O cotidiano e a continuidade

Renato J. C. Valladares
Universidade Estácio de Sá - Rio de Janeiro

Introdução

No Brasil a continuidade não é estudada nos cursos de nível médio, sendo abordada apenas nos cursos universitários de base matemática. O objetivo deste artigo é discutir este fato, estudando situações da vida cotidiana, nas quais a continuidade aparece de forma natural, o que justificaria sua inclusão no ensino médio (destinado a estudantes entre 15 e 17 anos de idade), já que este se destina à formação do cidadão, independente de sua opção profissional. Além da conveniência, será discutida a oportunidade e a forma de incluir a continuidade no nível médio, incluindo-a, desta forma, na cultura matemática básica que se pretende oferecer a quem conclui estudos neste nível.

O tema será abordado em duas partes; **a primeira procura responder à pergunta "por que estudar continuidade?". A segunda preocupa-se com a maneira de abordar o assunto no nível médio**. Na primeira parte mostraremos a falta que a continuidade faz para entender melhor muitas coisas da vida. **Para isto abordaremos três casos reais. Um se refere a aspectos da legislação criminal do menor (no Brasil), que foram temas de um artigo publicado na grande imprensa e de um capítulo de novela na TV**. Apesar da aparência não matemática do tema, a idéia da continuidade ajuda bastante na compreensão do mesmo. **Os outros casos se referem a pesquisas eleitorais e a imposto de renda, o que empresta a eles um cunho matemático mais evidente**, que será bom para introduzir o assunto. No estudo destas situações surgirão de forma muito natural, exemplos da função degrau e de funções definidas por partes.

Para ver como a continuidade pode ser abordada, desviaremos nosso caminho do **choque de épsilons e deltas** e nos concentraremos nos aspectos de mudanças **suave** e **brusca** que são descritos pela continuidade e pela descontinuidade. Estes aspectos serão evidenciados nas situações acima e em problemas simples, que usam imaginação, algumas noções correntes, e podem ser resolvidos com o uso de Matemática básica.

Primeiro caso

Nos primeiros dias do mês de Outubro de 2000, logo após o 1º turno das eleições municipais, os jornais se ocuparam de pesquisas eleitorais que, segundo se afirmava, haviam cometido muitos erros. Em especial, duas delas chamavam a atenção. Um Instituto previu que no Rio de Janeiro, o candidato Luiz Paulo Conde obteria uma votação da ordem de 37%. O mesmo instituto previu que no Recife, o candidato Roberto Magalhães obteria cerca de 52% dos votos. Nenhuma das previsões se confirmou, apresentando erros, o que era de esperar, já que pesquisas eleitorais apresentam estimativas e não previsões exatas. Os erros cometidos foram da ordem de 3%, pois a votação de Luiz

Paulo Conde foi pouco maior que 34%, enquanto Roberto Magalhães obtinha pouco menos que 50%. O erro do Rio foi considerado normal, dentro da margem de tolerância. Com o erro do Recife aconteceu o contrário. Ele não foi aceite, tendo sido considerado uma "zebra" (expressão brasileira que significa "fato inesperado").

Cabe então perguntar: Porque o mesmo erro, da ordem de 3% foi considerado normal para o Rio e uma "zebra" para o Recife? A resposta é simples: No Rio a diferença não alterou a expectativa sobre o resultado da eleição (ida do candidato para o 2º turno, de acordo com a legislação eleitoral brasileira). Com o percentual de 52% previsto no Recife, o candidato seria eleito no 1º turno, enquanto com o percentual inferior a 50% realmente obtido, o candidato teve que disputar o 2º turno.

O impasse

Assim, um erro da ordem de 3% não é, *a priori*, "grande" nem "pequeno". Para dimensioná-lo é necessário analisar suas conseqüências. Se estas forem "pequenas", como no caso de Conde, o erro diminui. Se forem "grandes", como no caso de Magalhães, o erro cresce. Realmente, não é "pequeno", o erro de apontar como eleito, um candidato que teve que disputar o 2º turno, quando acabou sendo derrotado, como se viu posteriormente.

Desta maneira, parece que se chega a um impasse. Por um lado, pesquisas eleitorais não apresentam previsões exatas e sim estimativas que necessariamente têm margens de erro. Por outro lado, o fato da margem de erro ser pequena, não assegura que o erro seja pequeno. Para complicar as coisas, a imprensa noticiou que um deputado insatisfeito com os erros das pesquisas "... está preparando um projeto de lei que proíbe a divulgação de pesquisas com margem de erro superior a um por cento...".

