MATEMÁTICAS SUPERIORES

SIMPLIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE UMA CÓNICA

por ***José Ribeiro de Albuquerque***

Tomemos uma cónica fixa no plano, sempre a mesma. Se escolhermos um referencial no plano da curva, dois eixos coordenados rectangulares ou não, a equação da cónica será

$$(1) \qquad Ax^2+2B\,xy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

Se variarmos o referencial, mas conservarmos a cónica, variam os coeficientes, A, B, C, D, E, F, mas a equação é sempre do segundo grau e portanto da forma (1).

Se nos dão a equação da cónica num sistema de eixos coordenados oblíquos, podemos conservar a origem e um dos eixos, e, mudando apenas o outro, passar a novo sistema em que os eixos sejam rectangulares. Suporemos então que a equação (1) é já a equação da nossa cónica referida a um sistema de eixos coordenados rectangulares.

Vamos dar uma translação ao referencial levando a origem para o centro da cónica.

Se as coordenadas do centro são α, β a translação é definida por $x=\alpha+X$, $y=\beta+Y$, e teremos a nova equação da nossa cónica:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &AX^2+2B\,XY+CY^2+2\,(A\alpha+B\beta+D)\,X+\\ &+2\,(B\alpha+C\beta+E)\,Y+A\alpha^2+2B\,\alpha\beta+\\ &+C\beta^2+2D\alpha+2E\beta+F=0\,. \end{aligned}$$

Mas como a nova origem está no centro da curva, se (X, Y) são coordenadas de um ponto da cónica, e portanto verificam (2), também $(-X, -Y)$ são coordenadas de outro ponto da curva, e portanto também verificam (2); por consequência

$$(3) \qquad \begin{aligned} &AX^2+2B\,XY+CY^2-2\,(A\alpha+B\beta+D)\,X-\\ &-2\,(B\alpha+C\beta+E)\,Y+A\alpha^2+2B\,\alpha\beta+\\ &+C\beta^2+2D\alpha+2E\beta+F=0\,. \end{aligned}$$

Comparando (2) e (3) tem que ser

$$(4) \qquad \begin{cases} A\alpha+B\beta+D=0\\ B\alpha+C\beta+E=0\,. \end{cases}$$

O sistema (4) dá as coordenadas α, β do centro, e estes valores dão à equação (2) a forma

$$(5) \qquad AX^2+2B\,XY+CY^2=H$$

onde

$$(6) \qquad H=-(A\alpha^2+2B\,\alpha\beta+C\beta^2+2D\alpha+2E\beta+F)$$

Concluímos que em qualquer referencial formado por dois diâmetros perpendiculares, a nossa cónica tem sempre uma equação da forma (5).

Se muda o referencial, mudando os diâmetros, variam os coeficientes A, B, C, mas conserva-se a forma da equação (5), só com termos de grau par, e conserva-se o termo independente.

Quando a cónica se mantém fixa, e varia o referencial, não haverá outras coisas que se conservem constantes? Vamos demonstrar a seguinte propriedade de uma cónica.

É constante a soma dos inversos dos quadrados de dois semi-diâmetros perpendiculares de uma cónica.

Tomemos um sistema de eixos coordenados rectangulares com origem no centro. Nesse referencial a cónica tem a seguinte equação: $Ax^2+2B\,xy+Cy^2=H$.

Sejam $y=mx$ e $x=-my$ dois diâmetros perpendiculares, não necessàriamente conjugados. O sistema

$$\begin{cases} Ax^2+2B\,xy+Cy^2=H\\ y=mx \end{cases}$$

conduz a

$$x^2=\frac{H}{A+2Bm+Cm^2}\,, \quad y^2=\frac{m^2\,H}{A+2Bm+Cm^2}$$

e as coordenadas de um ponto P_1 em que o diâmetro $y=mx$ corta a cónica obtêm-se associando convenientemente um dos valores de x com um dos valores de y. O semi-diâmetro é a distância de P_1 à origem; o inverso do quadrado do semi-diâmetro é

$$\frac{1}{x_1^2+y_1^2}=\frac{A+2Bm+Cm^2}{H\,(1+m^2)}\,.$$

Para o diâmetro $x=-my$ vem sucessivamente

$$\begin{cases} Ax^2+2B\,xy+Cy^2=H\\ x=-my \end{cases} \qquad y^2=\frac{H}{Am^2-2Bm+C}$$

$$x^2=\frac{m^2\,H}{Am^2-2Bm+C}$$

e o inverso do quadrado do semi-diâmetro é

$$\frac{1}{x_2^2+y_2^2}=\frac{Am^2-2Bm+C}{H\,(1+m^2)}\,.$$

Portanto a soma S dos inversos dos quadrados dos semi-diâmetros perpendiculares de uma cónica é constante e igual a $\dfrac{A+C}{H}$.

Desta propriedade resulta o seguinte: *se* $Ax^2 + 2B\,xy + Cy^2 = H$ *é a equação de uma cónica fixa num sistema de eixos coordenados rectangulares* O, x, y *com origem no centro, e se* $A' X^2 + 2B' XY + C' Y^2 = H$ *é a equação da mesma cónica noutro sistema de eixos coordenados rectangulares* O, X, Y *com origem também no centro, temos* $A + C = A' + C'$.

Calculemos agora as direcções assintóticas da nossa cónica fixa, a partir da sua equação num sistema de eixos coordenados rectangulares. As direcções assintóticas são dadas por $A + 2Bm + Cm^2 = 0$ e, às duas raizes

$$(7) \qquad m_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{C}, \quad m_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{C}$$

correspondem os seguintes valores

$$m_1 - m_2 = \frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{C}, \quad m_1 \cdot m_2 = \frac{A}{C},$$

$$\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A + C}$$

o último dos quais é o da tangente do ângulo formado pelas duas assíntotas $y = m_1 x$, $y = m_2 x$, quer estas assíntotas sejam reais ou não, distintas ou não.

Mantendo-se fixa a cónica e variando o referencial (eixos coordenados rectangulares com origem no centro) mantém-se constante o valor $\frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A + C}$ e portanto mantém-se constante o valor de $B^2 - AC$.

