro. R: *Trata-se dum losango de lado* r, *cuja área é* $r^2\cdot\sqrt{3}/2$.

V — Geometria no Espaço

2558 — Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo rectângulo em torno da hipotenusa, sabendo que um dos ângulos do triângulo é de 60° e que a hipotenusa é igual a $2\,a$. R: *O triângulo rectângulo considerado é metade dum triângulo equilátero de lado* 2a, *portanto, de catetos* a *e* $a\sqrt{3}$ *e altura relativa à hipotenusa,* $a\sqrt{3}/2$. *O sólido gerado é constituido por dois cones de revolução de base comum, de raio* $a\sqrt{3}/2$ *e geratrizes* a *e* $a\sqrt{3}$. *O seu volume é* $V=\pi a^3/2$.

VI — Trigonometria

2559 — Quais são os ângulos compreendidos entre 3π e 5π radianos e cujo seno é igual a $-\sqrt{2}/2$? R: $13\pi/4$ e $15\pi/4$.

Soluções dos n.os 2552 a 2559 de Orlando Morbey Rodrigues

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

I — ESCOLAS PORTUGUESAS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra — 1.º Exame de frequência — 1946-47 — 1.º Ponto.

2560 — Calcular a soma da série de termo geral $u_n=n/4^n$ com erro inferior a 10^{-2}. R: *Devem somar-se cinco termos da série.* $S=0{,}44$.

2561 — Primitivar a função $y=(1+\operatorname{sen} x)/(1+\cos x)$. R: *Multiplicando ambos os membros da fracção por* $1-\cos x$, *conclui-se logo que:* $Py=\log|\operatorname{sen} x|-\log|\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x|-(\operatorname{cosec} x+\operatorname{cotg} x)+C$.

2562 — Primitivar a função $y=(x^2+1)/(x+1)^3$. R: *O método de Fubini conduz a* $Py=\log|x+1|+\frac{1}{4}\,\frac{2x+1}{(x+1)^2}+C$.

2.º Ponto

2563 — Determinar a natureza do produto infinito de termo geral $u_n=1+\left(1+\frac{0{,}5}{n}\right)^{n^2}$. R: *A natureza do produto infinito é a da série corrospondente de termo geral* $v_n=(1+0{,}5/n)^{n^2}$. *Pelo critério de Cauchy, conclui-se a divergência.*

2564 — Primitivar a função $y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x+1}$.

R: *Primitivando por partes vem:*

$$Py=\sqrt{x}\operatorname{arc\,sec}\sqrt{x+1}-\log\sqrt{x+1}+c.$$

2565 — Primitivar a função $y=(3x^2-1)/(x^3-x)$. R: *Pelo método de Fubini tem-se* $Py=\log|x|+\log|x+1|+\log|x-1|+C$.

F. C. C. — 2.º Exame de frequência — 1946-47 — 1.º Ponto.

2566 — Escrever a equação das assíntotas da curva de equação $y=x\,th\,x$. R: *Pode escrever-se* $y=x\,\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ *e tem-se* $m=\lim\limits_{x=\infty}\dfrac{y}{x}=1$ *e* $k=\lim\limits_{x=\infty}(y-mx)=0$. *Logo a equação da assíntota é* $y=x$.

2567 — De que natureza é o sistema

$$x+3y+2z=0,\quad x-y=0,\quad 9x-y+4z=0\,?$$

R: *Compatível e indeterminado.*

2568 — Dados os elementos $a=120^\circ\,0'\,0''$, $b=108^\circ\,36'\,26''$ e $A=71^\circ\,23'\,34''$ de um triângulo esférico, determinar B e discutir o resultado. R: *Não existe triângulo esférico com os elementos dados.*

2.° Ponto

2569 — Para que valores de α e β a equação $(x^2+2\alpha xy+y^2+2y)(\alpha x^2+4xy+\beta y^2+2y)=0$ representa duas parábolas? R: $\alpha=\pm 1\,,\ \beta=\pm 4$.

2570 — Calcular pelo método de Newton duas aproximações da raiz de $x^3-2x+2=0$ compreendida no intervalo $(-2,\,-1)$. R: *1.ª aproximação:* $-1{,}8$; *2.ª aproximação:* $-1{,}77$.

2571 — Dados os elementos $a=80^\circ\,0'\,0''$, $b=120^\circ\,0'\,0''$ e $c=79^\circ\,19'\,15''$ de um triângulo esférico, calcular B. R: $B=123^\circ\,21'\,36''$.

