Logo, $\mathcal{S} \subset \bar{S}$.

Está, pois, demonstrado que $\mathcal{S} = \bar{S}$.

Corolário 1: *A condição necessária e suficiente para que o conjunto das ordenadas de* f (x) *seja fechado, é que* f (x) *seja superiormente contínua.*

Na verdade, $S = \bar{S} = \mathcal{S}$ é equivalente a $\bar{f}(x) = f(x)$.

Corolário 2: *Para o cálculo da medida interior*-L *do conjunto das ordenadas*, S, *de* f (x), *basta considerar os conjuntos das ordenadas*, S, *das funções superiormente contínuas* g (x) $\leq$ f (x).

Tem-se

$$m_i(S) = \sup m(\mathcal{S}) .$$

Os resultados anteriores mostram bem o partido que se pode tirar de $m(\mathcal{S})$, ou seja do integral-L das funções superiormente contínuas, para a definição do integral inferior-L de uma função não negativa qualquer.

É essa a marcha seguida, por exemplo, por Mc. Shane em *Integration* [Princeton Univ. Press, 1940].

Deixamos ao leitor o estudo dos problemas duais, que fazem intervir as funções inferiormente contínuas.

Nota 1. Na demonstração de que $\mathcal{F}$ é fechado, é evidente que se tem de supor $0 < \mathcal{J}_0$ e, por conseguinte, o círculo pode ficar todo para cima do eixo dos x.

Nota 2. Pode acontecer, e é o caso indicado na fig. 2, que não tenha sentido falar de α_0, por ser vazio o conjunto das abscissas das rectas $x = x'$, $x' \leq x_0$ que intersectam $F \cdot F_1$.

Mas se assim fôr obrigaremos C' à única condição de ser concêntrico de C e não intersectar a recta $x = \beta_0$. É anàloga a hipótese de não ter sentido falar de β_0.

Nota 3. A igualdade tão conhecida

$$\bar{\int} f(x)\,dx = \bar{\int} \bar{f}(x)\,dx , \quad 0 \leq f(x) ,$$

sinifica apenas que $J_e(S) = J_e(\bar{\bar{S}})$.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O ENSINO DA MATEMÁTICA NA REFORMA POMBALINA

por ***Luís Mendonça de Albuquerque***

Ainda recentemente tivemos ensejo de fazer referência à Reforma de ensino superior elaborada pelo governo do Marquez de Pombal (1); procurámos então analisar nas suas linhas gerais o que nela se determinou quanto ao ensino das ciências exactas. Julgamos, porém, ser a *Gazeta de Matemática* lugar mais aconselhado para certas considerações de maior detalhe sobre o que nessa Reforma respeita ao ensino da Matemática.

Para se ter uma ideia da época em que foram publicados os Estatutos pombalinos, bastará certamente recordar que o racionalismo setecentista alcançara então todo o seu prestígio, amparado pelas grandes conquistas conseguidas nas ciências experimentais e fundamentado numa nova linha de desenvolvimento da Filosofia.

Porém, diversas circunstâncias mantinham o nosso país afastado dos progressos que a ciência atingira na Europa. É bem prova disso o facto de terem decorrido perto de duzentos anos entre os últimos Estatutos pré-pombalinos (1612) e a Reforma do Marquez (1773). Se não se esquecer que, por um lado, esses dois séculos foram dos períodos mais fecundos para a evolução da ciência e, por outro, em consequência de certas influências talvez propositadamente regressivas, os Estatutos de 1612 já não eram actuais mesmo à data da sua publicação — poder-se-á avaliar o atrazo em que então se debatiam os nossos estudos universitários.

No que, em particular, respeita à matemática, a situação agravava-se ainda por outra razão: o ensino desta ciência nunca creara tradições entre nós (já Herculano o fez notar), a despeito de algumas belas obras publicadas nos séculos XVI e XVII por matemáticos portugueses, e das grandes viagens marítimas terem exigido a preparação de cosmógrafos e cartógrafos competentes. Contribuiu sem dúvida para isso, o facto de na Universidade só ter sido creada uma cadeira para o ensino desta ciência; para o mal ser ainda maior, esta cadeira estava enquadrada na Faculdade de Medicina — que era, aliás, a Faculdade onde menos forçadamente podia ser acolhida. (2)

Não esqueceu a Junta de Providência Literária que, presidida pelo Marquês, se encarregou dos trabalhos preparatórios para a Reforma e, depois, a redigiu, de

(1). *Vértice*, Vol. IV, pag. 499 e seguintes.

