APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA

FÍSICA TEÓRICA

PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DE LA MATIÈRE EN ROTATION

par ***Antonio Gião***

Résumé. — De la théorie unitaire de la gravitation et de l'électromagnétisme, développée par l'auteur dans des publications antérieures, on déduit une formule générale qui exprime la proportionnalité du moment magnétique au moment du rotation des masses sphériques en rotation constante. Cette formule est valable quelle que soit la charge électrique de la masse, même lorsque cette charge est nulle. On trouve ainsi que toute masse non électrisée en rotation, par le fait même qu'elle est en rotation, engendre un champ magnétique. La formule en question est appliquée d'abord à l'électron et ensuite au neutron et au proton pour déduire les valeurs «anormales» de leur moment magnétique. Enfin, les résultats récents de M. Blackett sur le moment magnétique des astres en rotation peuvent être expliqués facilement par la même formule.

I — Théorie du moment magnétique des masses en rotation.

Considérons les équations du second ordre des fonctions propres universelles et non-arbitraires de l'opérateur laplacien attaché à la métrique externe de l'espace-temps:

$$(1) \qquad \Delta_\omega \Phi_{mn} = \beta_n \Phi_{mn} \quad (m=1,2,3,4;\ n=1,\cdots,\infty)$$

c'est-à-dire:

$$(1 \text{ bis}) \qquad \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{\omega}\, \omega^{ik} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x^i} \right) = \beta_n \Phi_{mn} .$$

Soit un domaine matériel D à l'extérieur duquel les composantes des tenseurs de densité d'énergie-quantité de mouvement matérielle et électrique sont négligeables. Supposons que l'on a dans ce domaine

$$(2) \qquad \omega_{ik} = \chi g_{ik} + \tilde{\omega}_{ik}$$

les $\tilde{\omega}_{ik}$ étant des petites quantités par rapport à χg_{ik} pour $i=k=1,2,3,4$ et χ la courbure moyenne de l'espace-temps. On a donc aussi

$$(3) \qquad \omega^{ik} = \frac{g^{ik}}{\chi} + \tilde{\omega}^{ik}$$

les $\tilde{\omega}^{ii}$ étant également des petites quantités. Par suite de $(2,3)$ les équations (1 bis) deviennent, en supprimant les termes du second ordre

$$(4) \qquad \Delta\Phi_{mn} + \frac{\chi}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g}\, \tilde{\omega}^{ik} \right) \right] \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x^i} + \chi \tilde{\omega}^{ik} \frac{\partial^2 \Phi_{mn}}{\partial x^i \partial x^k} = \chi \beta_n \Phi_{mn} ,$$

Δ étant le laplacien attaché à la métrique interne de l'espace-temps. Supposons que les $\tilde{\omega}^{ik}$ pour $i,k \neq 4$ sont petits par rapport à $\tilde{\omega}^{44}$ dans le domaine D. Comme on a:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g}\, \tilde{\omega}^{ik} \right) \cong 0 ,$$

les équations (4) se réduisent à

$$(5) \qquad \Delta\Phi_{mn} = \chi \left(\beta_n - \tilde{\omega}^{44} \frac{\partial^2}{\partial (x^4)^2} \right) \Phi_{mn} .$$

Si les phénomènes du domaine D sont quasi statiques il existe un référentiel x^1, x^2, x^3, ict par rapport auquel on a

$$\Phi_{mn} \cong \Phi_{mn}(x^1, x^2, x^3, x^4)\, e^{-\frac{t}{\tau_n}} ,$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \Phi_{mn}}{\partial (x^4)^2} = -\frac{1}{c^2 \tau_n^2} \Phi_{mn}$$

les τ_n étant des quantités que l'on peut appeler les «vies moyennes», dans le domaine D, des particules élémentaires qui correspondent, d'après notre théorie, aux différentes valeurs $n=1,2\cdots,\infty$ de l'indice de numérotage des valeurs propres des opérateurs laplaciens Δ et Δ_ω.

