ANO VIII - N.º 34 GAZETA DE MATEMÁTICA NOVEMBRO - 1947

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

... Et j'espère que nos neveux me sauront gré, non seulement des choses que j'ai ici expliquées, mais aussi de celles que j'ai omises volontairement, afin de leur laisser le plaisir de les inventer.

René Descartes — La Géométrie

Algumas Propriedades dos Conjuntos de Ordenadas

por ***Ruy Luís Gomes***

Seja $f(x)$ uma função numérica, limitada, não-negativa, $0 \leq f(x)$, integravel-Riemann num intervalo fechado $[a, b]$.

No cálculo de áreas planas utiliza-se constantemente o facto de $\int_a^b f(x)\,dx$ coincidir com a *área* limitada pelo eixo dos x, as rectas $x=a$, $x=b$ e o próprio gráfico da função $f(x)$ (fig. 1).

Em termos de maior rigor podemos escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx = J(S),$$

designando por $J(S)$ a medida[1] — J do conjunto das ordenadas de $f(x)$, quere dizer, do conjunto dos pontos (x, y) do plano tais que

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x).$$

Se, em vez de uma função integrável-R, considerarmos uma função integrável-L, teremos

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = m(S),$$

utilizando o integral-L de $f(x)$ e a medida-L de S.

Ora, se o integral-L representa a medida-L de um conjunto, S, do plano, podemos calculá-lo[2] como supremo das medidas-L dos conjuntos fechados $F \subset S$.

[1] Caderno 2-5 da Colecção da Junta de Investigação Matemática.

Sobre a igualdade consultar, por exemplo, Haupt e Aumann — III — pág. 39.

[2] Ver colecção de Cadernos da Junta de Investigação Matemática, Teoria da Medida — 5, por Neves Real.

E surge naturalmente o problema de saber se não será possível substituir *os conjuntos fechados quaisquer* $\mathrm{F} \subset \mathrm{S}$ por *conjuntos fechados de ordenadas* $\mathcal{F} \subset \mathrm{S}$.

Interessa igualmente caracterizar os *conjuntos fechados de ordenadas* em termos das respectivas funções.

O objectivo deste artigo é precisamente a resolução desses dois problemas e para isso vamos demonstrar os seguintes teoremas.

Teorema 1: *Seja F um conjunto fechado contido no conjunto* S *das ordenadas de uma função numérica, limitada e não-negativa num intervalo fechado* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

É sempre possível construir um conjunto de ordenadas, fechado, $\mathcal{F}$, tal que $\mathrm{F} \subset \mathcal{F} \subset \mathrm{S}$.

a) *Construção de $\mathcal{F}$.*

Dado um ponto (x_0, y_0) e F, determinemos o supremo $g(x_0)$ das ordenadas dos pontos de F situados na recta $x=x_0$ (Fig. 1).

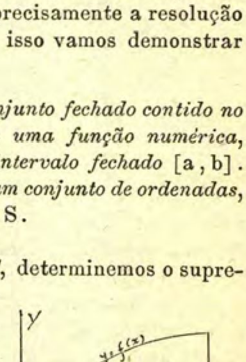

Fig. 1

Como F é um conjunto fechado, $(x_0, g(x_0))$ e F, sendo portanto, o *ponto mais alto* de F na recta $x=x_0$.

Consideremos agora o ínfimo α e o supremo β das abscissas x' das rectas $x=x'$ que têm pontos comuns com F.

A circunstância de F ser um conjunto fechado faz com que $x=\alpha$ e $x=\beta$ intersectem F, ficando assim definidos os pontos $(\alpha, g(\alpha))$ e $(\beta, g(\beta))$.

Pondo finalmente $g(x)=0$ para $a \leq x < \alpha$ e $\beta < x \leq b$, será $g(x)$ uma função numérica, limitada e não-negativa cujo conjunto das ordenadas, $\mathcal{F}$ (constituído pelos segmentos $[a, \alpha]$, $[\beta, b]$ e a parte tracejada), verifica evidentemente a condição $F \subset \mathcal{F} \subset S$.

b) $\mathcal{F}$ é um conjunto fechado

Seja (x_0, y_0) um ponto que não pertence a $\mathcal{F}$. Vamos demonstrar que não pode ser ponto de acumulação de $\mathcal{F}$.

Como $F \subset \mathcal{F}$, (x_0, y_0) não pertence a F, portanto podemos traçar um círculo aberto C, de centro (x_0, y_0), que também não contém ponto algum de F.

Suponhamos, no entanto, que C contém um ponto (x', y') de $\mathcal{F}$, com $x_0 \leq x'$

Neste caso, há-de haver na recta $x = x'$ um ponto de F, mais alto do que êle, (ver *Nota 1*), portanto situado na própria circunferência de C ou para cima, pois o próprio círculo não contém pontos de F, por construção. Calculemos agora o ínfimo β_0 das abscissas x' das rectas $x = x'$ que intersectam F sobre a circunferência de C ou acima.