(2). No plano fixado pelos Estatutos de 1612, figuravam ao lado da Faculdade de Medicina, mais duas: a de Cânones e a de Teologia.

ponderar estes factos ao criar o Curso Matemático (3). Explicitamente o afirma em períodos um pouco retóricos mas justos, quando considera que «se a Universidade ficasse destituida das luzes matemáticas, *como infelizmente esteve nos dois séculos próximos precedentes*, não seria mais do que um caos semelhante ao universo se fosse privado dos resplendores do Sol». (4)

Não era fácil a tarefa de criar sobre o que tinha sido ultrapassado há alguns séculos, uma escola de matemática ao nível das boas escolas europeias. Antes de começar a estabelecer o plano do novo Curso, a Junta escreveu duas páginas de considerandos em que mostra ter consciência do atrazo em qne caíramos e das dificuldades que havia a vencer: «(o estudo da matemática acostuma o entendimento) a desprezar os raciocínios vãos, frívolos, escuros, ociosos e gratuitos, nos quais por um gosto corrompido e estragado se tinham transformado as Faculdades literárias nos séculos tenebrosos da Filosofia *Arábigo-peripatética*, a qual, despòticamente suprimiu e afugentou das escolas as ciências exactas para deslocar mais fàcilmente o entendimento humano» (5). Este estilo perdulário de palavras (a herança do gongórico não estava ainda perdida!) cede o lugar a uma redacção mais concisa e firme logo que os Estatutos entram a delinear a orgânica do novo Curso. E quando se atingem os capítulos que se referem ao plano dos estudos (6) e aos programas das diversas cadeiras (7), afirma-se com todo o vigor o realismo da Reforma.

Quanto ao plano, o Curso era composto de quatro cadeiras, cada uma ensinada no período de um ano. No primeiro ano estudava-se Geometria e Trigonometria plana (Primeira Cadeira), com aplicações à Geodesia, à Estereotomia, etc. Na segunda cadeira (segundo ano) ensinava-se Álgebra e davam-se «os princípios de cálculo infinitesimal, directo e inverso; e com a sua aplicação à Geometria sublime e transcendente.» (8) No terceiro ano ministravam-se ensinamentos de «Phoronomia» (Terceira Cadeira), com as suas aplicações à Estática, à Dinâmica, Hidrostática, Hidraulica, Ótica, etc. Enfim: O último ano do Curso era dedicado à Astronomia (Quarta Cadeira), com «a teórica do movimento dos astros», «a prática do cálculo e das observações astronómicas» e as «mais ciências que dependem da mesma Astronomia.» (9)

Por outro lado, os programas destas Cadeiras procuravam acompanhar o desenvolvimento atingido pela Matemática no século XVIII. Parece-nos que merecem ser transcritos para aqui nas suas linhas gerais, para melhor se poder ajuizar do valor da Reforma. Assim:

PRIMEIRA CADEIRA. *Elementos de Aritmética.* Número e unidade. Numeração (10). Operações fundamentais. Números simples e complexos; inteiros e quebrados; «tanto ordinários como decimais, sexagesimais, etc.» Números quadrados e cúbicos e suas raízes. Propriedades das proporções e progressões, tanto aritméticas como geométricas. Regra de três simples e composta; directa e inversa; regras de falsa posição, de sociedade, de liga, etc. Logarítmos e suas aplicações (11).

Geometria elementar. Estudo baseado nos «Elementos de Euclides» (de que se excluiam os livros dedicados á Aritmética), completados com as propriedades e teoremas estabelecidos por Arquimedes. Os «Comentários» de Proclo deviam servir de fundamento para o ensino da história da Geometria.

SEGUNDA CADEIRA. *Álgebra.* Equações e sua resolução. Propriedades e uso das séries.

Geometria Tratado analítico das cónicas.

Cálculo diferencial. «Fluxões ou elementos infinitésimos». Regras de diferenciação de funções algébricas e transcendentes (senos, cosenos, etc.). Estudo de certas curvas (evolutas, evolventes e causticas). Máximos e mínimos.

Cálculo integral. «Integração de quantidades transcendentes». Rectificacão de curvas. Quadratura de áreas. Cubatura de sólidos.