Esta proposta é inócua pois a redução da margem de erro não resolve o problema. Para ver isto, lembremos algumas situações em que houve disputa apertada. No 1º turno das eleições em São Paulo, o candidato Paulo Maluf venceu o candidato Geraldo Alkmin por uma diferença bem menor que 1%. Fato similar ocorreu no Rio de Janeiro, na disputa entre César Maia e Benedita da Silva. Muito provavelmente, nenhuma pesquisa teria sido capaz de determinar vencedor nestas disputas, mesmo que suas margens de erro fossem da ordem de 1%, já que a diferença real foi menor que este percentual. Entretanto, muitas pesquisas se pronunciaram corretamente sobre a imprevisibilidade destas disputas, usando a classificação "empate técnico".

Voltando ao Recife, vemos que lá também existia uma situação imprevisível, pois raciocinando com a margem de erro de 3%, o prognóstico de votação pouco maior que 52% não excluía (como de fato não excluiu) a possibilidade de uma votação inferior a 50%. Entretanto, diferente das outras situações, esta não poderia ser classificada como "empate técnico", pelo simples fato de não haver com quem empatar.

Neste caso, uma boa alternativa é a criação de uma nova classificação que pode ser denominada "prognóstico imprevisível" ou algo similar.

Uma descontinuidade

Como, de acordo com a legislação eleitoral brasileira, a condição *sine qua non* para um candidato se eleger, é obter mais que 50% dos votos válidos, pode-se descrever a situação eleitoral de cada candidato em função de sua votação, com auxílio de uma função real E. Numerando a situação "eleito", com o número 1 e "não eleito" com 0, a função E se define por $E(t) = 0$, se $t \leq 50$ e $E(t) = 1$, se $t > 50$. É fácil ver que a função E é descontínua em 50. Assim se estivermos trabalhando com um número a, "próximo" a 50, cujo cálculo tenha uma margem de erro, que inclua o número 50, não podemos ter certeza quanto à resposta dada por E, quando for calculada em a.

Foi exatamente o que aconteceu no Recife. Para ver isto, usemos mais uma vez a margem de erro de 3 (3%). Isto é, admitiremos que o número 52 (percentual de votação de Roberto Magalhães) foi calculado com uma margem de erro 3. Logo, era esperada uma votação entre os percentuais 52 - 3 = 49% e 52 + 3 = 55%. Assim, o ponto de descontinuidade 50 (50%) estava na margem de erro, o que impossibilitaria qualquer previsão, sendo melhor usar a classificação "prognóstico imprevisível" sugerida acima.

Continuidade e aproximações

Os raciocínios acima deixam claro que a existência de descontinuidades dificulta os cálculos aproximados e as aproximações em geral, que se baseiam na expectativa que "pequenas variações" nas causas acarretarão "pequenas variações" nos efeitos. Assim as situações em que ocorrem aproximações serão melhor abordadas se existir continuidade nos processos matemáticos (funções) que determinam estas situações, pois a continuidade é uma teoria que, nestes processos, relaciona os efeitos com suas causas. Este fato deixa clara a importância da continuidade nas diversas utilizações de recursos matemáticos, pois a todo momento se trabalha com aproximações. Afinal, nossa cultura conduz ao uso de números decimais, não obstante a grande dificuldade em obter valores decimais exatos. Esta dificuldade decorre de muitas razões, como as imprecisões inerentes a cada situação ou o fato de somente números inteiros e racionais (irredutíveis) cujo denominador tenha apenas fatores primos 2 ou 5 terem expansão decimal finita.

Segundo caso

Vejamos, num jornal, a tabela de desconto de imposto de renda na fonte pagadora.

Os ganhos entre 0 e 900 reais são isentos, enquanto os ganhos na faixa entre 900 e 1.800 pagam 15% de imposto. Para calcular o imposto nesta faixa, deve ser deduzida uma parcela de R$ 135,00.