Appliquons en particulier les équations (5) aux électrons $(n=1)$ en admettant naturellement que ces particules ont une vie moyenne pratiquement infinie dans le demaine D (rappelons que les protons et neutrons sont formés par la fusion d'électrons sans perte de masse (1) ce qui exige que $\tau_1 = \infty$). Par suite de (6) les équations (5) s'écrivent

$$(7) \qquad \Delta\Phi_{mn} = \chi \left(\beta_n + \frac{\tilde{\omega}^{44}}{c^2 \tau_n^2} \right) \Phi_{mn} .$$

En appliquant ces équations aux électrons $(n=1)$ pour lesquels $\tau_1 \cong \infty$ on obtient donc dans le domaine D:

$$(8) \qquad \Delta\Phi_{m1} = \chi \beta_1 \Phi_{m1} .$$

Comparons cette équation à l'équation des valeurs et fonctions propres universelles et non arbitraires du laplacien de la métrique interne

$$(9) \qquad \Delta \Psi_{mn} = \alpha_n \Psi_{mn} .$$

Comme les Φ_{mn} et les Ψ_{mn} s'annulent sur la frontière du domaine D étant donnée la condition, posée plus haut, de l'évanouissement des composantes des tenseurs de densité d'énergie quantité de mouvement qui sont des fonctions des Φ_{mn} et des Ψ_{mn}, la comparaison des équations (9) aux équations (8) *pour* $n=1$ montre immédiatement que l'on doit nécessairement avoir dans le domaine D:

$$(10\,a,b) \qquad \Phi_{m1} = \lambda \Psi_{m1} ; \quad \chi \beta_1 = \alpha_1 ,$$

λ étant une constante (on aurait en effet $\lambda=1$ si $\omega_{ik}=\chi g_{ik}$ partout).

Envisageons maintenant les expressions des tenseurs de densité d'énergie quantité de mouvement matérielle T^{ik} et électrique U^{ik} en fonction des Ψ_{mn} et des Φ_{mn}. D'après notre théorie ces expressions sont les suivantes [1]:

$$(11\,a) \quad T_\rho^{ik} \equiv \sum_1^\infty {}_n (T_\rho)_n^{ik} = \sum_1^\infty {}_n \sum_1^4 {}_m \Big[\Psi_{mn}\, \varepsilon_n^i \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial \rho_k} - \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial \rho_k} \varepsilon_n^i \Psi_{mn} + \Psi_{mn}\, \varepsilon_n^k \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial \rho_i} - \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial \rho_i} \varepsilon_n^k \Psi_{mn}\Big] ,$$

et:

$$(11\,b) \quad U_q^{ik} \equiv \sum_1^\infty {}_n (U_q)_n^{ik} = \sum_1^\infty {}_n \sum_1^4 {}_m \Big[\Phi_{mn}\, \varepsilon_{nq}^i \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial q_k} - \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial q_k} \varepsilon_{nq}^i \Phi_{mn} + \Phi_{mn}\, \varepsilon_{nq}^k \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial q_i} \varepsilon_{nq}^k \Phi_{mn}\Big] ,$$

les ρ^i et q^i étant, en un point quelconque, des axes géodésiques *locaux* orthogonaux relatifs à la métrique interne et à la métrique externe de l'espace-temps. Les ε_n^i et ε_{nq}^i sont des matrices vecteurs définies par:

$$(12\,a,b) \qquad \varepsilon_n^i = \varepsilon_0^k \frac{\partial \rho^i}{\partial \rho_n^k} ; \quad \varepsilon_{nq}^i = \varepsilon_0^k \frac{\partial q^i}{\partial q_n^k}$$

où les ρ_n^k et q_n^k sont les axes locaux ρ^k et q^k dans une orientation (appelée orientation principale) bien définie en chaque point pour chaque valeur de l'indice n. Les Ψ_{mn} et les Φ_{mn} satisfont aussi aux équations:

$$(13\,a,b) \quad \varepsilon_n^i \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial \rho^i} = - \sqrt{\alpha_n}\, \Psi_{mn} ; \quad \varepsilon_{nq}^i \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial q^i} = - \sqrt{\beta_n}\, \Phi_{mn}$$

les orientations principales des ρ^i et des q^i, pour une valeur donnée quelconque de l'indice n, étant précisément celles qui rendent valables ces équations de propagation du premier ordre pour la même valeur de n. Par suite de $dq^i \cong \sqrt{\chi}\, d\rho^i$, les équations (13 *b*), appliquées aux électrons $(n=1)$, s'écrivent aussi comme suit:

$$\varepsilon_{1q}^i \frac{\partial \Phi_{m1}}{\partial \rho^i} = \pm \sqrt{\alpha_1}\, \Phi_{m1} ,$$

puisque nous savons que $\alpha_1 = \chi \beta_1$, c'est-à-dire $\sqrt{\alpha_1} = \pm \sqrt{\chi \beta_1}$ dans le domaine D. La condition (10 *a*), valable dans ce domaine, donne alors:

$$\varepsilon_{1q}^i \frac{\partial \Psi_{m1}}{\partial \rho^i} = \pm \sqrt{\alpha_1}\, \Psi_{m1}$$

ou bien:

$$\varepsilon_0^k \frac{\partial q^i}{\partial q_1^k} \frac{\partial \Psi_{m1}}{\partial \rho^i} = \pm \sqrt{\alpha_1}\, \Psi_{m1}$$

En comparant ces équations aux équations (13 *a*) qu'on peut écrire sous la forme

$$\varepsilon_0^k \frac{\partial \rho^i}{\partial \rho_1^k} \frac{\partial \Psi_{m1}}{\partial \rho^i} = - \sqrt{\alpha_1}\, \Psi_{m1} , \quad (n=1) ,$$

on voit que

$$\frac{\partial q^i}{\partial q_1^k} = \pm \frac{\partial \rho^i}{\partial \rho_1^k}$$

c'est-à-dire

$$(14) \qquad \varepsilon_{1q}^i = \pm \varepsilon_1^i , \quad (n=1) ,$$

dans le domaine D (le signe $-$ correspond à des axes locaux q_1^i et ρ_1^i antiparallèles et le signe $+$ à des axes q_1^i et ρ_1^i parallèles). En introduisant les conditions (14) et (10 *a*) dans les expressions (11 *b*) du tenseur de densité d'énergie-quantité de mouvement électrique on trouve par comparaison avec (11 *a*)

$$(15) \qquad (U_q^{ik})_{(1)} = \pm \frac{\lambda^2}{\sqrt{\chi}} (T_\rho^{ik})_{(1)}$$

dans un domaine tel que le domaine D où la métrique externe satisfait aux conditions (2) et où les phénomènes peuvent être considérés comme quasi statiques ($U_{(1)}^{ik}$ et $T_{(1)}^{ik}$ représentent la contribution des électrons $(n=1)$ aux tenseurs de densité d'énergie-quantité de mouvement électrique et matérielle).

Nous allons introduire maintenant cet important résultat dans les équations générales du champ métrique interne et externe. Ces équations (Cf. les mémoires cités) sont les suivantes:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (R + \lambda_g) = \varkappa_g T_{ik} ;$$

$$S_{ik} - \frac{1}{2} \omega_{ik} (S + \lambda_\omega) = \varkappa_\omega U_{ik}$$

et peuvent s'écrire sous la forme:

$$(16\,a,b) \qquad \Delta_3\, g_{ik} = 2\varkappa_g \Big(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\Big) ;$$

$$\Delta_3\, \omega_{ik} = 2\chi\varkappa_\omega \Big(U_{ik} - \frac{1}{2} \omega_{ik} U\Big) ,$$

dans le cas analysé ici d'un champ quasi statique satisfaisant à (2) et en négligeant naturellement les