Resumindo: *se a cónica é fixa e se variam os eixos coordenados conservando-se porém rectangulares e com a origem no centro, as diversas equações da cónica são da forma* $Ax^2 + 2B\,xy + Cy^2 = H$, *variando os seus coeficientes* A, B, C *mas conservando-se constantes, de equação, para equação, os valores de* $A + C$, *de* $B^2 - AC$, *e do termo independente* H. [1]

* * *

Suponhamos que já temos a equação da cónica referida a um par de diâmetros perpendiculares

$$(8) \qquad Ax^2 + 2B\,xy + Cy^2 = H$$

e que queremos a equação da mesma cónica referida aos eixos de simetria. A equação desejada é da forma $MX^2 + 2R\,XY + NY^2 = H$ onde deverá ser

$$(9) \qquad A + C = M + N, \quad B^2 - AC = R^2 - MN$$

Mas como os eixos de simetria são diâmetros conjugados, cada um deles divide ao meio as cordas paralelas ao outro. Por consequência, para valores constantes de X (ou de Y) a equação deverá dar valores simétricos de Y (ou de X) o que obriga a ser $R = O$. Com efeito, para $X = k$ temos sucessivamente

$$(Mk^2 - H) + 2Rk\,Y + NY^2 = 0,$$

$$Y_1 = \frac{-Rk + \sqrt{R^2k^2 - N(Mk^2 - H)}}{N},$$

$$Y_2 = \frac{-Rk - \sqrt{R^2k^2 - N(Mk^2 - H)}}{N}$$

e pondo $Y_1 = -Y_2$ resulta $R = 0$.

Então devemos ter a seguinte equação

$$(10) \qquad MX^2 + NY^2 = H$$

e as condições (9) transformam-se em: $A + C = M + N$, $AC - B^2 = MN$. Os números M e N são as raizes da equação de segundo grau

$$(11) \qquad S^2 - (A + C)\,S + AC - B^2 = 0.$$

Do referencial onde a cónica tem a equação (8) passa-se ao referencial onde a cónica tem a equação (10) com uma rotação de um ângulo ω cuja tangente é o coeficiente angular do novo eixo dos XX relativamente ao primeiro referencial. Mas os coeficientes angulares dos eixos de simetria no sistema onde a cónica tem a equação (8) são dados por

$$Bm^2 + (A - C)\,m - B = 0.$$

a esta equação dá dois valores sempre reais, distintos se a cónica tem centro. As duas rotações são dadas por

$$m_1 = \operatorname{tg}\omega_1 = \frac{C - A}{2B} + \frac{\sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}{2B},$$

$$m_2 = \operatorname{tg}\omega_2 = \frac{C - A}{2B} - \frac{\sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}{2B}$$

e como $m_1 \cdot m_2 = -1$, da relação $\operatorname{tg}(\omega_1 - \omega_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$ resulta $\omega_1 - \omega_2 = \pi/2$. As duas rotações diferem apenas na ordem em que se tomem os eixos de simetria.

* * *

Suponhamos que a cónica é uma hipérbole equilátera e que já temos a sua equação referida a um par de diâmetros perperdiculares,

$$(12) \qquad Ax^2 + 2B\,xy + Cy^2 = H.$$

Uma hipérbole é equilátera quando as suas assíntotas são perpendiculares; as fórmulas (7) dos coeficientes angulares das assíntotas deverão satisfazer a condição de perpendicularidade

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{ou} \quad \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{C} = \frac{C}{B + \sqrt{B^2 - AC}}$$

donde resulta $-A = C$.

Numa hipérbole equilátera são simétricos os coeficientes dos termos em x^2 e y^2. Isto permite reconhecer as hipérboles equiláteras.

---

[1] Os valores de $A + C$ e $B^2 - AC$ são constantes, de equação para equação, precisamente porque se supõe que as equações ao centro da mesma cónica têm *todas* o mesmo termo independente H.

Se queremos a equação da hipérbole referida às suas assíntotas, ela será da forma $JX^2+2KXY+LY^2=H$ e deverá ser

(13) $\quad A+C=J+L\,,\quad B^2-AC=K^2-JL\,.$

Mas quando se tomam as assíntotas para eixos coordenados a curva cai toda em dois quadrantes diagonalmente opostos. Para valores constantes de X (ou de Y) a equação deverá dar um único valor real de Y (ou de X) o que obriga a ser $J=L=0$.

As condições (13) reduzem-se a $K^2=B^2-AC$, e a equação da curva é

(14) $$XY=\frac{H}{\pm 2\sqrt{B^2-AC}}\,.$$

Para passar do referencial onde a cónica tem a equação (12) para o referencial onde ela tem a equação (14) deverá executar-se uma rotação medida pelo ângulo que o novo eixo dos XX, a assíntota, faz com o antigo, e cuja tangente é o coeficiente angular da assíntota.

* * *

Seja dada a equação de uma parábola

$$Ax^2+2B\,xy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

num sistema de eixos coordenados rectangulares. Como $B^2=AC$ os três primeiros termos são um quadrado perfeito. Ponhamos

(15) $$a=\sqrt{A}\,,\quad c=\sqrt{C}$$

e teremos

(16) $$(ax+cy)^2+2Dx+2Ey+F=0\,.$$

As rectas $ax+cy=0$ e $2Dx+2Ey+F=0$ encontram-se num ponto $P_0\,(x_0,y_0)$ da parábola. A recta $2Dx+2Ey+F=0$ encontra duas vezes a curva no ponto P_0 e portanto é tangente à curva nesse ponto. A recta $ax+cy=0$ encontra a curva uma única vez e portanto é o diâmetro que passa por P_0.

Se $V(\alpha,\beta)$ é o vértice da parábola, para obter a equação reduzida $Y'^2=2pX'$ vamos dar uma rotação ω aos eixos O,x,y de modo a levar o eixo dos XX a coincidir com o diâmetro $ax+cy=0$. Ao efectuar esta rotação obteremos uma equação $(Y-\beta)^2=2p\,(X-\alpha)$ ou

(17) $$Y^2=2\beta Y+2pX-(\beta^2+2p\alpha)$$

A rotação ω tem uma tangente igual ao coeficiente angular de $ax+cy=0$.