Soluções dos n.^{os} 2560 a 2571 de L. Mendonça de Albuquerque.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 1.° exame de frequência (extraordinário) — 27 Março 1948.

2572 — Dada a função $\Phi(n)=\dfrac{\cos(1-n)\,\pi/2}{n}$.
a) Represente-a gràficamente para $n=1,2,\cdots,6$; *b*) Determine a de modo que exista uma ordem $n_0(\delta)$ tal que, para $n>n_0(\delta)$, se tenha

$$\left|\frac{\cos(1-n)\,\pi/2}{n}-a\right|<\delta$$

qualquer que seja $\delta>0$; *c*) considerando o conjunto A dos valores de n para os quais

$$\left|\frac{\cos(1-n)\,\pi/2}{n}-a\right|>0{,}01$$

e o conjunto B dos valores positivos de n que anulam $\operatorname{sen} n\pi/3$, determine $A+B$ e $A\cdot B$.

R: $$a=\lim\frac{\cos(1-n)\,\pi/2}{n}=0.$$

Como $\cos(1-2k)\,\pi=0$ *e* $\cos[1-(2k+1)]\,\pi/2=\pm 1$, *tem-se* $\left|\dfrac{\cos(1-n)\,\pi/2}{n}\right|>0{,}01$ *para os valores ímpares de* n *inferiores a* 100. *O conjunto* B *será constituído pelos múltiplos de* 3 *de modo que* $A+B=\{2l-1\,,3m\}$ $(1\le l\le 50)$ *e* $A\cdot B=\{3(2p-1)\}$ *com* $1\le p\le 17$.

2573 — Determine as equações dos lados e das diagonais e o perímetro do quadrado que tem como mediana o segmento $\overline{E(-2;2)\,F(2,2)}$ e a equação da bissectriz do ângulo obtuso formado por um qualquer dos lados com uma diagonal. R: *Equações dos lados:* $x+y=\pm 4$ *e* $x-y=\pm 4$; *diagonais*: $x=0$ *e* $y=0$, $P=16\sqrt{2}$; *bissectriz do ângulo do lado situado no 1.° quadrante com* OX: $y=(1+\sqrt{2})(x-4)$.

2574 — Algebrizou-se o conjunto E, formado pelos quatro elementos a,b,c,d, por intermédio de uma operação a que corresponde a tabela seguinte:

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	b
d	b	c	d	a

Verifique se o conjunto E assim algebrizado constitui ou não um grupo relativamente à operação considerada. R: *Como a unidade à esquerda,* a, *não é unidade à direita (o que resulta de se não verificar a propriedade associativa) o conjunto* E: *não constitui um grupo.*

2575 — Verifique que a sucessão assim definida: $u_1=\sqrt{2}$, $u_n=\sqrt{2+u_{n-1}}$ $(n\ge 2)$ é crescente e prove (por indução) que $u_n<2$. Calcule o seu limite. R: *Se* $u_p<2$, $u_{p+1}=\sqrt{2+u_p}<2$; *e como* $u_1<2$, *será* $u_n<2$ *para qualquer valor de* n. *A condição* $u_n>u_{n-1}$ *implica* $u_{n-1}^2-u_{n-1}-2<0$, *o que sempre se verifica por ser* $u_{n-1}<2$. *Provada assim a existência do limite, tem-se* $\lim u_n=\lim u_{n-1}=l$ *e* $\therefore$ $l=\sqrt{2+l}$ *donde* $l=2$.

Soluções dos n.^{os} 2572 a 2575 de F. R. Dias Agudo.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 1.° Exame de Frequência, 1947-48

2576 — Dada a função $\varphi(n)=\dfrac{5^n-1}{5^n+1}$: *a*) Determine o seu limite quando $n\to\infty$; *b*) Determine a ordem a partir da qual a diferença entre $\varphi(n)$ e o seu limite é, em valor absoluto, inferior a 0,001; *c*) Designando por A o conjunto dos valores de n para os quais essa mesma diferença é, em valor absoluto, superior a 0,001 e por B o conjunto dos valores de n para os quais é definida a função

$$\psi(n)=\frac{\operatorname{arc\,sec}(n-4)}{(n-1)(n-2)(n-3)}$$

verifique se A e B são complementares em relação ao conjunto dos inteiros positivos.