(1) «*Portugaliae Physica*», 2, fasc. 1. 1946, pp. 1-98; «*Portugaliae Mathematica*», 5, fasc. 3. 1946, pp. 145-192.

termes qui dépendent des très petites constantes cosmologiques λ_g et λ_ω. Le résultat (15), écrit en coordonnées ρ^i pour les $U^{ik}_{(1)}$, prend la forme:

$$(17)\qquad (U^{ik}_{\rho})_{(1)} = \pm \lambda^2 \sqrt{\chi}\,(T^{ik}_{\rho})_{(1)},$$

ou bien:

$$(U_{(\rho)ik})_{(1)} = \pm \lambda^2 \sqrt{\chi}\,(T_{(\rho)ik})_{(1)}$$

de sorte que les équations (16*b*) deviennent:

$$(18)\qquad \Delta_3\,\omega_{ik} = \pm 2\lambda^2 \chi \sqrt{\chi}\,\varkappa_\omega \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T\right)$$

puisqu'on peut naturellement ne pas tenir compte de la très faible influence des termes pour $n \geq 2$ [qui correspondent aux microélectrons][1] de la série (11*a*). Cette série est en effet très rapidement convergente, son terme général tendant vers zéro comme n^{-5} quand $n \to \infty$. Ceci prouve qu'il existe dans le domaine D *deux* solutions pour le champ métrique externe qui sont compatibles avec le *même* tenseur de densité d'énergie-quantité de mouvement matérielle. Appliquons alors les équations (16*a*) et (18) spécialement aux composantes g_{4i} et ω_{4i} pour $i=1,2,3$. Un simple coup d'oeil sur ces équations montre que les solutions de (18) s'annulant en tout point infiniment éloigné du domaine D satisfont nécessairement à la condition:

$$(19)\qquad \omega_{4i} = \xi g_{4i} \qquad (i=1,2,3)$$

ξ étant une constante dans le domaine D dont la valeur est donnée par:

$$(20)\qquad \xi = \pm \lambda^2 \chi \sqrt{\chi}\,\frac{\varkappa_\omega}{\varkappa_g}.$$

Comme l'espace-temps véritable est un espace-temps de De Sitter légèrement déformé dont le rayon est P_0, et pour lequel on a

$$\varkappa_g = \frac{1}{P_0}; \qquad \varkappa_\omega = \frac{1}{\sqrt{P_0}},$$

la relation (20) peut donc s'écrire comme suit:

$$(21)\qquad \xi \cong \pm \lambda^2 \chi$$

puisque $\chi \cong 1/P_0$. Nous écrirons d'ailleurs en général: $\bar{\lambda}^2 = \lambda^2 \sqrt{\chi}\,\varkappa_\omega/\varkappa_g$, c'est-à-dire:

$$(21')\qquad \xi = \pm \bar{\lambda}^2 \chi$$

Considérons maintenant une masse en rotation. En faisant apparaître la constante newtonienne K de la gravitation par la relation bien connue $\varkappa_e = 8\pi K/c^2$ l'expression du tenseur de densité d'énergie-quantité de mouvement matérielle devient:

$$T_{ik} = \frac{8\pi}{c^2}\frac{K}{\varkappa_g}\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} + \Theta_{ik}$$

(1) Au sujet de ces particles élémentaires, dont l'existence est prévue par notre théorie, voir: «*Comptes Rendus*», 224 (1947), p. 454, et *Portugaliae Mathematica*, vol. 6, fasc. 2, pp. 67-114 (1947).

où Θ_{ik} est le tenseur des tensions donné approximativement par: $\Theta_{ik} = -\frac{8\pi}{c^4}\frac{K}{\varkappa_g} p\,\delta_{ik}$ et μ la densité de masse propre. Pour une masse en rotation on a:

$$ic\,\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{\Omega}_{\rm rot} \times \vec{l},$$