(18) $$\operatorname{tg}\omega=-\frac{a}{c}\,.$$

As fórmulas de transformação de coordenadas são

(19) $$\begin{cases} x=X\cos\omega-Y\operatorname{sen}\omega \\ y=X\operatorname{sen}\omega+Y\cos\omega\,. \end{cases}$$

Antes de substituir estes valores em (16) daremos a seguinte forma à expressão

$$\left(\frac{ax+cy}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)^2=-\frac{2Dx+2Ey+F}{a^2+c^2}$$

onde o primeiro membro é o quadrado da distância de um ponto da parábola ao novo eixo dos XX, isto é, Y^2. Fazendo agora a transformação (19) vem

$$Y^2=-2D\,\frac{X\cos\omega-Y\operatorname{sen}\omega}{a^2+c^2}-$$
$$-2E\,\frac{X\operatorname{sen}\omega+Y\cos\omega}{a^2+c^2}-\frac{F}{a^2+c^2}$$

ou ainda

$$Y^2=\frac{2}{a^2+c^2}\,(D\operatorname{sen}\omega-E\cos\omega)\,Y-$$
$$-\frac{2}{a^2+c^2}\,(D\cos\omega+E\operatorname{sen}\omega)\,X-\frac{F}{a^2+c^2}$$

e comparando com (17) temos

(20) $$\beta=\frac{1}{a^2+c^2}\,(D\operatorname{sen}\omega-E\cos\omega)\,,$$

$$p=-\frac{1}{a^2+c^2}(D\cos\omega+E\operatorname{sen}\omega),\quad \alpha=\frac{1}{2p}\left[\frac{F}{a^2+c^2}-\beta^2\right].$$

Notando que $\operatorname{tg}\omega$ é negativa e que se tem $\operatorname{sen}\omega$ e $\cos\omega$ com sinais contrários

$$\operatorname{sen}^2\omega=\frac{a^2}{a^2+c^2}\qquad \cos^2\omega=\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

teremos

$$p^2=\frac{1}{(a^2+c^2)^2}\left[D^2\frac{c^2}{a^2+c^2}+E^2\frac{a^2}{a^2+c^2}-2DE\,\frac{ac}{a^2+c^2}\right]=$$
$$=\frac{(Ea-Dc)^2}{(a^2+c^2)^3}$$

e portanto

(21) $$p=\pm\frac{Ea-Dc}{(a^2+c^2)^{3/2}}=\pm\frac{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}}{(A+C)^{3/2}}\,.$$

Os dois valores achados para p conduzem a duas equações da forma $Y'^2=\pm 2pX'$ mas uma só delas dá valores reais de Y' para valores positivos X'. Escolhe-se o sinal de p que realiza esta condição; os dois sinais correspondem aos dois sentidos que se podem atribuir ao eixo VX'.

* * *

Façamos uma aplicação prática do que se expôs.

Em eixos rectangulares uma cónica tem a equação $2x^2+3xy-2y^2+2x-11y-22=0$. As coordenadas do centro são dadas pelo sistema (4) ou seja

$$\begin{cases} 2\alpha+3\beta/2+1=0 \\ 3\alpha/2-2\beta-11/2=0 \end{cases}\qquad \alpha=1\quad \beta=-2\,.$$

A fórmula (6) dá o valor $H=10$ e a equação (5) tem a forma

$$2x^2+3xy-2y^2=10\,.$$

A equação (11) é então

$$S^2-25/4=0\quad S=\pm 5/2$$

e a equação (10) toma as formas $\pm 5x^2/2 \mp 5y^2/2=10$.

Obtemos assim duas equações

$$x^2/4-y^2/4=1\,; \quad -x^2/4+y^2/4=1$$

para a primeira o semi-eixo real é OX e para a segunda o semi-eixo real é OY.

Como a cónica é uma hipérbole equilátera, visto que satisfaz a condição $-A=C$, podemos referi-la às suas assíntotas. A equação (14) transforma-se em

$$XY=\pm 2\,.$$

Seja $4y^2-4xy+x^2+4x+12y-1=0$ a equação de uma parábola em eixos coordenados rectangulares.

A equação (16) toma a forma

$$(x-2y)^2+4x+12y-1=0$$

e a fórmula (21) dá

$$p=\pm 2/\sqrt{5}\,.$$

Surgem assim duas equações da forma $Y^2=\pm \dfrac{4}{\sqrt{5}} X$ mas uma sòmente dá valores reais de Y para valores positivos de X.

A equação reduzida da parábola é portanto

$$Y^2=\frac{4}{\sqrt{5}}X\,.$$

O MÉTODO DA INTRODUÇÃO DE UM PLANO VERTICAL EM PERSPECTIVA

por ***Luís Mendonça de Albuquerque***

1. Na resolução de alguns problemas de geometria descritiva pelo método das projecções cotadas (distância dum ponto a um plano; ângulo de dois planos; etc.) recorre-se vulgarmente ao método da dupla projecção ortogonal (Monge); para isso, introduz-se um plano perpendicular ao plano de comparação, que desempenha o papel de segundo plano de projecção.

Se é lícito objectar que tal procedimento destrói a independência do método das projecções citadas, nem por isso ele deixa de ser correntemente aconselhado e seguido em quase todas as obras didáticas da especialidade.

Surpreende, porém, o facto de não se seguir igual critério no estudo das perspectivas. Aí (pelo menos nas obras que conhecemos) evita-se sempre ir além dos elementos que definem o sistema de projecção, mesmo quando para atingir tal objectivo se tem de recorrer a construções bastante trabalhosas.

Vamos tentar mostrar que, ainda neste caso, a aplicação de tal método simplifica de maneira apreciável a resolução de certos problemas. Se o seu valor prático, em perspectiva rigorosa, se pode pôr em discussão, porque obriga a construções subsidiárias sobre dois elementos do traçado (operações que o método dos rebatimentos dispensa), em perspectiva cavaleira são inegáveis as vantagens que oferece.