2577 — Determine as equações dos lados do losango de centro O (0,0) de vértice $A(0,4)$ e de diagonal menor, igual a 6. Considerando as mediatrizes dos seus 4 lados calcule a razão entre a área do losango e a da figura limitada por essas mediatrizes.

2578 — Verifique se o conjunto $E\,\{0,2,10^{1-n},\ 2-10^{1-n}\}$ é ou não fechado. Considere como conjunto fndamental o conjunto dos números reais.

2579 — Dada a sucessão de termos positivos $u_n=1/u_{n-1}$ onde u_1 é qualquer $\neq 1$: *a*) Estude a sua natureza; *b*) Estude a natureza das sucessões de termos gerais u_{n+1}/u_n e $\sqrt[n]{u_n}$ que dela se obtêm; *c*) Estude o caso $u_1=1$. Indicar os limites nos casos de convergência.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — 1.º Exame de frequência, 1947-48.

2580 — São dados: um plano α oblíquo, definido pelos traços, e um ponto $P \cdot / \alpha$. Determine o trajecto do raio luminoso que, partindo de P paralelamente a ν_0, se reflete sobre α paralelamente a φ_0. R: *Determine-se o simétrico* P_1 *de* P *em relação a* α. *Segundo as leis da reflexão, o prolongamento do raio reflectido deve passar por* P_1. *Conduza-se então por* P *um plano* $\nu // \nu_0$ *e por* P_1 *um plano* $\varphi // \varphi_0$: *a intersecção* I *dos três planos* α, ν, φ *é o ponto de incidência, que, unido com* P *e com* P_1, *dá o trajecto pedido.*

2581 — Dado um tetraedro $[ABCD]$, com $AB \perp \nu_0$ e $CD \perp \varphi_0$, determinar as projecções da esfera inscrita nêsse tetraedro. R: *O centro* O *da esfera será o ponto de intersecção dos bissectores dos diedros internos de* [ABCD]. *Consideremos o diedro* $C\widehat{AB}D$: *visto que a sua aresta* AB *é* $\perp \nu_0$, *o mesmo acontecerá com as suas faces e com o seu plano bissector; o traço horizontal deste plano bissector será pois a bissectriz do ângulo* $C' \hat{A}' D'$. *Anàlogamente, o traço vertical do bissector de* $A\widehat{CD}B$ *será a bissectriz de* $A'' \hat{C}'' B''$. *Estas duas bissectrizes coincidirão, respectivamente, com a projecção horizontal e com a projecção vertical da intersecção* r *dos bissectores considerados. Basta portanto achar a intersecção de* r *com o bissector de um outro diedro interno de* [ABCD], *para ter o centro* O *da esfera em questão, cujas projecções se determinam depois fàcilmente.*

2582 — São dados: uma recta d oblíqua, um triângulo [ABC] existente num plano oblíquo e uma recta $e \perp \nu_0$, que não passe por nenhum dos pontos A, B, C. Fazer rodar $[ABC]$ em torno de e, de modo que a sua sombra sobre ν_0, paralelamente a d, se reduza a um segmento de recta. R: *Para que a sombra do triângulo* [ABC] *sobre* ν_0, *paralelamente a* d *se reduza a um segmento de recta, é necessário e suficiente que o seu plano se torne paralelo a* d. *Determine-se pois a intersecção* I *de* e *com* ABC *e conduza-se por* I *a recta* $d_1 // d$. *Bastará agora fazer rodar o plano* ABC *em tôrno de* e, *de modo que o traço horizontal de* ABC *fique a passar pelo traço horizontal de* d_1. *(Duas soluções, uma ou nenhuma).*