TERCEIRA CADEIRA. Leis do movimento uniforme e variado. Teoria do centro de gravidade. Rotação. Teoria do choque dos corpos «moles, duros e elásticos». Teoria do pêndulo simples. Problema das forças centrais. Movimento dos corpos planetários. «Arquitectura hidraulica e das máquinas». Estudo da luz. Ótica. Acústica.

QUARTA CADEIRA. Tratado elementar de Trigonometria esférica. Estudo dos movimentos centrais. Estudo dos movimentos dos planetas. Teoria da Lua.

(3). Estatutos, Livro III, Parte II; aí se trata da creação do Curso e da sua orgânica. As referências deste artigo dizem sempre respeito a este Livro e a esta Parte, seguindo-se a 1.ª edição, com a ortografia actualizada.

(4). Pág. 141.

(5). Pág. 142.

(6). Título III, «Do tempo, Disciplinas, Cadeiras e férias do Curso Matemático».

(7). Título IV, «Da distribuição das lições pelos anos do Curso Matemático e do modo que nelas se há-de haver.»

(8). Isto é: Geometria analítica e diferencial. Título III, Cap. III, § 2, bis.

(9). Id., Id., § 4.

(10). Título IV, Cap. I, § 2. «Com distinção do que nela há de natural e de arbitrário.»

(11). Título IV, Id. «Também mostrará a ideia fundamental dos números artificiais e arbitrários, conhecidos pelo nome de logaritmos; e o uso vantajoso deles nas operações numéricas.»

Acrescente-se que as primeiras lições do ano eram reservadas, em todas as Cadeiras, para os professores indicarem resumidamente (os Estatutos descem ao pormenor de planificar esses resumos) a evolução histórica das ciências que serão depois estudadas.

Porém, ao mesmo tempo que atendiam às condições indispensáveis para que o ensino da matemática fosse actual, os legisladores não esqueciam que a nova escola só podia subsistir se os estudantes fossem atraidos para ela. Com este sentido os Estatutos concediam aos alunos do Curso Matemático regalias de que não gozavam os outros estudantes universitários: não só os «fidalgos da Casa Real» que nele se matriculassem viam os quatro anos de Curso contados como «tempo de serviço vivo em campanha» (12), como se dava o direito ao hábito de uma das ordens militares a quem quer que frequentasse a nova Faculdade (13). Estas medidas tinham, como não podia deixar de ser, caracter transitório; mas foram decisivas para se atingir uma frequência estável na Faculdade de Matemática.

* * *

A leitura dos programas revela (já o dissemos) que a Junta conhecia bem o nível científico da época. Contudo, quem ler a Parte II do Livro III dos Estatutos, encontra alem disso um conjunto de observações e directrizes que mostram com nitidez que os legisladores estavam também decididamente voltados para uma pedagogia de orientação racionalista. Já se viu em exemplos dados em transcrições anteriores que tudo o que até então era verbalismo ou falta de clareza, merece nos Estatutos uma frase de crítica condenatória; porém, mais do que isso: a seguir às críticas, quase sempre, se apontam as soluções, desempoeiradas e justas.

Passemos em rápida revista os pontos que (supomos) mais merecem ser postos em destaque.

Em vários parágrafos dos Estatutos criticam-se as «sombrias especulações peripatéticas»; reagindo contra elas, os legisladores defendem um ensino intimamente ligado ao real e ao concreto. Por exemplo: quando, no programa da Terceira Cadeira, se fala da definição de força, que era ainda por esse tempo um conceito impreciso e nebuloso, indica-se que basta «... considerar os efeitos (das forças) sem pretender decifrar a natureza escura delas» (14); talvez esta indicação nos pareça hoje demasiadamente radical ou mesmo errada, mas era o único meio de desenvencilhar um estudante de ciências positivas da teia metafísica em que inevitàvelmente cairia numa época em que não conseguiramos ainda libertar-nos das especulações escolásticas. Outro exemplo: contrariando o método até aí adoptado no ensino da Geometria, método que se divorciara de todas as relações com o concreto (15), os Estatutos aconselham os professores a evidenciar essas relações quando tal for útil ou necessário — como sucede nas lições sobre os sólidos que o professor «exporá à vista dos corpos geométricos (16)».