Se não houvesse esta dedução, uma pessoa que ganhasse 901 reais, pagaria 135,15 de imposto e ficaria com o ganho real de 901 - 135,15 = 765,85 reais. Por outro lado, uma pessoa que ganhasse 900, estaria isenta e teria o ganho real de 900 - 0 = 900 reais. Neste caso, uma "pequena variação" no ganho implicaria numa "grande variação" no imposto a pagar e, conseqüentemente, a tabela seria incoerente pois uma pessoa que ganhasse mais poderia terminar com um ganho real menor do que se ganhasse menos.

Para sentir o problema, imaginemos o "presente de grego" que receberia um trabalhador que ganhasse 900 reais e tivesse obtido um aumento de 10%. Seu salário passaria a ser de 990, sobre os quais pagaria 15% de imposto, o que dá 990 x 0,15 = 148,50. Assim, ele ficaria com um ganho real de 990 - 148,50 = 841,50, bem menor que os 900 que ele tinha antes do aumento. Entretanto, a parcela de 135 reais a ser deduzida, impede que isto aconteça pois, neste caso, o imposto seria de 148,50 - 135 = 13,50 e o ganho real seria 990 - 13,50 = 976,50, maior que os 900 que ganhava antes do aumento.

Para evitar este tipo de incoerência, a tabela deve evitar que pequenas variações nos ganhos impliquem em grandes variações no imposto a pagar. Em outras palavras, a tabela deve ser descrita por uma função contínua, como será visto um pouco à frente. Antes, porém, observemos que a tabela evita outra incoerência, quando determina uma tributação de 27,5% e uma parcela a deduzir de 360 reais, para ganhos superiores a R$ 1.800,00. Se em vez de 360, esta parcela fosse - por exemplo - de R$ 400,00, uma pessoa que ganhasse R$ 1.801,00 pagaria R$ 95,27 de imposto enquanto outra pessoa que ganhasse 1.800 seria tributada em 135 reais. Novamente, teríamos uma incoerência, decorrente de "uma pequena variação no ganho implicar em uma grande variação no imposto a pagar". Só que agora, a variação do imposto seria "contrária" à do ganho.

A Função

Como o leitor pode verificar, o imposto a ser descontado é dado em função do ganho pela função $I(t) = 0$ se $t \leq 900$; $I(t) = 0{,}15t - 135$, se $900 < t \leq 1.800$; $I(t) = 0{,}275t - 360$, se $t > 1.800$. Esta função é contínua.

Uma Situação Prática

A tabela de declaração anual de imposto de renda (declaração de ajuste) segue padrões similares aos do desconto mensal, tendo as mesmas alíquotas incidentes sobre valores anuais correspondentes aos valores mensais. Entretanto, para evitar que os custos operacionais do recebimento do imposto ultrapasse o valor deste, os contribuintes com imposto até 10 reais, ficam dispensados do pagamento. Isto introduz uma incoerência e sua correspondente descontinuidade. Para ver isto, imaginemos dois contribuintes com alíquota de 15%. João, com imposto de R$ 10,00, fica dispensado de pagar. Maria que teve ganho de 10 reais a mais, pagará 11,50 de imposto. Desta forma, Maria terminará com um ganho real menor que o de João, o que é uma incoerência, pois ela ganhou mais do que ele.

Para evitar esta incoerência, seria necessário cobrar o imposto de João. Entretanto, isto acarretaria outra incoerência, que é cobrar uma quantia menor que o custo da cobrança. Assim, a situação prática do imposto de renda torna inevitável a escolha de uma das incoerências. Isto é feito evitando-se pagar pela cobrança, mais que o valor cobrado.

Sem achar que isto seja uma justificativa para a escolha acima, vale observar que a diferença entre os ganhos reais de João e Maria é de 1,50 reais em um ano, ou menos que 13 centavos mensais, sendo uma "diferença pequena".

Nota

Convém notar que a idéia de "diferença pequena" inclui uma idéia de aproximação que, como vimos um pouco atrás, funciona melhor quando tem a continuidade na sua base. A explicitação do modelo matemático que descreve esta situação, e a tentativa de identificar continuidade (ou descontinuidade) já não faz mais sentido no nível médio. Não obstante este fato, acreditamos que o estudo de situações como esta, onde se identifique "aproximação" ou "continuidade", seja muito positiva na formação média do cidadão.