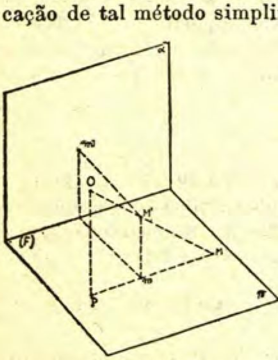


Fig. 1

2. Perspectiva rigorosa. Limitar-nos-emos, neste caso, a mostrar como se poderia obter a dupla projecção ortogonal de um ponto, conhecida a sua representação em perspectiva e o plano α, de traço (F), que se adopta para segundo plano de projecção, (fig. 1).

Seja: π, o plano do quadro; O, o centro de projecção cónica; P, o ponto principal; M', o ponto dado; M, a sua imagem; e m, a sua projecção ortogonal no quadro. Introduzindo o plano $\alpha \perp \pi$ de traço (F), o duplo sistema de projecção ortogonal é (α, π). A cota do ponto M' é, então, dada por $z=\dfrac{\overline{OP}}{\overline{OM}}\cdot\overline{Mm}$ e determina a projecção vertical do ponto, (m', m).

3. Perspectiva cavaleira. Suponhamos que o sistema de projecção é definido pelo quadro, π, (fig. 2), e pela direcção das projectantes oblíquas, δ.

Seja ainda: M', o ponto dado; M, a sua imagem; m, a sua projecção ortogonal; e $k=\operatorname{cotg} x$, a constante de redução.

Introduza-se o plano $\alpha \perp \pi$, de traço (F), como segundo plano de projecção para o sistema de Monge, (α, π). A cota de M' é, evidentemente:

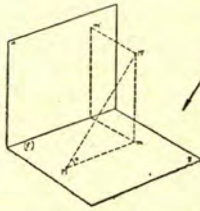


Fig. 2

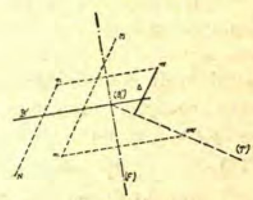


Fig. 3

$$z=\overline{mM'}=k\,.\,\overline{mM}\,.$$

Aplicação I. Determinar a distância do ponto (M, m) ao plano $(B\,;N, n)$, $(k=1/2)$.

Introduz-se o plano vertical de projecção de traço (F) perpendicular ao traço do plano dado, B (fig. 3).

No sistema de dupla projecção ortogonal, definido pelo quadro e pelo plano (F), o plano dado é o plano de topo, (T'); e o ponto dado é (m', m).

A distância pedida é, pois: Δ.

Aplicação II. Determinar o ângulo de dois planos de traços paralelos (ou com o mesmo traço). (Supõe-se $k=1/2$).

Aplicação III. Determinar o ângulo de duas rectas $(k=2/3)$.

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

I — ESCOLAS PORTUGUESAS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Alguns exercícios de exames em 1946-47.

2528 — Integre a equação diferencial $x^2 y''-2xy'+2y=0$. R: *Seja* $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $y'=2\alpha x+\beta$, $y''=2\alpha$. *Substituindo na equação proposta deduz-se* $\gamma=0$, $\alpha=\mathcal{C}_1$, $\beta=\mathcal{C}_2$. *O integral geral é* $y=\mathcal{C}_1 x^2+\mathcal{C}_2 x$.

2529 — Determine a equação da hipérbole que tem por focos $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$ e por assíntotas $y=\pm\sqrt{3}\,x$. R: $b/a=\sqrt{3}$, $b^2/a^2=3$, $c=1$, $c^2=1$, $c^2=a^2+b^2=a^2(1+b^2/a^2)=4a^2$, $a^2=c^2/4=1/4$, $a=1/2$, $b=\sqrt{3}/2$, donde $\dfrac{x^2}{(1/2)^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{3}/2)^2}=1$ (*eixos ortog.*).

2530 — Determine a relação existente entre as excentricidades de duas elipses, supondo que os focos de uma são vértices da outra e que as duas têm uma directriz comum. R: *Designe* d *a distância duma directriz da 1.ª elipse ao centro. Então é* $d=d'$, *por hipótese. Considerando um dos extremos do eixo menor fàcilmente se vê que* $e=a/d$ *ou* $d=a/e$. *Da mesma forma* $d'=a'/e'$. *Como* $a'=c$ (*por hipótese*): $ae'=ce$ *ou* $e'=c/a\times e=e^2$. *Em resumo:* $e'=e^2$.

2531 — Determine o vértice, o eixo, a directriz e o foco da parábola $y=x-x^2$ e o ponto em que esta curva tem por tangente a recta $X+Y=1$ (eixos ortogonais). R: *A equação da parábola está referida a uma paralela à tangente no vértice (como eixo das abscissas) e a uma paralela ao eixo de simetria (como eixo das ordenadas). E pois da forma:* $(x-a)^2=\pm 2p\,(y-b)$, *sendo* a *e* b *as coordenadas do vértice e* p *a distância do foco à directriz. Desenvolvendo:* $x^2-2ax\mp 2py+a^2\pm 2bp=0$, *donde* $-2a=-1$, $\mp 2p=1$, $a^2\pm 2bp=0$. *Resulta* $a=1/2$, $p=1/2$ ($p>0$ *e é preciso optar pelo sinal* $+$ *na 2.ª equação e pelo sinal* $-$ *na 3.ª*), $b=1/4$. *A equação da parábola é pois* $(x-1/2)^2=-2\cdot 1/2\cdot(y-1/4)$. *Eixo de simetria:* $x=1/2$; *tangente no vértice:* $y=1/4$; *foco:* $F(1/2,0)$; *directriz:* $y=1/2$. *Equação geral das tangentes:* $(x-1/2)(X-1/2)=-1/2\cdot(y-1/4+Y-1/4)$ *ou* $Y=(1-2x)X+x-y$. *Identifica-se com* $Y=-X+1$ *quando* $1-2x=-1$ *e* $x-y=1$ *ou* $x=1, y=0$ (*ponto cujas coordenadas satisfazem à equação da parábola*).