Trata-se das rectas $x = x'$, com $x_0 \leq x'$, que intersectam F em pontos situados também no conjunto F_1, tracejado na figura 2 (reduzida ao essencial), que é um conjunto fechado.

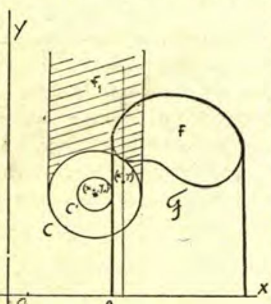

Fig. 2

A recta $x = x_0$ é evidente que não está nessas condições, pois se assim fosse, (x_0, y_0) pertenceria a $\mathcal{F}$, o que é absurdo.

Mas também não pode ser $\beta_0 = x_0$, pois nessa hipótese pelas propriedades de ínfimo, seria possível construir uma sucessão de pontos $P_n \in F . F_1$ convergente para um ponto (x_0, y'), que pertenceria simultaneamente à recta $x = x_0$, ao conjunto F e ao conjunto F_1.

Mas se um ponto — (x_0, y'), — de ordenada y' superior à de (x_0, y_0), pertence a F, e, portanto, a $\mathcal{F}$, o mesmo acontece ao próprio (x_0, y_0), o que é absurdo.

Logo, $x_0 < \beta_0$ e anàlogamente $\alpha_0 < x_0$, se fôr α_0 o supremo das abcissas das rectas $x = x'$, $x \leq x_0$, que intersectam F em pontos pertencentes a F_1 (ver *Nota 2*).

Tracemos agora um segundo círculo aberto C', de centro em (x_0, y_0), mas situado no interior de C e da faixa compreendida entre as duas rectas $x = \alpha_0$ e $x = \beta_0$.

C' não contém ponto algum de $\mathcal{F}$.

Na verdade, se contivesse um — (x', y') — haveria na recta $x = x'$ um ponto de F, de ordenada maior do que y', portanto um ponto de F_1.

Ora, isso é absurdo, pois as rectas $x = x'$, $\alpha_0 < x' < \beta_0$ não intersectam $F \cdot F_1$.

Em conclusão, C' não contém pontos de $\mathcal{F}$, por consequência, (x_0, y_0) não é ponto de acumulação de $\mathcal{F}$. *O conjunto $\mathcal{F}$ é fechado.*

COROLÁRIO: *Para o cálculo da medida interior*-L *do conjunto das ordenadas* S *de uma funcão* f (x) *limitada e não-negativa num intervalo fechado* [a, b], *não é preciso utilizar todos os conjuntos fechados* F⊂S*: basta considerar os que são também conjuntos de ordenadas.*

É uma consequência imediata do teorema anterior e da monotonia da medida-L: $m(F) \leq m(\mathcal{F})$.

As funções $g(x)$ relativas aos conjuntos $\mathcal{F}$ satisfazem à condição

$$g(x) \leq f(x),$$

pois que $\mathcal{F} \subset S$.

TEOREMA 2: *O fecho* $\bar{S}$ *do conjunto das ordenadas da função* f (x) *coincide com o conjunto das ordenadas* $\mathcal{S}$ *de* $\bar{f}$ (x) *— limite superior de* f (x).

Na verdade, se $(x_0, y_0) \in \bar{S}$, tem-se

$$a \leq x_0 \leq b \quad \text{e} \quad y_0 \leq \bar{f}(x_0) \quad \text{ou} \quad \bar{f}(x_0) < y_0 .$$

Se $y_0 \leq \bar{f}(x_0)$ é imediato que $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}$. Se, pelo contrário, $\bar{f}(x_0) < y_0$, tomemos um número k tal que $\bar{f}(x_0) < k < y_0$.

Como $\bar{f}(x_0)$, por definição, é o ínfimo dos supremos de $f(x)$ nos intervalos fechados [1] de centro x_0, poderemos arranjar um intervalo $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ onde o supremo dos valores da $f(x)$ seja inferior a k.

Nesse intervalo teremos, pois, $f(x) < k$ e, consequentemente, o rectângulo

$$x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$$

$$y_0 - (y_0 - k) \leq y \leq y_0 + (y_0 - k),$$

de centro (x_0, y_0), não contém pontos de S, o que é absurdo, visto, por hipótese, $(x_0, y_0) \in \bar{S}$. *Logo* $y_0 \leq \bar{f}(x_0)$ *e, portanto,* $\bar{S} \subset \mathcal{S}$.

Suponhamos agora que $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}$.

Tem de ser $a \leq x_0 \leq b$ e $y_0 \leq \bar{f}(x_0)$.

Mas, atendendo à definição de $\bar{f}(x_0)$, é possível determinar uma sucessão $x_n \to x_0$ tal que $f(x_n) \to \bar{f}(x_0)$.

Se $y_0 = \bar{f}(x_0)$, vem $(x_0, y_0) = \lim_n (x_n, f(x_n))$ donde $(x_0, y_0) \in \bar{S}$.