2583 — São dados: um plano α oblíquo, definido por h_α e v_α, um ponto $P \cdot / \alpha$ e um tetraedro escaleno, assente por uma das faces em ν_0. Construir um tetraedro semelhante ao primeiro, com um dos vértices em P e a face oposta assente em α, ficando um dos lados desta face paralelo a ν_0. (A face do tetraedro pedido assente em α, deve ser semelhante à face do tetraedro dado, assente em ν_0). R: *Seja* [ABCD] *o tetraedro dado, com* $[ABC] -\!\!\cdot\!\!- \nu_0$. *Em tetraedros semelhantes, a razão entre alturas correspondentes a faces homólogas e igual à razão de semelhança. Determine-se pois a distância* d *de* P *a* α, *e considere-se um plano de nível* ν *cuja distância ao vértice* D *do tetraedro dado seja igual a* d; *pondo* $A_0 \equiv \nu \cdot AD$, $B_0 \equiv \nu \cdot BD$, $C_0 \equiv \nu \cdot CD$, *será* $[A_0 B_0 C_0 D]$ *um tetraedro igual ao pedido, com* $[A_0 B_0 C_0] \backsim [ABC]$. *Basta agora determinar a projecção ortogonal* P_1 *de* P *sobre* α *e construir sobre* α *(mediante um rebatimento sobre* ν_0*) um triângulo* $[A_1 B_1 C_1] = [A_0 B_0 C_0]$, *ficando por exemplo* $A_1 B_1 // h_\alpha$ *de modo que se tenha:* $\operatorname{dist}(A_1, P_1) = \operatorname{dist}(A'_0, D')$, $\operatorname{dist}(B_1, P_1) = \operatorname{dist}(B'_0, D')$, $\operatorname{dist}(C_1, P_1) = \operatorname{dist}(C'_0, D')$.

2584 — Dados dois pontos A, B distintos e uma recta t, colocados em posição genérica entre si e a respeito dos planos de projecção, determine sobre t um ponto P de modo que a distância de P a A esteja para a distância de P a B numa razão dada r. Execute o desenho para $r = 2$. R: *Faça-se rodar* B *em em torno de* t *de modo a colocá-lo sobre o plano* At. *O problema pode agora resolver-se, num rebatimento recorrendo a um teorema elementar de geometria plana. (Duas soluções, uma ou nenhuma).*

2585 — Dadas $r, s // \nu_0$, com um ponto comum M, determine o lugar geométrico dos pontos P tais que $\operatorname{dist}(P, M) = 2 \operatorname{dist}(P, r) = 3 \operatorname{dist}(P, s)$. Discussão. R: *Seja* P *um ponto genérico do lugar geométrico. Imaginando rebatidos sobre o plano* $\nu \equiv (r, s)$ *os dois planos* Pr *e* Ps, *haverá dois pontos* P_1, P_2 *sobre* ν *que representam* P *nesses rebatimentos, devendo ter-se:* $\operatorname{dist}(P_1, M) = \operatorname{dist}(P_2, M) = 2 \operatorname{dist}(P_1, r) = 3 \operatorname{dist}(P_2, s)$, *Isto indica o caminho a seguir: Tomem-se ao arbítrio* P_1, P_2 *sobre* ν *(no interior dos dois ângulos maiores formados por* r, s*), de modo que sejam verificadas as precedentes condições de distancias. O ponto* P, *transformado em* P_1 *e* P_2 *nos dois rebatimentos, poderá ser determinado (se existe) invertendo a técnica do rebatimento: as perpendiculares baixadas de* P_1, P_2, *respectivamente, sobre* r *e* s *devem encontrar-se em* P'; *a cota de* P *em relação a* ν *será, em valor absoluto, um dos catetos dum triângulo de rebatimento, de que o outro cateto é a distância de* P' *a* r' *e a hipotenusa a distância de* P'_1 *a* r'. *O número de pontos* P *nestas condições poderá ser* 2, 1 *ou* 0. *Unindo* P *com* M *tem-se o lugar geomé-*

trico pedido, que será portanto constituído por duas rectas, por uma recta ou só por M, *conforme o ângulo* $\widehat{r,s}$ *for menor, igual ou maior que*

$$\text{arc sen } 1/2 + \text{arc sen } 1/3 .$$

2586 — Dadas a, b, c oblíquas, tendo a, b um ponto comum e sendo c não complana com as primeiras, determine as projecções duma esfera com o centro sobre a recta c e tangente às rectas a, b.

2587 — Dada uma recta r oblíqua que não intersecte LT, conduzir por r um plano que faça com LT um ângulo dado. Discussão. R: *Por um ponto* M *qualquer de* r, *conduza-se* $t // LT$ *e um plano* $\alpha \perp v_0$, *que forme com* LT *o ângulo dado. Basta agora fazer rodar* α *em torno de* t, *de modo que* α *fique a conter a recta* r, *para o que pode utilizar-se uma mudança de plano que torne a recta* t *projectante* $(L_1T_1 \perp LT)$.

Soluções dos n.os 2580 a 2587 de J. Sebastião e Silva.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — 1.º Exame de frequência — 1946-47 — 1.º Ponto.