2532 — É possível determinar λ por forma que a cónica $x^2/(a^2-\lambda)+y^2/(b^2-\lambda)-1=0$ passe por um dado ponto $P(x_0,y_0)$ do plano? De que natureza é essa cónica? Determine o ângulo sob o qual se cruzam duas cónicas concorrentes. (Eixos ortogonais).

2533 — Calcule a grandeza d da perpendicular baixada do ponto $M(x,y)$ da curva $y=x^2/(1+x)$ sobre a recta $Y=X+p$, e determine depois p por forma que seja $\lim\limits_{x=\infty} d=0$. (Eixos ortogonais).

R: *A equação hesseana da recta do enunciado é:* $\dfrac{X-Y+p}{\pm\sqrt{2}}=0$. *Logo* $d=\dfrac{|x-x^2/(1+x)+p|}{\sqrt{2}}=$

$$=\left|\frac{x(p+1)+p}{\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}}\right|,\quad \lim_{x=\infty} d=\left|\frac{p+1}{\sqrt{2}}\right|=0 \ \textit{desde que}\ p=-1.$$

Soluções dos n.ºs 2528 a 2533 de P. T. Braumann.

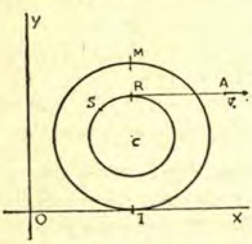
Errata: No n.º 33 de *Gazeta de Matemática*, pág. 19, 1.ª coluna, linhas 24 e 25 (exercício n.º 2476) deve ler-se «passam pela» em lugar de «têm por vértice a».

MECÂNICA RACIONAL

F. C. P. — Mecânica Racional — 1.º Exame de frequência, 1946-47 — 1.ª Chamada.

2534 — Qual é o mínimo de tempo gasto por um comboio a percorrer os 12,5 km que separam duas estações A e B sabendo-se que os máximos da velocidade e das acelerações de arranque e de travagem são respectivamente 10 km/h, 1 km/h/s e 2 km/h/s. Traçar o diagrama (v,t) da marcha do combóio. R: *O esquema da marcha do comboio é, evidentemente,* *o seguinte: primeiro, acelera até atingir a velocidade máxima, durante o tempo* t_1; *segue depois, no tempo* t_2, *com essa velocidade máxima; por fim, começa a retardar, o que se verifica durante um tempo* t_3 *tal que* $v_m - a_2 t_3 = 0$, *se adoptarmos as designações: velocidade máxima* $v_m = 100\ \mathrm{km/h}$, *aceleração de arranque* $a_1 = 1\ \mathrm{km/h/s}$ *e aceleração de travagem* $a_2 = 2\ \mathrm{km/h/s}$. *De* $a_1 t_1 = v_m$, *vem* $t_1 = v_m / a_1$; *de (1)* $a_1 t_1^2/2 + v_m t_2 + v_m t_3 - a_2 t_3^2/2 = 12{,}5$, *vem* t_2. *O tempo pedido será:* $t = t_1 + t_2 + t_3$. (*Mudando unidades, virá:* $a_1 = 3.600\ \mathrm{km/h/h}$; $a_2 = 7.200\ \mathrm{km/h/h}$, *valores com que entramos em (1)*).

2535 — Os discos concêntricos D_1 e D_2 são solidários e os seus raios b_1 e b_2 conhecidos e tais que $b_2 < b_1$. D_1 rola sem resvalamento sôbre Ox e o extremo A do fio SRA, fixo em S a D_2, deloca-se com velocidade constante $\vec{v}_0$ também dada, e paralela a Ox. *a*) Calcular os elementos definidores do estado cinético do conjunto $D_1 D_2$. *b*) Calcular a aceleração de I sôbre D. *c*) Determinar o centro das acelerações do conjunto $D_1 D_2$. *d*) Calcular a aceleração de R oposto a I, e deduzir do valor obtido o raio de curvatura da trajectória descrita por êsse ponto, na posição considerada. R: *A velocidade de* R *é a de* A; $\vec{v}_R = \vec{v}_0$. *Então,* $\vec{v}_0 = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{R-I}$; $v_0 = -\varphi'(b_2 + b_1)$ *ou* $\varphi' = -v_0/(b_1+b_2)$ *sendo* $\varphi = (\widehat{SC, CR})$. *O vector* $\overline{v}_0$ *e a rotação* $\vec{\omega}$ *de valor algébrico* φ', *constituem um par de elementos definidores do estado cinético.*



Outra solução: o par (v_C, ω), *em que* C *é o centro dos discos. Se* l *é o comprimento do fio, temos:* $b_2\varphi + RA = l$, $b_2\varphi' + RA' = 0$ (1).

Sendo aliás I_0 *centro de rotação, é:* $\overline{v}_C = \overline{\omega} \wedge \overline{C-I} = -\overline{OI'}$, ou $v_C = -\varphi' b_1$ $(\varphi' < 0)$. Ora, como $OI + RA = x_A$, *derivando:* $OI' + RA' = x_A'$, *ou* $v_C + RA' = v_0 \rightarrow RA' = v_0 - v_C$, *o que, em (1), dá:* $b_2\varphi' + v_0 = v_C$; *com* $v_C = -\varphi' b_1$, *vem um sistema que dá* φ' *e* v_C, *ficando:* $(b_2 + b_1)\varphi' = -v_0$; $\therefore \begin{cases} \varphi' = -v_0/(b_1+b_2) \\ v_C = b_1 v_0/(b_1+b_2). \end{cases}$

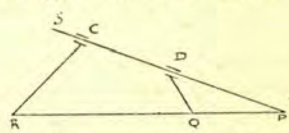
b) *Movimento relativo:* $\begin{pmatrix} I \\ XOY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ D_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 \\ XOY \end{pmatrix}$