Terceiro caso

A noção de continuidade ultrapassa a Matemática e descreve outras formas de conhecimento. Para ver como isto ocorre, vamos nos valer de um editorial publicado num jornal. Ele criticava a legislação criminal brasileira, que estabelece a idade de 18 anos como limite mínimo para que um cidadão possa ser julgado por um crime. O articulista escreveu que "O parâmetro atual estabelece que o limite legal entre maior e menoridade é o dia do 18º aniversário. Se delinqüir um dia antes, o criminoso é inimputável, se resolver fazê-lo 24 horas depois, estará sujeito às penas da lei. Por quê? Qual é a diferença?".

Uma emissora de TV levou ao ar um capítulo de novela versando sobre assunto similar. Um bandido fez alguns reféns e a polícia solicitou que sua mãe pedisse a ele que se entregasse. Esta se recusou a fazê-lo, alegando que o filho completara 18 anos recentemente. Por isso, se fosse preso, seria condenado a muitos anos de prisão.

O jornalista considerou como uma inadequação na lei, o fato de uma pequena variação de tempo, no momento em que uma infração é cometida, possibilitar uma grande variação no rigor da punição ao infrator. O autor da novela se valeu do mesmo fato.

Esta situação guarda estreita semelhança com a situação eleitoral descrita um pouco acima. Para ver isto tomemos a função P definida por $P(t) = 0$ se $t < 18$; $P(t) = 1$ se $t \geq 18$. Fazendo t representar a idade, 0 representar a situação legal do menor e 1 representar a situação do adulto, vemos que P descreve a situação de cada cidadão, frente à legislação criminal, em função da idade. A função P tem uma descontinuidade em 18 que motivou os trabalhos do editorialista e do novelista. Como era de esperar, nem um nem outro fez referência à noção matemática de continuidade.

Assim, embora sem usar explicitamente a noção de continuidade, possivelmente sem ter conhecimento do aspecto matemático do conceito usado, o articulista e o novelista o usaram para escrever seus textos. Provavelmente ocorreu o mesmo com os leitores do artigo e os espectadores da novela que não tenham formação universitária de base matemática. Isto significa que a continuidade está presente nos raciocínios deles, o que nos leva a crer que o conhecimento explícito da noção poderia tê-los ajudado muito.

Podemos dizer o mesmo sobre as pesquisas eleitorais e sobre o imposto de renda. Em reforço a esta posição, vale observar que ao pensar em proibir pesquisas com margem de erro superior a 1%, o deputado acima citado ignorou que a descontinuidade do processo eleitoral tornaria inócua esta proibição.

Abordagem no nível médio

Vemos desta forma, que a falta do conhecimento explícito e sistematizado da noção matemática de continuidade ocasiona seu uso intuitivo, sendo percebido em umas situações e despercebido em outras. Isto ocasiona distorções no uso da continuidade ou mesmo a ausência deste uso, como foi o caso da proposta de redução da margem de erro das pesquisas. Acreditamos que este problema possa ser bem equacionado com a inclusão da continuidade na formação média, pois o conhecimento da noção possibilita sua identificação, sistematização e, conseqüentemente, sua melhor utilização. Esta constatação coloca uma questão.

Como ensinar continuidade?

Como se trata de uma noção complexa, deve-se ter cuidado. Entretanto, não é a 1ª vez que se aborda um tema complexo. Aí estão noções como ângulo, tangente ou vetor que, embora muito complexas, são tratadas em nível elementar e médio, já que são noções importantes para a formação básica do cidadão. Acabamos de ver que a continuidade também pode ter importância similar. Assim, tal como é feito com as outras noções, entendemos que se deve evidenciar os aspectos mais simples e intuitivos da continuidade, o que pode ser feito com auxílio de alguns problemas sobre os quais falaremos a seguir.

Problema 1

Um problema interessante é encontrar situações similares às pesquisas eleitorais e à legislação do menor. Vale notar que as funções E e P que descrevem estas situações, são exemplos da função degrau, largamente usada em um sem número de situações. Não é demais lembrar que a função degrau é uma função real d, definida por $d(t) = c_1$, se $t < a$; $d(t) = c_2$, se $t > a$ e $d(a) = c_3$, onde a, c_1, c_2 e c_3 são constantes reais. Esta função é contínua nos pontos $t \neq a$. Ela será contínua em a (logo, será contínua), se e somente se $c_1 = c_2 = c_3$, situação em que d se transforma em uma função constante.