$d\vec{x}/ds$ étant le trivecteur vitesse (spatial), $\vec{\Omega}_{\rm rot}$ la vitesse angulaire de rotation et $\vec{x}$ le rayon vecteur d'un point à la distance spatiale l de l'axe de rotation. On a donc:

$$T_{41} = -\frac{8\pi}{ic^3}\frac{K}{\varkappa_g}\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\rm rot}\,x_2;$$

$$T_{42} = \frac{8\pi}{ic^3}\frac{K}{\varkappa_g}\left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\rm rot}\,x_1;$$

$$T_{43} = 0,$$

en faisant coïncider l'axe de rotation avec l'axe des x_3. A l'aide de cette expression on obtient la solution des équations (16*a*) pour une masse en rotation. La solution extérieure s'écrit:[1]

$$g_{41}(P) = -\frac{4K}{ic^3}\int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\rm rot}\frac{x_2}{r(P,Q)}\,dv_Q;$$

$$g_{42}(P) = \frac{4K}{ic^3}\int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\rm rot}\frac{x_1}{r(P,Q)}\,dv_Q;$$

$$g_{43} = 0,$$

r étant la distance spatiale des points P et Q (nous appelons solution extérieure la solution pour tout point P extérieur au domaine D). La solution extérieure correspondante des équations (18) s'écrit donc comme suit, compte tenu de (20):

$$(22)\quad \omega_{41}(P) = -\frac{4\xi K}{ic^3}\int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\rm rot}\frac{x_2}{r(P,Q)}\,dv_Q;$$

$$\omega_{42}(P) = \frac{4\xi K}{ic^3}\int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\rm rot}\frac{x_1}{r(P,Q)}\,dv_Q; \quad \omega_{43} = 0.$$

Envisageons le cas particulier très important où la masse en rotation est sphérique. On a alors

$$(23)\qquad \int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\rm rot}\frac{x_j}{r(P,Q)}\,dv_Q =$$

$$= \frac{x_j}{2r_0^3}\,\gamma \int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right)\Omega_{\rm rot}\,l^2\,dv_Q \equiv \frac{x_j}{2r_0^3}\,\gamma M_{\rm rot},$$

r_0 étant la distance du point P au centre de la sphère, γ un coefficient numérique égal à l'unité quand $\mu + \frac{p}{c^2}$

(1) Voir par exemple: Chazy, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, t. II, p. 171, Paris, 1934; G. L. Clark, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 43 (1947), 2, pp. 164-177.

et Ω_{rot} ont une symétrie sphérique ou sont constants dans D, et M_{rot} le moment de rotation de la masse. Quand $\mu + \frac{p}{c^2}$ et Ω_{rot} sont constants dans D, on a évidemment:

$$M_{\text{rot}} = \frac{2}{5} M \Omega_{\text{rot}} R^2$$

le rayon de la sphère étant R et M sa masse définie par:

$$M \equiv \int_D \left(\mu + \frac{p}{c^2}\right) dv$$

c'est-à-dire en tenant compte de l'équivalent de masse de l'énergie de pression. Par suite de (23) la solution (22) devient donc pour une sphère en rotation:

$$\omega_{41} = -2\xi \frac{K}{ic^3} \frac{x_2}{r_0^3} \gamma M_{\text{rot}}; \tag{24}$$

$$\omega_{42} = 2\xi \frac{K}{ic^3} \frac{x_1}{r_0^3} \gamma M_{\text{rot}}; \quad \omega_{43} = 0 .$$