Numa outra directriz que os Estatutos não esquecem, definem-se a teoria e a prática como complementares, só se considerando eficiente o ensino em que sejam encarados estes dois aspectos. Isto se escreveu explícitamente a propósito da Geometria: o professor desta Cadeira deve fazer «quanto possível for para ajuntar a teórica com a prática. Providenciando para que os «alunos aprendam a manejar os instrumentos (...)»... para o que lhes (indicará) alguns dias feriados em que eles se devem achar em algum lugar do campo nas visinhanças da cidade. Tendo feito conduzir para eles grafómetros, pranchetas e outros aparelhos de Geodesia» (18).

No mesmo sentido se ordena que o professor, ao tratar da Trigonometria, dê prática da resolução de triângulos «em todos os casos (...), exercitando o discípulo nalguns problemas escolhidos, nos quais veja sensivelmente a utilidade do cálculo trigonométrico» (19); e se escreve que, ao tratar das cónicas, o professor não se deve esquecer de indicar «... os diferentes usos para que elas servem» (20). De resto, esta íntima ligação entre a teoria e a prática é uma ideia que domina todos os Estatutos; de facto, à Reforma pombalina se ficou devendo a creação do Observatório Astronómico, directamente ligado á Faculdade de Matemática (observatório que o sentido prático de Monteiro da Rocha depois organizou modelarmente); e ainda, pela primeira vez na história do nosso ensino, se organizaram laboratórios de Física e de Química e um Jardim Botânico (ligados à Faculdade de Filosofia) e se crearam, adstritos à de Medicina, um Teatro Anatómico e o Hospital Escolar.

Um outro problema que mereceu os cuidados da Junta de Providência Literária, foi o da escolha de livros que deviam servir no ensino.

---

(12). Título I, Cap. II, § 9.

(13). Id., Id., § 8.

(14). Título IV, Cap. III, § 8.

(15). Conta Verney («O verdadeiro método de estudar», vol. II, carta X) que num acto de doutoramento a que assistira, o arguente não permitira que o candidato recorresse a uma figura para expôr a sua defesa.

(16). Título IV, Cap. I, § 2.

(17). Id., Id., Id.

(18). Título V, Cap. III, § 3. Deve-se notar que (segundo o testemunho de José Anastácio da Cunha) esta disposição não foi cumprida, pelo menos nos primeiros dez anos que se seguiram à Reforma.

(19). Título IV, Cap. I, § 2.

(20). Título IV, Cap. II, § 6.

Até a época pombalina serviam de guia nas lições tratados há muito ultrapassados, impondo-se aos professores a obrigação de os seguir e aos alunos a de estudar por eles; chegara-se a escrever expressamente nos Estatutos de 1612, que os estudantes deviam *sempre* defender as opiniões (muitas vezes velhas de um milhar de anos!) que os autores desses tratados neles defendiam. Ora, considerando que nestas ciências «se aperfeiçoam cada dia mais coisas e se inventam outras» (21), mandam os Estatutos que a congregação da Faculdade deve todos os anos indicar quais os livros que convém adoptar para o ensino das diversas Cadeiras; e previnem que, para se não desvirtuar o sentido desta medida, que era o de manter o ensino actualizado, não pode a escolha de um livro feita uma vez, servir de razão para preferência no futuro — desde que apareça outro mais actual ou mais perfeito do ponto de vista pedagógico. Quando em lingua portuguesa não estivesse publicado um tratado que merecesse a escolha (22), devia a mesma congregação nomear um professor ou grupo de professores para a tarefa de traduzir um compêndio estrangeiro considerado nas condições (23). Convém observar que, no entanto, o desenvolvimento dado às várias matérias no compêndio que fosse adoptado, não era um limite rígido para a actividade do professor; porque este «...explicará as proposições do Autor; e acrescentará as que lhe parecerem necessárias e nele faltem; dando sempre por escrito aos discípulos a demonstração de todas elas» (24).

(21). Título III, Cap. I, § 9.

(22). Sabe-se que a primeira redacção dos «Princípios matemáticos» de José Anastácio da Cunha foi apresentada a uma congregação da Faculdade de Matemática para ser adoptada como livro de texto na Primeira Cadeira, e rejeitada.

(23). Para a Segunda Cadeira, por exemplo, foram traduzidos os «Elementos de Análise», de Bezout.