2588 — Primitivar a função

$$y = (x^4+8x+4)/[x^2(x^2+2x+2)] .$$

R: *Decompondo a fracção em elementos simples (ou aplicando o método de Fubini), vem*

$$Py = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4}\log(x^2+2x+2) - \frac{7}{2}\,\text{arctg}\,(x+1) + C .$$

2589 — Determinar os seis primeiros termos do desenvolvimento da função $y = \text{cosec}\, x \cdot \text{tag}\, x$ em série de potências de x. R: $y = 1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{13}{360}x^4 + \cdots$.

2590 — Em que pontos da curva $y = 1 - \text{sen}\, x$ se anula a segunda derivada direccional da função $f(x, y) = (x-y)^2$ segundo a direcção da normal? R: *Pontos de coordenadas* $(2k\pi, 1)$ *(com* k *inteiro).*

2.º Ponto

2591 — Primitivar a função

$$y = (x^5 - 8x^2 - 8x - 4)/[x^3(x^2+2x+2)^2] .$$

R: $$Py = \frac{1}{2x^2} + \frac{2x+4}{x^2+2x+2} + \frac{5}{2}\,\text{arctg}\,(x+1) + C .$$

2592 — Determinar quatro termos não nulos do desenvolvimento de $y = \text{arctg}\, x/(x^2 \,\text{sen}\, x)$ em série de potências de x. R:

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{6} + \frac{13}{90}x^2 + \frac{1}{30}x^4 + \cdots .$$

2593 — Sendo $u = xy + z$, com $x = \cos\varphi \cos\theta$, $y = \text{sen}\,\varphi \cos\theta$, $z = \text{sen}\,\theta$ calcular $\frac{\partial u}{\partial\varphi}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial\theta}$. R:

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi} = \cos^2\theta \cos 2\varphi \,;\; \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\,\partial\theta} = -\,\text{sen}\, 2\theta \cos 2\varphi .$$

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — 2.º Exame de frequência — 1946-47 — 1.º Ponto.

2594 — Determinar os extremos da função $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$. R: *A função dada tem como linhas de mínimos as rectas* $y + x = 0$ *e* $y - x = 0$.

2595 — Determinar o integral geral da equação diferencial $x \cos x \frac{dy}{dx} + y(x \,\text{sen}\, x + \cos x) = 1$.

R: *É uma equação linear de 1.ª ordem:* $y = (kx - 1)\sec x$.

2596 — Determinar a área interior à curva $\rho = \cos^2\theta$ e à circunferência $\rho = 3/4$. R: $(7\sqrt{3} - 2\pi)/64$.

2.º Ponto

2597 — Fazer a mudança de variáveis $\theta = \cos t$ na equação $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \frac{\theta}{1-\theta^2}\frac{d\rho}{d\theta} + \frac{\rho}{1-\theta^2} = 0$. R: $\frac{d^2\rho}{dt^2} + \rho = 0$.

2598 — Resolver o sistema

$$\begin{cases} x'' + y'' = 0 \\ x' + y' - x + y = t . \end{cases}$$

R: $x = c_1(t+2) + c_2 - (t+1)$ *e* $y = c_1 t + c_2$.

2599 — Calcular o integral duplo da função $f(x, y) = x + y$ na área limitada pelas linhas de equações $y = 0$, $y^2 = 2 - x$ e $y = \sqrt{3}\,x$. R: Tem-se

$$\iint (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{3}x} (x+y)\,dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} (x+y)\,dy = \frac{47}{60} + \frac{\sqrt{3}}{6} .$$

Soluções dos n.os 2588 a 2599 de L. Mendonça de Albuquerque.

F. C. P. — Cálculo — 2.º exame de frequência, 1947.

I

2600 — Determinar a linha integral solução da equação $y'' - 5y' + 6y = 4x^2 e^x$, que passa pelo ponto (0,7) *onde* $y' = 13$. R: *Fazendo* $y = ze^x$ *vem:* $z'' - 3z' + 2z = 4x^2$, $z_0 = 7$, $z'_0 = 6$. *Aplicando o método de Hea* *viside temos:* $\bar{z}=7/p+6/p^2+4/p^3$, *donde* $z=7+6x+2x^2$ *e* $y=(7+6x+2x^2)\,e^x$.

2601 — Integrar a equação $xy'+y=x\log x$. R: *Temos* $y=c/x+\log x\cdot x/2-x/4$.