$\overline{V}_I^r$ *é a velocidade de permutação de* I (*a mesma em relação a* D_1 *e ao* XOY) *seja* $\overline{V}$. *É claro que* $\overline{V} = \overline{v}_c$; *e como* $\overline{a}_I^{tr} = \overline{V} \wedge \overline{\omega}$; *e* $\overline{V} = $ const., $a_I^a = 0$, *virá de* $\overline{a}_I^a = \overline{a}_I^r + \overline{a}_I^{tr} + 2(\overline{\omega} \wedge \overline{V}_r)$, $\overline{a}_I^r = \overline{V} \wedge \overline{\omega}$.

c) *Como* $\overline{v}_C = $ const., *é o próprio* C.

d) $\overline{a}_R = -\omega^2 \cdot \overline{R-C} = -\omega^2 \cdot b_2 \overline{j}$; $\overline{V}_R = \overline{V}_A = \overline{V}_0$; então $a_n = V_0^2/\rho$ *e* $\rho = \dfrac{V^2}{a_n} = \dfrac{V_0^2}{\omega^2 b_2} = \dfrac{(b_1+b_2)^2}{b_2}$.

2536 — P, Q e R são fixos; C e D são dois cursores que correm ao longo de PS. Sabendo que a velocidade angular de RC é constante e igual a



80 r. p. m. determinar: *a*) as velocidades dos cursores ao longo de PS; *b*) a aceleração do cursor C ao longo de PS. R: *A solução mais simples é obtida pelos métodos da Cinemática Gráfica.*

Soluções dos n.os 2534 a 2536 de A. Andrade Guimarães.

II — ESCOLAS ESTRANGEIRAS

Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil (Rio de Janeiro) — Análise Superior — **Julho de 1946 — 1.ª Prova Parcial.** (duração 4 h).

2537 — Seja R um reticulado e L um sub-reticulado de R tal que:

E 1) *Qualquer que seja* a ∈ R *existem dois elementos* h *e* k *de* L *tais que* $h \subseteq a \subseteq k$.

Tomando R como conjunto fundamental daremos o nome de vizinhança de um ponto p de R a todo o conjunto $V(p)$ de elementos x de R tais que $h \subseteq x \subseteq k$, onde h e k são elementos de L tais que $h \subseteq p \subseteq k$.

Demonstre que o espaço topológico assim definido é um espaço de Kuratowski em que os pontos são conjuntos abertos e que L é um conjunto denso em R.

Exemplo: Seja R o conjunto das sucessões limitadas de números reais. Dadas duas sucessões limitadas

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$
$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$$

convencionemos escrever $x \subseteq y$ se e só se $x_i \leq y_i$, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$. Verifique que R é um reticulado distributivo onde $c = x \cup y$ é a sucessão cujo termo geral é $c_n = \max(x_n, y_n)$ e que $x \cap y$ é a sucessão cujo termo geral é $\min(x_n, y_n)$.

Seja L o conjunto das sucessões de números reais em que quási todos os termos são iguais entre si. Verifique que L é um sub-reticulado de R que verifica a propriedade E 1.

2538 — Seja $f(x)$ uma funcional que a cada elemento x de L faz corresponder um número real $f(x)$.

Definição 1. Diremos que $f(x)$ *é monótona sobre* L se fôr verificada a seguinte condição

F1: $a \subseteq b$ implica $f(a) \subseteq f(b)$, onde $a, b \in L$.

Definição 2. Diremos que $f(x)$ *é aditiva sobre* L se

F2: $f(a \cup b) + f(a \cap b) = f(a) + f(b)$ quaisquer que sejam a e b de L.

Definição 3. Dado x de R ponhamos:

$f^0(x) =$ ínfimo $f(k)$ para todos os valores possiveis de $k \in L$ tais que $x \subseteq k$.

$f_0(x) =$ supremo $f(h)$ para todos os valores possíveis de $k \in L$ tais que $h \subseteq x$.

Diz-se que f é prolongável no ponto x de R se fôr $f^0(x) = f_0(x)$.

Demonstre os seguintes teoremas:

Teorema 1. Tôda a funcional $f(x)$ definida e monótona sôbre L é contínua em todos os pontos de L.

Teorema 2. Para que $f(x)$ monótona sobre L seja prolongável no ponto a de R é necessário e suficiente que dado $\delta > 0$ exista um par de elementos h e k de L tal que $h \subseteq a \subseteq k$ e $f(k) - f(h) < \delta$.

Definição 4. Seja P o conjunto de todos os pontos nos quais f é prolongável. Dá-se o nome de prolongamento da funcional $f(x)$ à funcional $F(x)$ definida sôbre P da seguinte maneira:

$$F(x) = f^0(x) = f_0(x) \quad \text{para} \quad x \in P,$$

Demonstre:

Teorema 3. L é uma parte de P e $F(x) = f(x)$ se $x \in L$.

Exemplo (continuação). Se quási todos os termos da sucessão $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ são iguais a a, ponhamos $f(x) = a$. Mostre que são verificados sôbre L os axiomas F1 e F2 e que os elementos de R em que f é prolongável são precisamente as *sucessões convergentes*. A funcional $F(x)$ é o limite da sucessão convergente $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ isto é

$$F(x) = \lim_{n=\infty} x_n .$$

2539 — Demonstre o seguinte teorema:

Teorema 4. Se f é uma funcional monótona e aditiva sôbre L, P é um sub-reticulado de R e $F(x)$ é não só monótona mas também aditiva sôbre P.

Exemplo (continuação). Mostre que o axioma F2 é satisfeito sôbre L e que o teorema 4 exprime que se x_n e y_n são sucessões convergentes então:

$$\lim_{n=\infty} [\max(x_n, y_n)] + \lim_{n=\infty} [\min(x_n, y_n)] = \lim_{n=\infty} x_n + \lim_{n=\infty} y_n .$$

Sugestão. Considere o exemplo a estudar como um caso concreto susceptível de encaminhar a resolução das questões propostas.

Nota — As questões propostas foram extraidas de uma memória de Ky Fan.

Enunciados do Prof. António A. R. Monteiro

Université D'Alger – Mécanique Rationnelle – **Epreuve Théorique — Mai 1947.** (durée 4 h).