Propositadamente deixamos para o fim uma orientação revelada nos Estatutos que só em nossos dias voltou a ser activamente defendida: a de que o papel da Universidade não deve ser apenas o de dotar o país com diplomados para prover às exigências do funcionalismo ou das profissões chamadas liberais; cabe-lhe também o encargo de promover e organizar a investigação científica. Não podem ter outra interpretação estes períodos dos Estatutos (25): «... idearam-se os Grémios das Faculdades, (para) que neles se recebessem todos aqueles que, (tivessem acabado) os seus respectivos Cursos com mais distinção e louvor; (...) para que ligados mais particularmente às disciplinas da sua profissão (...), se vissem compreendidos em trabalhar (...); fazendo (...) os estudos mais avançados e profundos (...)».

* * *

Supomos que é inútil apontar os erros (que os houve, como não podia deixar de ser) que os Estatutos revelam; por muitos que fossem (e não foram muitos) não podiam invalidar as qualidades que ficam apontadas. Pena foi que o governo do Marquês de Pombal não sobrevivesse o tempo indispensável para consolidar tão grande obra. De facto, enquanto algumas dessas medidas não chegaram a passar da letra dos Estatutos para a prática, outras, embora realmente fossem cumpridas, não conseguiram impor-se até o momento em que Pombal cedeu o lugar ao Marquez de Angeja — e foram ràpidamente esquecidas.

Mas o que ficou, ainda representava um grande passo no caminho do progresso.

(24). Título III, Cap. I, § 11.

(25). Título I, Cap. I, § 2 e 3.

NOTA HISTÓRICA (*)

por ***José Gaspar Teixeira***

Estamos na Europa do século XIV.

O desenvolvimento crescente do comércio e da indústria, o aparecimento constante de novos burgos e o aumento da população dão origem a violentos antagonismos entre a burguesia nascente e a aristocracia feudal.

Nessas lutas, os reis e os príncipes unem-se aos habitantes dos burgos contra os senhores feudais, e invocam a necessidade de unificação dos diversos países. Essa unificação consolida-se por dois meios — guerras e comércio —; e verifica-se então a formação de exércitos nacionais, sob o controle directo dos reis, e o nascimento de grandes empresas comerciais dirigidas pela burguesia. Isto é, as guerras e o comércio tomam uma amplitude incomparàvelmente maior, pois deixam de interessar a Feudos para interessar às Nações.

É deste estado de coisas que nasce o Renascimento — movimento que se manifesta em todos os aspectos e ramos da vida dos povos europeus: relações económicas, políticas e sociais, indústria, ciência, letras, artes, etc.

É esta a razão por que, pela primeira vez, os reis e os comerciantes dão importância à ciência, pelas suas

(*) Transcrito de *Tábuas de Logaritmos*, Porto Editora, Lda. 1947.

aplicações a todos os sectores vitais do desenvolvimento dos povos.

É esta a razão da atenção e acolhimento que os nossos reis dão aos astrónomos do Reino, ao matemático Pedro Nunes, às Escolas Náuticas, etc.

Daí as honras e protecção com que nas cortes de certos países são acolhidos alguns dos maiores valores da ciência da época.

Da preparação das guerras e navegações surgem dois problemas de índole científica, que necessitam solução prática: os problemas do tiro e da determinação das coordenadas geográficas exigem um cálculo rápido e bastante rigoroso. É assim que, no século XV, os calculadores [1] não podem dar conta do trabalho exigido pelo volume e natureza dos cálculos necessários às soluções desses problemas, sentindo-se portanto a necessidade de criar algoritmos de maior rendimento. É o caso da descoberta do «nónio» por Pedro Nunes, destinado a introduzir maior rigor na leitura dos ângulos.

Já no tempo de Arquimedes (II séc. A. C.) se conhecia um processo rápido para multiplicar e dividir grandes números, contando que fossem potências duma mesma base. Assim, consideremos, por exemplo, a sucessão das potências de 2

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{10}, 2^{11}, \cdots, 2^{14}, \cdots, 2^{25}, \cdots$$

e os respectivos valores numéricos

$$1, 2, 4, 8, \cdots, 1024, 2048, \cdots, 16384, \cdots, 33554432, \cdots;$$

para multiplicarmos dois números quaisquer da sucessão inferior, não temos mais que procurar o valor numérico daquela potência de 2, cujo expoente é a soma dos expoentes desses números, considerados como potencias de 2.

