

DÉVELOPPANTES GÉNÉRALISÉES D'UNE COURBE PLANE

par Gabriel Viguié (*)

Il s'agit, comme le dit M. Buhl, d'une sorte de canoisation géométrique de l'équation de Riccati.

Une courbe-base (M) et une courbe-adjointe (L) étant données dans le plan par leurs représentations en fonction du même paramètre t $M: \xi(t), \tau(t)$ et $L: F(t), G(t)$ ce qui les fait se correspondre point par point, on porte sur la tangente en M un segment $MN = \tau(t)$. Il s'agit de déterminer les courbes-lieux de N (développantes généralisées) c'est-à-dire la fonction $\tau(t)$ de telle sorte que la tangente en N à cette développante passe par le point L .

Désignons par ω_1 et ω_2 le produit vectoriel de ML avec les vecteurs Mt et Mn tangent et normal à la courbe-base, les relations classiques d'un élément d'arc de la courbe (M):

$$d\xi = d\sigma \cos \alpha \quad \text{et} \quad d\tau = d\sigma \sin \alpha$$

fournissent, comme équation différentielle du problème, l'équation de Riccati:

$$(1) \quad \omega_1(\tau' + \sigma') + \alpha' \tau(\omega_2 - \sigma' \tau) = 0.$$

Il est intéressant de remarquer qu'on a toute une famille de courbes (N) à propriétés anharmoniques, c'est-à-dire projectivement égales puisque les coordonnées de N , liées linéairement à l'inconnue τ , contiennent homographiquement la constante d'intégration.

D'un autre point de vue, si l'on se donne arbitrairement trois courbes (M), (N), (L) on définit, à partir de M , une expression en t du segment MN et une équation de Riccati déterminée par (M) et (L). Cette dernière, dont MN est solution particulière, est par suite intégrable par quadrature tout en dépendant de trois fonctions arbitraires.

Inversement si l'on se donne une équation de Riccati la plus générale

$$(2) \quad \tau' + P\tau^2 + Q\tau + R = 0,$$

il lui correspond une infinité de problèmes géométriques du type ci-dessus. La courbe-base et la courbe

adjointe dépendent d'une fonction arbitraire puisque nous avons la relation $\sigma' = R$, ce qui donne toute famille de courbes (M) «isométriques». Il y a là un fait géométrique particulièrement intéressant.

L'étude de quelques exemples, correspondant plutôt à des cas dégénérés de l'équation de Riccati, permet de retrouver, sous une autre forme, des figures de la géométrie classique plane. C'est ainsi que les coniques et les cubiques circulaires trouvent leur place parmi ces dégénérescences. Considérant enfin la forme réduite de M. E. CARTAN.

$$\tau' + P\tau^2 + 1 = 0$$

que nous associons au problème des développantes généralisées, nous arrivons au théorème suivant: les distances ML pour deux courbes (M) isométriques sont dans un rapport inverse de celui des rayons de courbure aux points correspondants.

Si nous considérons, non plus la tangente en (M) mais sa normale, nous déterminons une seconde famille de courbes (N) (développées généralisées) dépendant de l'équation de Riccati

$$\omega_2 \tau' - \alpha' \sigma' \tau^2 + (\sigma'^2 - \alpha' \omega_1) \tau + \omega_1 \sigma' = 0.$$

Ce problème n'est évidemment pas logiquement distinct du précédent; cependant envisagé sous sa réciproque, c'est-à-dire à partir de l'équation générale (2), il conduit à la relation

$$P\sigma'^2 + R\alpha'^2 - Q\alpha'\sigma' = 0$$

qui donne une infinité de courbes-bases «isoradiques», à même rayon de courbure en deux points correspondants.

La forme réduite de M. E. CARTAN associée aux développées généralisées conduit au théorème: les distances ML pour deux courbes (M) isoradiques sont proportionnelles à la quantité $\sqrt{1 + \sigma'^2}$.

(*) Ingénieur de recherches à l'O. N. E. R. A.