2540 — Etude d'une fusée interplanétaire assez éloignée de tout astre pour pouvoir négliger l'attraction newtonienne.

Le problème comporte deux parties indépendantes.

I. Dans cette première partie, on néglige la variation de masse de la fusée due aux gaz éjectés durant l'intervalle de temps considéré.

On considère un solide S de centre de gravité O, et un repère $R\,(Oxyz)$ lié à S. L'ellipsoïde d'inertie de S est de révolution autour de Oz. Le solide est soumis à une force $\vec{f}$ constante par rapport à R, et appliquée en un point Q de Oz de coordonnées $(0, 0, -a)$ (force représentant la réaction des gaz éjectés).

1°. On suppose que la force passe par O. Décrire le mouvement de S par rapport à un repère d'origine O et de directions parallèles à celles d'une repère galiléen R_0, puis étudier le mouvement du point O par rapport à R_0 les conditions initiales étant quelconques.

2°. On suppose que $\vec{f}$ est contenue dans le plan xOz et fait avec Oz un angle a (cas où la tuyére d'échappement serait inclinée par rapport à Oz). Exprimer en fonction du temps les coordonnées du vecteur rotation $\vec{\omega}$ de S par rapport à R; lieu de l'extrémité de $\vec{\omega}$ par rapport à R. Démontrer que si $\vec{\omega}$ est convenablement choisi à l'instant initial, ce vecteur reste fixe par rapport à R; étudier dans ce cas le mouvement de O par rapport à R_0. Peut-il arriver que $\vec{\omega}$ reste fixe par rapport à R_0?

II. On suppose que la fusée éjecte une masse de gaz μ par seconde (μ pouvant être fonction du temps) et que la force $\vec{f}$ passe par O.

3°. Montrer que le vecteur $-\dfrac{1}{\mu}\vec{f}$ représente la vitesse $\vec{V}$ d'éjection des gaz par rapport à la fusée, vitesse supposée la même en tout point de l'orifice de sortie et à tout instant.

2°. La fusée étant au repos par rapport à R_0 à l'instant $t=0$, calculer sa vitesse à l'instant t en fonction de $|\vec{v}|$, et des masses de la fusée $m(0)$ à l'instant $t=0$ et $m(t)$ à l'instant t.

3°. Déterminer la vitesse de la fusée en fonction du temps de sorte que le chemin parcouru entre les instantes $t=0$ et $t=T$ soit maximum, connaissant le rapport $k=\dfrac{m(0)}{m(T)}$ et sachant que l'accélération ne doit jamais dépasser une valeur donnée γ. Calculer en fonction de γ, V, k et T le chemin parcouru dans ces conditions. Donner la valeur du débit μ en fonction du temps.

Application numérique: on donne $k=e$ (base des logarithmes népériens), $v=100\,\text{km/sec.}$, $\gamma=8\,g$ (g étant l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre). Quel sera le temps nécessaire pour parcourir une distance de $1{,}5 \cdot 10^9$ km. (approximativement la distance de Saturne) ?

R : 1°.) *Par rapport au repère indiqué,* S *a un mouvement Poinsot, avec ellipsoïde d'inertie de révolution:* Oz *fait un angle constant* θ_0 *avec un direction fixe* Oz_0. *En projection sur* Oz_0, O *est soumis à une force constante* $f\cos\theta_0$*; sur un plan perpendiculaire,* O *est soumis à une force* $f\sin\theta_0$ *qui tourne d'un mouvement uniforme: le mouvement de* O *résulte d'un mouvement circulaire de même vitesse angulaire et d'accélération* $f\sin\theta_0$, *composé avec une translation rectiligne et uniforme arbitraire.*

2°.) *La 3.e équation d'Euler donne* $r=r_0$ *et les deux premières s'écrivent (si* $A \neq C$*) :*

$$\frac{dp}{dt}+\Omega q=0, \quad \frac{dq}{dt}-\Omega(p-b)=0,$$

avec
$$\Omega=\frac{C-A}{A}r_0, \quad b=\frac{af\sin\alpha}{(C-A)\,r_0}.$$

On en tire

$$p=b+C\cos(\Omega t-\varphi), \quad q=C\sin(\Omega t-\varphi).$$

L'extrémité de $\vec{\omega}$ *décrit donc un cercle d'un mouvement uniforme dans un plan parallèle à* xOy. *Si* $p_0=b, q_0=0$, *il se réduit à son centre, et* $\vec{\omega}$, *fixe par rapport à* R, *est fixe par rapport à* R_0; *le mouvement de* S *est une rotation uniforme. En ce cas,* $\vec{f}$ *fait un angle constant avec* Oz_0, *et le mouvement de* O *est identique à celui du 1°.*

Si $A=C$, *l'extrémité de* $\vec{\omega}$ *décrit une droite.*

II. 1°. Ecrivons la conservation de la quantité de mouvement entre les instants t *et* $t+dt$ ($\vec{u}$ *désignant la vitesse de la fusée) :*

$$m\vec{u}=(m-\mu dt)(\vec{u}+d\vec{u})+\mu dt(\vec{V}+\vec{u}),$$

d'où

$$m\,d\vec{u}+\mu\,dt\,\vec{V}=0, \tag{1}$$

Puisque $\vec{f}=m\dfrac{d\vec{u}}{dt}$, *on en déduit*

$$\frac{1}{\mu}\vec{f}+\vec{V}=0.$$

2°. *Tenant compte de* $\dfrac{dm}{dt}=-\mu$, (1) *donne* $m\,du=-V\,dm$, *d'où*

$$u=V\log\frac{m(0)}{m(t)}.$$

3°. *Il faut rendre maximum* $\int_0^T u\,dt$, *sorchant que* u *croit de* 0 *à* $V\operatorname{Log}k$ *quand* t *varie de* 0 *à* T *et que l'on a* $\dfrac{du}{dt}\leq\gamma$. *Il faut* $T\geq\dfrac{V\operatorname{Log}k}{\gamma}=t_1$, *et la solution est alors*

$u(t)=\gamma t$ *pour* $0<t<t_1$, $u(t)=$ *constante pour* $t>t_1$

Le chemin parcouru est

$$L=\gamma\frac{t_1^2}{2}+\gamma t_1(T-t_1)=\gamma t_1\left(T-\frac{t_1}{2}\right). \tag{2}$$

On a $m(t)=m(0)\,e^{-u/v}$, *et le débit est*

$$\mu=-\frac{dm}{dt}=\frac{m(0)}{V}e^{-u/V}\frac{du}{dt}=\frac{m(0)}{V}\gamma\,e^{-\gamma t/V}$$

pour $0<t<t_1$ *et* $\mu=0$ *pour* $t>t_1$.