Exemplo: Para multiplicar 2048 por 16384, faz-se

$$2048 \times 16384 = 2^{11} \times 2^{14} = 2^{25} = 33.554.432,$$

e o cálculo reduz-se a simples leituras na tábua anterior.

A divisão de dois números que figurem na sucessão numérica anterior decorre de maneira igualmente simples.

Este processo de cálculo de produtos e cocientes tem o inconveniente de estar restrito a operações sobre números que sejam *potências duma mesma base, de expoente inteiro.*

[1] A semelhança dos escribas e chanceleres — homens que junto das cortes e conventos tinham por única missão escrever e copiar os «documentos» — havia os «calculadores», apenas destinados a fazer contas, o que na época era operação laboriosíssima, dados os poucos recursos técnicos de cálculo.

O mérito e simplicidade formal da descoberta dos *logaritmos* consiste na construção de uma tábua de potências de determinada base, onde figuram todos os números, e não apenas as potências inteiras. Isto é, os espaços compreendidos entre duas potências inteiras consecutivas devem ser preenchidos, obedecendo à continuidade, pelas potências de expoente fraccionário e irracional.

Exemplo: entre 2^2 e 2^3 deveremos introduzir por exemplo, as potências

$$2^{2.1}, 2^{2.2}, 2^{\sqrt{5}}, 2^{2.3}, 2^{2.4}, 2^{\sqrt{6}}, 2^{2.5}, 2^{2.6}, 2^{\sqrt{7}}, 2^{2.7}, 2^{2.8}, 2^{\sqrt{8}}, 2^{2.9}$$

entre $2^{2.1}$ e $2^{2.2}$ deveremos introduzir outras potências de expoente racional e irracional; e assim por diante.

Deveremos, por outro lado, completar a tábua com os valores numéricos das potências anteriores:

$$2^0, \cdots, 2^1, \cdots, 2^2, 2^{2.1}, 2^{2.2}, 2^{\sqrt{5}}, \cdots, 2^3, \cdots, 2^4, \cdots,$$

$$1, \cdots, 2, \cdots, 4, 4{,}29, 4{,}60, 4{,}69, \cdots, 8, \cdots, 16, \cdots.$$

Uma conclusão imediata decorre da natureza destes valores numéricos: são números irracionais, e portanto quando escritos na numeração decimal só os podemos conhecer com determinada aproximação.

O cálculo logaritmo conduzirá pois a um *resultado essencialmente aproximado*, cujo rigor depende apenas da aproximação com que essas tábuas são calculadas.

Perguntar-se-á agora: — Se a idéia para a construção duma tábua de logaritmos é tão simples, por que razão ficou «em germen» durante 1500 anos?

Em primeiro lugar, é impossível calcular directamente, isto é, por extracção de raízes, os valores numéricos das potências de expoente fraccionário e irracional [1].

Por outro lado, só no fim da Idade Média, como há pouco mostramos, surgiu a necessidade premente de resolver o problema das operações com grandes números.

É essa a razão por que, no início do séc. XVII, Simão Stevin comerciante da Flandres, Justo Bürgis, relojoeiro de Praga, e João Neper, monge escocês, desconhecendo os trabalhos uns dos outros, constroem as primeiras tábuas de logaritmos.

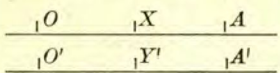
Stevin chegou às suas tábuas dedicando-se ao estudo dos juros compostos dos capitais. Realmente, se fôr j o juro do capital 1 no fim de um ano, no fim de $0, 1, 2, 3, \cdots$, anos o capital obtido será 1, $1+j$, $(1+j)^2$, $(1+j)^3, \cdots$: «o número de anos é o logarítmo, na base $(1+j)$, do capital obtido».

[1] Exceptuando a raiz cúbica, não há regra ou operação para extracção de raizes de índice impar.

Kepler (que *teve de abrir caminho através de grandes massas de cálculos, para o seu trabalho sobre astronomia, perdeu anos da sua vida em infindáveis estopadas numéricas* — D. J. Struik — Concerning Mathematics, citação da «Gazeta de Matemática») já fala das tábuas de Bürgis como instrumento de utilidade para os cálculos astronómicos, mas acrescenta que não são mais que uma fase mais avançada que as tábuas de Stevin para o cálculo de juro composto.

Em oposição, as tábuas de Neper têm a sua origem na necessidade de cálculos rápidos para a navegação.