Se $y_0 < \bar{f}(x_0)$, a partir de uma certa ordem n será também $y_0 < f(x_n)$ e, portanto, $(x_n, y_0) \in S$, donde $(x_0, y_0) \in \bar{S}$.

---

(1) Podè ser qualquer outro sistema admissível de vizinhanças

Logo, $\mathcal{S} \subset \bar{S}$.

Está, pois, demonstrado que $\mathcal{S} = \bar{S}$.

COROLÁRIO 1: *A condição necessária e suficiente para que o conjunto das ordenadas de* f (x) *seja fechado, é que* f (x) *seja superiormente contínua.*

Na verdade, $S = \bar{S} = \mathcal{S}$ é equivalente a $\bar{f}(x) = f(x)$.

COROLÁRIO 2: *Para o cálculo da medida interior-*L *do conjunto das ordenadas,* S, *de* f (x), *basta considerar os conjuntos das ordenadas,* S, *das funções superiormente contínuas* g (x) $\leq$ f (x).

Tem-se

$$m_i(S) = \sup m(\mathcal{S}).$$

Os resultados anteriores mostram bem o partido que se pode tirar de $m(\mathcal{S})$, ou seja do integral-L das funções superiormente contínuas, para a definição do integral inferior-L de uma função não negativa qualquer.

É essa a marcha seguida, por exemplo, por Mc. Shane em *Integration* [Princeton Univ. Press, 1940].

Deixamos ao leitor o estudo dos problemas duais, que fazem intervir as funções inferiormente contínuas.

Nota 1. Na demonstração de que $\mathcal{F}$ é fechado, é evidente que se tem de supor $0 < \mathcal{J}_0$ e, por conseguinte, o círculo pode ficar todo para cima do eixo dos x.

Nota 2. Pode acontecer, e é o caso indicado na fig. 2, que não tenha sentido falar de α_0, por ser vazio o conjunto das abscissas das rectas $x = x'$, $x' \leq x_0$ que intersectam $F \cdot F_1$.

Mas se assim fôr obrigaremos C' à única condição de ser concêntrico de C e não intersectar a recta $x = \beta_0$. É anàloga a hipótese de não ter sentido falar de β_0.

Nota 3. A igualdade tão conhecida

$$\bar{\int} f(x)\, dx = \bar{\int} \bar{f}(x)\, dx, \quad 0 \leq f(x),$$

sinifica apenas que $J_e(S) = J_e(\bar{\bar{S}})$.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O ENSINO DA MATEMÁTICA NA REFORMA POMBALINA

por ***Luís Mendonça de Albuquerque***

Ainda recentemente tivemos ensejo de fazer referência à Reforma de ensino superior elaborada pelo governo do Marquez de Pombal (1); procurámos então analisar nas suas linhas gerais o que nela se determinou quanto ao ensino das ciências exactas. Julgamos, porém, ser a *Gazeta de Matemática* lugar mais aconselhado para certas considerações de maior detalhe sobre o que nessa Reforma respeita ao ensino da Matemática.

Para se ter uma ideia da época em que foram publicados os Estatutos pombalinos, bastará certamente recordar que o racionalismo setecentista alcançara então todo o seu prestígio, amparado pelas grandes conquistas conseguidas nas ciências experimentais e fundamentado numa nova linha de desenvolvimento da Filosofia.

Porém, diversas circunstâncias mantinham o nosso país afastado dos progressos que a ciência atingira na Europa. É bem prova disso o facto de terem decorrido perto de duzentos anos entre os últimos Estatutos pré-pombalinos (1612) e a Reforma do Marquez (1773). Se não se esquecer que, por um lado, esses dois séculos foram dos períodos mais fecundos para a evolução da ciência e, por outro, em consequência de certas influências talvez propositadamente regressivas, os Estatutos de 1612 já não eram actuais mesmo à data da sua publicação — poder-se-á avaliar o atrazo em que então se debatiam os nossos estudos universitários.

No que, em particular, respeita à matemática, a situação agravava-se ainda por outra razão: o ensino desta ciência nunca creara tradições entre nós (já Herculano o fez notar), a despeito de algumas belas obras publicadas nos séculos XVI e XVII por matemáticos portugueses, e das grandes viagens marítimas terem exigido a preparação de cosmógrafos e cartógrafos competentes. Contribuiu sem dúvida para isso, o facto de na Universidade só ter sido creada uma cadeira para o ensino desta ciência; para o mal ser ainda maior, esta cadeira estava enquadrada na Faculdade de Medicina — que era, aliás, a Faculdade onde menos forçadamente podia ser acolhida. (2)

Não esqueceu a Junta de Providência Literária que, presidida pelo Marquês, se encarregou dos trabalhos preparatórios para a Reforma e, depois, a redigiu, de

(1). *Vértice,* Vol. IV, pag. 499 e seguintes.

(2). No plano fixado pelos Estatutos de 1612, figuravam ao lado da Faculdade de Medicina, mais duas: a de Cânones e a de Teologia.