II

2602 — Calcular $\displaystyle\iint_D \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\rho\,d\theta$ começando por considerar θ constante. O domínio D situado no 1.° quadrante é limitado pelas linhas $\theta=0$, $\theta=\pi/5$, $\rho=\sqrt{2}$ e $\rho^2=1/\cos 2\theta$. R: $\displaystyle I=\int_0^{\pi/5}\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta\int_{1/\sqrt{\cos 2\theta}}^{\sqrt{2}} d\rho=$

$$=\int_0^{\pi/5}\sqrt{2}\,\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta-\int_0^{\pi/5}\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\cos 2\theta}\,d\theta=\Big[-\sqrt{2\cos 2\theta}+$$
$$+1/2\log\cos 2\theta\Big]_0^{\pi/5}=\sqrt{2}-\sqrt{2\cos 2\pi/5}+1/2\log\cos 2\pi/5.$$

2603 — Determinar as equações da normal principal da linha: $x^y+z=3$, $x^2+y^2+z^2=6$ no ponto $(1,1,2)$. R: *Temos* $x'=1$; $y'=1$; $z'=-1$; $x''=0$; $y''=1$; $z''=-2$. As equações da normal principal são:

$$\begin{cases} X+Y-Z=0 \\ X-2Z-Z+3=0. \end{cases}$$

III

2604 — Integrar a equação

$$(2x^2-2x+1)\,y''-2\,(2x-1)\,y'+4y=2$$

sabendo que um dos integrais particulares da equação sem 2.° membro é a derivada do outro. R: *Temos*

$$(2x^2-2x+1)\,y_1''-2\,(2x-1)\,y_1'+4y_1=0$$

derivando: $(2x^2-2x+1)\,y_1'''+(4x-2)\,y_1''-2\,(2x-1)\,y_1''-$ $-4y_1'+4y_1'=0$ *e atendendo a que* y_1' *é solução temos:* $(4x-2)\,y_1''-4y_1'=0$, $y_1'=z$, $(4x-2)\,z'-4z=0$, $z=c\,(4x-2)$ *e portanto:* $y_1=c\,(2x^2-2x)=c_1\,(x^2-x)$

$$y_2=y_1'=c_2\,(2x-1).$$

Logo $y=c_1\,(x^2-x)+c_2\,(2x-1)+1/2$.

Soluções dos n.os 2600 a 2604 de Jayme Rios de Souza.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal — Alguns exercícios do 1.° exame de frequência de 1947-48.

2605 — Tomando por volume aproximado da coroa esférica $4\pi r^2 h$, onde h é a espessura infinitesimal da coroa, qual é a ordem do infinitésimo desprezado: *a)* se r for o raio da esfera interior *b)* se r for o raio médio. R: *a) Tem-se* $V_c=4\pi\,(3r^2h+3rh^2+h^3)/3$ *e portanto o infinitésimo desprezado é* $4\pi/3\,(3r\,h^2+h^3)$, *evidentemente de 2.ª ordem em relação a* h. *b)* $V_c=$ $\displaystyle=4\pi\left(3r^2h+\frac{h^3}{4}\right)/3$, *logo o infinitésimo desprezado é* $\pi h^3/3$, *de 3.ª ordem em relação a* h.

2606 — Mostre que no intervalo $(0,\pi/2)$ é sempre $\displaystyle\frac{2}{\pi}<\frac{\operatorname{sen} x}{x}<1$. R: *Considere a função* $\displaystyle y=\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. *É* $y\to 1$ *quando* $x\to 0$ *e* $y\to 2/\pi$ *quando* $x\to\pi/2$; *por outro lado em* $(0,\pi/2)$ *é* $\displaystyle y'=\frac{(x-\operatorname{tg} x)\cos x}{x}<0$ *visto* $\operatorname{tang} x>x$, *e portanto* y *decrescente.*

2607 — Sejam OAP e OBP os arcos de curva representativos das funções $y=+\sqrt{x}$ e $y=x^2$ no intervalo $[0,1]$ onde $O\,(0,0)$ e $P\,(1,1)$. O comprimento do segmento variável AB, perpendicular a OP, é no intervalo considerado uma função de x. Mostre que esta função está, no referido intervalo, nas condições do teorema de Rolle. Calcule o valor de x para o qual é máximo o comprimento de AB. R: *A função procurada é* $y=\sqrt{2}\,(\sqrt{x}-x)$, *continua em* $[0,1]$, *derivável em* $(0,1)$ e $y\,(0)=y\,(1)=0$. *Está pois nas condições exigidas pelo teorema de Rolle. É máxima para* $x=1/4$.