O sistema de logaritmos de Neper constroi-se por processo verdadeiramente revolucionário para o seu tempo. O idealismo, tão bem conservado desde Platão até o fim da Idade Média, opunha-se a toda a ideia de movimento (evolução ou alteração de posição) e a raciocínios sobre esquemas mecânicos. Ora Neper parte dum movimento mecânico:



faz mover sobre duas rectas paralelas, a partir de origens O e O', dois pontos — um X, percorre toda a recta OA com movimento uniforme, $x=vt$. o outro Y, descreve um segmento $O'A'=1$ de modo que a sua velocidade, a velocidade de X, a distância $y=YA'$ e o segmento $O'A'$ sejam proporcionais. A velocidade de Y tem a expressão $\frac{d(1-y)}{dt}$, e então será $\frac{d(1-y)}{dt} : \frac{dx}{dt} = y : 1$, ou, o que é o mesmo, $\frac{dy}{dx} = -y$.

O integral será $y=e^{-x}$, e a base de Neper é portanto e^{-1}.

Henrique Brigss é o primeiro a construir uma tábua de logaritmos decimais; é impulsionado pelos trabalhos de Stevin, Bürgis e Neper, e parte duma regra estabelecida havia um século pelo matemático Miguel Stifel. Este viveu numa época de agitação religiosa e explorou todas as suas descobertas com o fito de prever o fim do mundo e outras locubrações cabalísticas. Um século depois, as regras de Stifel tornam-se bastante fecundas em face de outros problemas.

Stifel descobrira que, dadas as duas sucessões, já nossas conhecidas da pág. 7,

$$\begin{array}{llllll} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6,\cdots \\ 2, & 4, & 8, & 16, & 32, & 64,\cdots, \end{array}$$

se tomarmos três números consecutivos quaisquer da progressão aritmética, o médio é sempre a média aritmética dos outros dois; anàlogamente, dados três números consecutivos da progressão geométrica, o médio é sempre a média geométrica dos outros dois. Brigss, notando que a sucessão aritmética é constituída pelos logarítmos da sucessão geométrica, preencheu os intervalos das duas progressões, fazendo corresponder a cada média aritmética de dois elementos da primeira progressão, a média geométrica dos elementos correspondentes na segunda progressão, e assim sucessivamente.

Exemplo: nas sucessões anteriores, seria então

$$\begin{array}{lllllll} 1, & 1{,}5, & 2, & 2{,}5, & 3, & 3{,}5, & 4,\cdots \\ 2, & \sqrt{8}, & 4, & \sqrt{32}, & 8, & \sqrt{128}, & 16,\cdots. \end{array}$$

Este processo teve a vantagem de evitar, para o cálculo dos logaritmos, o trabalho laboriosíssimo, e impossível por vezes, de interpolação mediante extracção de raízes de índice diferente de 2 e 3, mas tem o inconveniente de calcularmos com aproximação os números, e não os logaritmos, isto é, de obtermos uma tábua de antilogaritmos e não de logaritmos.

Actualmente, porém, o cálculo de tábuas de logaritmos e antilogaritmos faz-se por processos totalmente diferentes.

O desenvolvimento em série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

é convergente para todos os valores finitos de x; é fácil determinar a aproximação que se obtém quando se toma para soma da série a soma dalguns dos seus primeiros termos. Mas essa soma representa o valor do número cujo logaritmo natural é x.

Por exemplo, se fizermos $x=\frac{1}{5}$ e somarmos os cinco primeiros termos do desenvolvimento anterior, teremos

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2}\cdot\frac{1}{2!} + \frac{1}{5^3}\cdot\frac{1}{3!} + \frac{1}{5^4}\cdot\frac{1}{4!} = 1{,}22139$$

(com cinco casas decimais)

Então 1,22139 é o número (com aproximação até às centésimas milésimas) cujo logaritmo natural é $\frac{1}{5}$. Calculamos assim uma tábua de antilogaritmos.

Por outro lado, a série

$$\log x = \log a + 2\left[\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{a+a}\right)^3 + \cdots\right],$$

é convergente sempre que

$$\left|\frac{x-a}{x+a}\right| < 1;$$

permite-nos pois calcular $\log x$ quando seja conhecido o $\log a$.

É este o desenvolvimento em série que serve actualmente para o cálculo duma tábua de logaritmos.