Os estudantes certamente ficarão surpresos ao descobrirem que as situação "aprovado" e "reprovado" que os afeta tão de perto, são muito bem descritas em função de suas notas, por uma função degrau. A situação ficará ainda mais interessante se os critérios da escola recaírem em somas de funções degraus, como é o caso de existirem três faixas de notas, correspondentes às situações "aprovado"; "em prova final" e "reprovado". Pode-se buscar similaridade entre esta situação e a situação eleitoral de um candidato no 1º turno, que poderia ser "eleito"; "ida ao 2º turno" e "não eleito".

Problema 2

A "proposta" de uma nova faixa de desconto do imposto de renda é um problema interessante. Por exemplo, pode-se calcular a parcela a deduzir, em uma nova faixa de ganhos, acima de 4.000 reais, onde incidirá uma alíquota de 40% de imposto. Esta idéia pode se ampliar, propondo duas ou mais novas faixas de desconto.

Pode-se discutir se são ou não fundadas reclamações do tipo "o meu aumento em vez de ajudar, prejudicou, pois eu mudei de faixa no imposto de renda e acabei ficando com menos dinheiro que antes".

No Brasil, a tabela de desconto para a previdência social também tem alíquotas diferentes conforme a faixa de ganhos. Um problema interessante, é verificar se esta tabela tem ou não parcelas a deduzir, para torná-la coerente (contínua). Caso não tenha, coloca-se uma situação semelhante a da não cobrança do imposto de renda até 10 reais, vista um pouco atrás. Neste caso, vale a pena calcular o "tamanho" da descontinuidade, pois com certeza ela é muito "pequena" para pagar o trabalho de evitá-la. Vale observar que este "tamanho" é justamente a *oscilação* da função, no ponto de descontinuidade.

Problema 3

Suponhamos que João e Maria morem na cidade A e tenham que ir à cidade B, para cumprir um compromisso às 18 horas. A viagem entre A e B demora duas horas. João vai de ônibus e Maria usará o próprio carro. O ônibus parte a cada duas horas, nas horas pares. Para pegá-lo, João deve sair de casa no mínimo 10 minutos antes. Nestas condições, ele deve pegar o ônibus das quatro, devendo portanto sair de casa, no máximo, às 15:50. Maria deve sair de casa no máximo às 16 horas.

Entretanto, se houver algum atraso, as coisas correrão de maneiras diferentes para João e Maria, pois um pequeno atraso para Maria sair de casa, implicará num pequeno atraso no compromisso. De forma diferente, qualquer atraso na saída de João implicará num atraso de pelo menos duas horas na sua chegada. Para entender este fato, pode-se construir funções que descrevam o horário de chegada em função da hora em que se sai de casa. Nestas condições, identificam-se descontinuidades na função que descreve a viagem de ônibus (que é uma soma de funções degrau), enquanto a viagem de carro é descrita por uma função contínua. Interpretando os atrasos como aproximações, percebe-se como as descontinuidades dificultam os cálculos aproximados.

Dando seqüência a estes raciocínios, pode-se imaginar que há uma tolerância de 15 minutos para cumprir o compromisso. É fácil ver que João não terá nenhuma tolerância em sua saída de casa, enquanto Maria terá. Pode-se calcular o "tamanho" desta tolerância. Pode-se trabalhar com outras tolerâncias e ver que se a tolerância na chegada for maior que duas horas, então João terá uma tolerância na partida. Pode-se concluir que João só poderá se valer de tolerâncias que não sejam menores que o "tamanho" (oscilação) da descontinuidade. Vale notar que, na linguagem formal da continuidade, as tolerâncias na chegada são os "épsilons" e as da partida, são "deltas".

Pode-se sofisticar o problema supondo que após às 18 horas, a viagem fica mais lenta devido ao horário de pico. Assim se Maria sair depois das 16, fará parte da viagem depois das 18, o que implicará em diferentes tempos de viagem, em função do horário de partida. Isto torna mais interessante os cálculos das tolerâncias de partida, de acordo com as tolerâncias de chegada (ou dos "deltas" de acordo com os "épsilons").

Pode-se ainda imaginar uma viagem de avião com algumas conexões, de tal forma que um pequeno atraso que faça o passageiro perder o 1º vôo, ocasione um atraso enorme na chegada ao destino. Isto evidenciaria a *composição de erros* que é uma das dificuldades das aproximações frente a descontinuidades.