2608 — Seja $y=f(x)$ a função real da variável real x assim definida:

$y=2x^2$ para $x\neq\pm 1/n$,

$y=4x^2-|x|$ para $x=\pm 1/n$ (n inteiro $\neq 0$).

Estude a continuidade desta função e a existência e continuidade da sua derivada no intervalo $[-1,1]$. R: *A função é continua para todos os valores de* x *excepto para os da forma* $1/n\neq\pm 1/2$ *visto* $2x^2=4x^2-$ $-|x|$ *para* $x=\pm 1/2$. *Como para* $h\to 0$, *positivo ou negativo, é* $[2\,(1/2+h)^2-1/2]/h\to 2$, $[2\,(-1/2+h)^2-$ $-1/2]/h\to -2$, $(4h^2-h)/h\to -1$ *e* $2h^2/h\to 0$ *podemos concluir que a função dada é derivavel em todos os pontos excepto para* $x=1/n\neq\pm 1/2$ *e* $x=0$ *que são também pontos de descontinuidade da sua derivada.*

2609 — Estude as variações da função $f(x)=e^{-1/x^2}$ para $x\neq 0$, $f(x)=0$ para $x=0$. R: *Se* $x\to 0$, $e^{-1/x^2}\to 0$ *e como para* $h\to 0$, *positivo ou negativo,* $e^{-1/h^2}/h\to 0$ *podemos concluir que a função é contínua e derivável em todos os seus pontos. Mínima para* $x=0$; *pontos de inflexão* $x=\pm\sqrt{2/3}$; $y''>0$ *para* $\sqrt{43}<x<\sqrt{2/3}$, *negativa para todos os outros valores de* x; *assíntota* $y=1$.

2610 — Calcule

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x)^{3/2}+(1+x)^{1/2}}$, *b)* $\displaystyle\int\frac{dx}{x\,(\cos^2\log x-\operatorname{sen}^2\log x)}$

c) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(1+x^3)^{2/3}}$ *d)* $\displaystyle\int(a^2-x^2)^{5/2}\,dx$ por redução sucessiva. R: *Os dois primeiros são imediatos, o segundo e uma irracional binómia e para o terceiro basta fazer* $\int(a^2-x^2)^{5/2}\,dx=x\,(a^2-x^2)^{5/2}+5\int x^2\,(a^2-x^2)^{5/2-1}\,dx=$ $=x\,(a^2-x^2)^{5/2}+5\int[a^2-(a^2-x^2)]\,(a^2-x^2)^{5/2-2}\,dx$, *etc.*

Soluções dos n.os 2605 a 2610 de F. Carvalho Araújo

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame ordinário — 1948

Parte Prática

2611 — Integrar a equação $xr = ap$

2612 — Achar as geodésicas da superfície:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\operatorname{sen}\theta,\ z = k\theta$$

Parte Teórica

2613 — Conceitos de geodésica. Sua equivalência.

2614 — Conceitos e propriedades das funções harmónicas.

2615 — Determinação dos eixos e momentos principais de inércia num ponto qualquer do espaço, conhecidos os mesmos elementos em relação ao centro de gravidade.

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame extraordinário — 1948

Parte Prática

2616 — Integrar a equação: $s = x^2 + y^2$.

2617 — Determinar a curva plana, passando pelos pontos $A\,(1{,}0)$ e $B\,(2{,}1)$ para o qual o integral $\int_1^2 (x^2 + y'^2)\,dx$ é estacionário, sob a condição de

$$\int_1^2 y \log x\,dx = 3.$$

Parte Teórica

2618 — Equação de Monge-Ampère. Método da dualidade, na integração das equações de 2.º ordem às derivadas parciais.

2619 — Parentesis de Poisson e Lagrange. Exprimir, por seu intermédio, as condições de completa canonicidade.

2620 — Potenciais. Definição e propriedades gerais.

II — ESCOLAS ESTRANGEIRAS

University of Manchester — Honours School of Mathematics — **Part I — 12 de Junho de 1945.** (duração 3 h).

2621 — (i) Prove that a determinant does not change its value if its rows and columns are interchanged.