D'après notre théorie unitaire *les phénomènes électromagnétiques sont essentiellement des propriétés de la métrique externe de l'espace-temps*; en d'autres termes, ils sont décrits par les ω_{ik} ou par des fonctions des ω_{ik}. En particulier, les composantes H_i $(i = 1, 2, 3)$ du champ magnétique statique $\vec{H}$ sont données par les expressions [1]:

$$H_i = \frac{c^2}{i\chi} \frac{(m_0)_e}{e} \left(\frac{\partial \omega_{4k}}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_{4j}}{\partial x^k}\right); \quad \begin{pmatrix} i, j, k = \text{permutation} \\ \text{circulaire de } 1, 2, 3 \end{pmatrix}$$

En tenant compte de la solution (24) pour les ω_{4i}, on obtient donc pour une sphère en rotation:

$$\vec{H} = 2 \frac{\xi}{\chi} \frac{(m_0)_e}{ec} K\gamma (M_{\text{rot}}) \left[\text{rot} \left(\vec{u}_3 \times \frac{\vec{x}}{r_0^3}\right)\right] \tag{26}$$

(1) *Portugaliae Mathematica*, vol. 5, fasc. 3, pag. 169. Les symboles $(m_0)_e$ et e désignent la masse propre et la charge de l'électron.

$\vec{u}_3$ étant le vecteur unitaire de l'axe des x_3 en coïncidence avec l'axe de rotation. On démontre en électromagnétisme classique la formule:

$$\vec{H} = M_{\text{magn}} \, \text{rot} \left(\vec{u}_3 \times \frac{\vec{x}}{r_0^3}\right) \tag{27}$$

qui relie le moment magnétique M_{magn} d'une sphère uniformément aimantée au champ magnétique $\vec{H}$ qu'elle produit à l'extérieur. On voit donc par (26) que le moment de rotation M_{rot} de la sphère engendre une aimantation dont le moment magnétique est donné par:

$$\boxed{M_{\text{magn}} = 2 \frac{\xi}{\chi} \frac{(m_0)_e}{ec} K\gamma M_{\text{rot}}} \tag{28}$$

Telle est la formule fondamentale que nous cherchions [1]. Elle est évidemment valable quelle que soit la charge électrique de la sphère, *même lorsque cette charge est nulle. Une masse en rotation, par le simple fait qu'elle est en rotation, engendre donc un champ magnétique.* En tenant compte de (21') on peut écrire la formule (28) sous la forme:

$$\boxed{M_{\text{magn}} = \pm 2 \bar{\lambda}^2 \frac{(m_0)_e}{ec} K\gamma M_{\text{rot}}} \tag{29}$$

(1) Il va sans dire que dans (28) M_{magn} est le moment magnétique de la sphère abstraction faite de l'aimantation permanente éventuelle de la masse et de l'aimantation induite qui correspond aux courants de *conduction* dans D. Ces aimantations s'éliminent, dans le problème traité ici, par suite même de la condition $\bar{\omega}^{44} > \bar{\omega}^{ii}$ $(i = 1, 2, 3)$ posée dans l'équation (4). Si cette condition n'était pas satisfaite il faudrait évidemment ajouter aux seconds membres de (15) un tenseur U'_{ik} dont les composantes U'_{41}, U'_{42}, U'_{43} correspondent précisément, à un facteur constant près, à la densité d'aimantation permanente et induite.

(à suivre)

MOVIMENTO CIENTÍFICO

ISTITUTO ROMANO DI CULTURA MATEMATICA

Sob a designação de «Istituto Romano di Cultura Matematica», fundou-se em Roma, pouco depois de 4 de Junho de 1944 – quando a vida na capital italiana começava a regressar à normalidade — um centro de estudos pedagógicos, cuja principal actividade consiste em séries anuais de conferências sobre didáctica matemática e questões afins. Participam nesta actividade vários professores, liceais e universitários. Cada conferência é seguida de discussão, geralmente longa e animada, em que pode intervir qualquer dos presentes.

Durante a minha permanência em Roma, tive a possibilidade de assistir a algumas destas conferências, entre as quais uma proferida pela Prof. Emma Castelnuovo, de que foi publicado um extracto no n.º 33 da «Gazeta de Matemática». A esta conferência assis-