Problema 4

Não é difícil modelar uma chapa metálica de aproximadamente 1 cm de largura, em forma de arco circular que, em um conveniente referencial, as extremidades fiquem na origem e em (4, 0) e o ponto mais alto seja (2, 1) (fig.1). Neste caso, a cada número x no intervalo [0, 4] corresponde o ponto do arco de abscissa x que, por simplicidade, também será denotado por x.

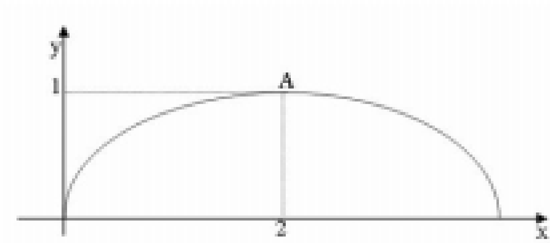

Figura 1

Em seguida, coloca-se a chapa numa mesa, de maneira que a corda fique sobre a mesa e o voltado para cima, com ponto mais alto na altura 1. Nestas condições se colocarmos uma bolinha sobre a chapa, ela rolará para o nível da mesa, salvo se for deixada exatamente no ponto 2 (ou seja, no ponto (2, 1) do referencial). Isto significa que a situação da bolinha é descrita pela função $f(x) = 0$ se $x \neq 2$; $f(2) = 1$, onde 0 corresponde ao nível da mesa e 1 ao nível do ponto 2. É fácil ver que f é uma função degrau, descontínua em 2.

Fazer a bola ficar equilibrada em A, é uma tarefa difícil que pode ser afetada por um simples tremor de mãos. Esta dificuldade em colocar a bolinha no lugar certo, nos faz colocá-la em um lugar próximo, de onde certamente rolará. Aí está uma boa amostra do quanto as aproximações são inevitáveis e como o seu uso é dificultado pelas descontinuidades, pois t pode estar "muito próximo" de 2 e $f(t) = 0$ ficar "longe" de $f(2) = 1$.

Pode-se ainda tomar a função $g(t)$ = distância entre o ponto 2 e o ponto onde a bola parou após ser deixada em t. Neste caso, $g(2) = 0$. Como em todos os outros casos, a bola rola para longe de 2, pode-se concluir que g apresenta uma descontinuidade em 2. Nos demais pontos g é contínua.

As funções f e g tanto podem ser trabalhadas concretamente, com a construção e uso da chapa, como de forma mais abstrata, apenas descrevendo as situações (como foi feito aqui). Na abordagem concreta, pode haver uma grande participação dos alunos.

Observação

O problema 4 está estreitamente associado ao equilíbrio instável estudado em Física que, desta forma, fica estreitamente associado à situação matemática de descontinuidade.

Problema 5

Suponhamos que um grupo de estudantes fez uma rifa cujo prêmio saiu para o bilhete número 2. Se dissermos que o bilhete premiado está na situação 1 e os não premiados estão na situação 0, a premiação é descrita pela função $f(t) = 0$ se $t \neq 2$ e $f(2) = 1$, a mesma função que, no problema 4, dava a altura do ponto onde a bolinha parou. Este fato evidencia a grande versatilidade das funções para descrever as mais variadas situações da vida.

Descontinuidade não é defeito

Enfim, a imaginação é o limite para usar continuidade no nível médio. Entretanto, é conveniente observar que descontinuidade não é defeito. A descontinuidade que atrapalha um prognóstico eleitoral é a mesma que aperfeiçoa o processo democrático. A descontinuidade que faz um contribuinte que ganhou R$ 10,00 a mais, acabar ficando com R$ 1,50 a menos, é a mesma que evita que se gaste 10 para receber uma conta de 5. Os critérios de um colégio podem fazer da média 5, uma desejável descontinuidade que signifique aprovação.

Enfim, continuidade e descontinuidade são qualidades matemáticas que podem ser boas ou ruins, dependendo do uso que se faça delas. Um dos melhores usos é ensiná-las ao maior número possível de pessoas, pois isto as tornará mais esclarecidas.

Bibliografia

[V1] - Valladares, Renato. *O Jeito Matemático de Pensar*. Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2003.
[V2] - Valladares, Renato. *Matemática Cultural: Um Método de Ensino e Aprendizagem*. Educação Matemática em Revista, SBEM - São Paulo, nº 13, pp. 13 a 27.