De (2) *on tire*

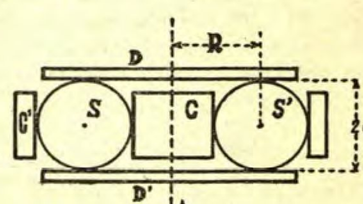
$$T=\frac{t_1}{2}+\frac{L}{\gamma^{t_1}}=\frac{V\operatorname{Log}k}{2\gamma}+\frac{L}{V\log k},$$

d'où le résultat numérique demandé, le 1.er terme étant négligeable vis-à-vis du 2ème.

MÉCANIQUE RATIONNELLE — **Epreuve Pratique — Alger, Mai 1947.** (durée 3 h).

2541 — Deux cylindres de révolution ont le même axe A; l'un C a pour rayon extérieur $R-a$ $(a<R)$, l'autre C' est creux et a pour rayon intérieur $R+a$; ils peuvent tourner autour de A.

Deux disques D et D' de même axe A peuvent également tourner autour de A. Deux sphères S et S'



de rayon a sont situées entre les disques et entre les cylindres; chacune d'elles est tangente à ces quatre solides en quatre points où le contact a lieu sans glissement.

On suppose que les disques et les cylindres ne se touchent pas, et que les deux sphères ne se touchent pas non plus. La figure ci-contre représente une coupe du système dans le cas où les centres des deux sphères sont dans un même plan passant par l'axe A, ce qu'on ne suppose pas nécessairement.

I. *Partie cinématique.* Montrer que le mouvement du système est possible en supposant seulement qu'il existe entre les vitesses angulaires ω de D, ω' de D', ω_1 de C et ω_1' de C' une relation qu'on déterminera.

Application numérique: Quel est le rapport ω_1/ω_1' si on suppose que D et C sont reliés par un mécanisme tel que $\omega_1'/\omega=2/3$ et que D' et C' sont reliés par un autre mécanisme tel que $\omega'/\omega_1=11$. On donne $a=10{,}1$ mm et $R=20$ mm.

II. *Partie dynamique.* On suppose que C, C', D, et D' peuvent tourner sans frottement autour de A, et que S et S' sont libres à part les contacts dont il a été question qui ont toujours lieu sans glissement et sans frottements de roulement ou de pivotement. On néglige les poids des divers solides. On suppose les sphères pleines, homogènes et de même masse m. On désigne par I, I', J et J' les moments d'inertie par rapport à l'axe A des solides D, D', C et C'.

1º Etudier le mouvement du système.

2º C et C' étant immobiles et D et D' en mouvement, on suppose que les trois solides C, D et D' sont brusquement liés de manière à constituer un solide unique, les différents contacts ayant toujours lieu sans glissement. Connaissant les vitesses angulaires de D et D' avant le choc, en déduire les vitesses du système après le choc.

Enunciados e soluções dos n.os 2540 e 2541 do Prof. René de Possel.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemática». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do Autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os Autores de todas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2542 — Mostre que

$$\sum_{p=0}^{m-1}\frac{p\,!}{(n+p)\,!}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(n-1)\,!}-\frac{m\,!}{(m+n-1)\,!}\right)$$

2543 — Mostre que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{p=1}^{n}(p\,!)^{r/p}\Big/\sum_{p=1}^{n}p^r\right)=e^{-r}.$$

2544 — Dados num plano α um ponto P e três rectas a, b e c, construir um triângulo rectângulo isósceles cuja hipotenusa passe por P e tenha um vértice em cada uma das rectas dadas.

2545 — Considere os seguintes trinómios:

$P_2=1-ax+bx^2$.
$P_4=1-(a^2-2b)\,x^2+b^2x^4$.
$P_6=1-(a^3-3ab)\,x^3+b^3x^6$.
$P_8=1-(a^4-4a^2b+2b^2)\,x^4+b^4x^8$.
$P_{10}=1-(a^5-5a^3b+5ab^2)\,x^5+b^5x^{10}$.
$P_{12}=1-(a^6-6a^4b+9a^2b^2-2b^3)\,x^6+b^6x^{12}$.
$P_{14}=1-(a^7-7a^5b+14a^3b^2-7ab^3)\,x^7+b^7x^{14}$.
. . . .

onde o coeficiente c_n $(n>2)$ de $-x^n$, no polinómio P_{2n} é dado por $c_n=ac_{n-1}-bc_{n-2}$.

Prove que P_{2n} divide P_{2m} se n divide m.

(De Howard D. Grossman, *Scripta Mathematica*, vol. IX, 1943, págs. 59-60).

Problemas n.os 2542 a 2544 propostos por José Morgado J.or.

REVISTAS RECEBIDAS

Argentina

Boletin Matemático — (Buenos Aires) — Ano XX, n.os 1 a 8 — 1947.

Mathematicae Notae — (Rosario) — Boletin del Instituto de Matemática — Facultad de Ciencias Matemáticas, etc. de la Universidad Nacional del Litoral — Año 6 — Fascs. 3 e 4 — 1946; Año 7 — Fasc. 1 (1947).

Revista de la Union Matemática Argentina — (Buenos Aires) — Vol. XII — n.os 3, 4 e 5 — 1947.

Brasil

Boletim da Sociedade Matemática de S. Paulo — Vol. 1, fasc. 1 — 1946.

Revista Politécnica — (S. Paulo) — n.º 151 — 1946.