Hence show that

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & j \\ -c & -f & -h & 0 & k \\ -d & -g & -j & -k & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(ii) Show that

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & 1 & x^3 & x^2 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & x^2 & x & 1 \end{vmatrix} = (1-x)^4\,(1+x)^4\,(1+x^2)^2.$$

2622 — Obtain the real quadratic factors of

$$x^{2n} - 2x^n y^n \cos n\theta + y^{2n}.$$

Show that

$$2^{1-n} = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\frac{2k+1}{2n}\pi.$$

2623 — Define a point of accumulation of a sequence of real numbers, and state the theorem of Bolzano-Weierstrass concerning such a point.

Prove that the greatest point of accumulation of a sequence is the upper limit of the sequence, and that the least point of accumulation is the lower limit.

Find the points of accumulation and the upper and lower limits of the sequence

$$\left\{ \frac{2n-1}{n} \sin\frac{\pi n}{2} \right\}.$$

2624 — Show that if $f'(x)$ exists and is monotonically decreasing in $a \le x \le b$, then

$$f'(b) \le \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \le f'(a).$$

Hence prove that, for $x > 0$

$$\frac{1}{x+1} < \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x};$$

and deduce that, for every positive integer n,

$$\log(n+1) < 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n < \log(n+1) + 1.$$

2625 — If

(i) $a_n > 0, \ b_n > 0$ for all n

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l > 0$,

show that the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge and diverge together.

Discuss the convergence of the series

$(a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{\log(n+1)-\log n}{n}}, \quad (b)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{\dfrac{2n^2-1}{n^6+2n^4+3}}$.

2626 — (i) Show that, for $|r| < 1$,

$$r \sin\varphi - r^3 \sin 3\varphi + r^5 \sin 5\varphi - r^7 \sin 7\varphi + \cdots = \frac{r(1-r^2)\sin\varphi}{1+r^2\cos 2\varphi + r^4}.$$

(ii) Sum to infinity

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

2627 — Show that the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converges or diverges according as $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, |a_n|^{1/n}$ is <1 or >1.

Deduce the formula for the radius of convergence of any power series.

Find the radius of convergence of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

2628 — By meaus of the substitution $x = \dfrac{\mu t + \nu}{t+1}$ where μ, ν are appropriate constants, or otherwise, find the integral

$$\int \frac{x\,dx}{(3x^2+8x+2)\sqrt{x^2+4x+1}}.$$

2629 — Define a Riemann integral.

By dividing the interval $0 \le x \le 1$ into parts whose lengths are in the ratio $1:2:3:\cdots:n$, show that, as $n \to \infty$,

$$\frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k f\left(\frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right) \to \int_0^1 f(x)\,dx,$$

where $f(x)$ is any function continuous in $0 \le x \le 1$.

Hence, or otherwise, show that

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n^2(n+1)^2 + k^2(k+1)^2}} = \frac{1}{2}\log\left(1+\sqrt{2}\right).$$

2630 — Solve:

(i) $(y - xy')^2 = y'$;

(ii) $y'''' + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

O exame incluia ainda outra prova de matemáticas aplicadas (respectivamente Geometria e Mecânica).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

66 — HEITLER, W. — **Elementary Wave Mechanics**. VIII + 136 pp. Clarendon Press, Oxford, 1945. Preço 7s 6d.

Este pequeno livro — uma das melhores introduções elementares à Mecânica Ondulatória que conhecemos — parece ter sobretudo por fim conduzir o leitor à compreensão clara da natureza essencialmente não clássica, isto é quântica, do fenómeno que é talvez o mais fundamental da química: a valência homopolar. Depois de mostrar a necessidade da descrição ondulatória das partículas e de deduzir a equação de onda para estados estacionários de um só electrão (equação estática de Schrödinger), trata o átomo de hidrógénio e discute a sua quantificação e o efeito Zeeman. Vem a seguir uma exposição simplificada mas admirável do problema do átomo de hélio (problema de dois electrões) por meio da equação das ondas estacionárias no chamado «espaço de configuração» a seis dimensões. Desprezando primeiramente a interacção dos dois electrões, põe em evidência a relação íntima que existe entre o princípio de exclusão de Pauli e a propriedade de indiscernibilidade de partículas da mesma espécie e mostra como esta propriedade restringe as funções de onda às classes simétrica e antisimétrica relativamente às permutações das posições das partículas. A interacção dos electrões é analizada então pela teoria das pertur-