

III. Sobre o Cálculo Simbólico

(Continuação dos n.º 31 e 32)

por José Sebastião e Silva

Funções racionais inteiras de operadores lineares.

Sejam S um sistema vectorial e Φ uma transformação linear do sistema S em si mesmo. Por *função racional inteira do operador* Φ (suposto variável ou indeterminado) entendemos toda a função $F(\Phi)$ que se possa exprimir mediante um número finito de adições e multiplicações a partir de Φ e de constantes numéricas (isto é, escalares). Visto que a soma e o produto de dois operadores lineares é ainda um operador linear, segue-se que toda a função racional inteira dum operador linear é ainda um operador linear.

As mais simples funções racionais inteiras de Φ que se possam apresentar são, naturalmente, a função $F(\Phi) \equiv \Phi$ e todas aquelas do tipo $F(\Phi) \equiv a$, em que a representa uma constante numérica qualquer. Por definição, todas as outras funções racionais inteiras de Φ se obtêm a partir destas funções elementares, mediante um número finito de adições e de multiplicações. Donde resulta que toda a função racional inteira de Φ se pode escrever sob a forma dum *polinómio inteiro em* Φ :

$$F(\Phi) \equiv a_0 \Phi^n + a_1 \Phi^{n-1} + \dots + a_{n-1} \Phi + a_n;$$

pois que, como é fácil ver: 1) a função $F(\Phi) \equiv \Phi$ e as funções do tipo $F(\Phi) \equiv a$ (funções de grau zero) já se podem considerar escritas sob aquela forma; 2) a soma e o produto de dois polinómios inteiros em Φ calculam-se exactamente como se Φ fosse uma variável numérica — o que se reconhece atendendo às propriedades da adição e da multiplicação entre operadores lineares (distributividade, comutatividade da adição, etc.) e à permutabilidade entre operadores lineares e factores numéricos. Dos factos precedentes resulta por sua vez que, se forem $F(\Phi)$, $G(\Phi)$ funções racionais inteiras de Φ , os operadores $F(\Phi)$, $G(\Phi)$ serão permutáveis, isto é ter-se-á $F(\Phi) \cdot G(\Phi) = G(\Phi) \cdot F(\Phi)$.

Consideremos agora n transformações lineares Φ_1, \dots, Φ_n , do sistema vectorial S em si mesmo, as quais sejam permutáveis entre si duas a duas. A definição de *função racional inteira* $F(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ dos operadores Φ_1, \dots, Φ_n será análoga à precedente, e o que foi dito a respeito das funções racionais inteiras de Φ applica-se *mutatis mutandis* às funções racionais inteiras de Φ_1, \dots, Φ_n .

Exemplo: Seja \mathcal{A} o conjunto de todas as funções analíticas de n variáveis complexas z_1, \dots, z_n , defi-

nidas num mesmo domínio, e convençionemos representar por $D_i \varphi$ a derivada parcial em ordem a z_i de cada função $\varphi \in \mathcal{A}$ ($i = 1, \dots, n$). É manifesto que os operadores D_1, \dots, D_n constituem transformações lineares do sistema vectorial \mathcal{A} em si mesmo permutáveis entre si duas a duas, sendo portanto lícito definir funções racionais inteiras de tais operadores. Em particular, a potência $(h_1 D_1 + \dots + h_n D_n)^p$, em que h_1, \dots, h_n representam escalares quaisquer e p um número natural também qualquer, poderá desenvolver-se segundo a fórmula clássica — o que será agora, não apenas uma simples coincidência simbólica, mas um facto matemático demonstrável, ligado à teoria dos operadores lineares. Finalmente, poderemos definir com maior generalidade *função racional inteira das variáveis* Φ_1, \dots, Φ_n , admitindo que as constantes a que se refere a definição (em particular, os coeficientes dos polinómios) possam ser, em vez de números, operadores lineares quaisquer, permutáveis com cada um dos operadores Φ_1, \dots, Φ_n . As regras de cálculo usuais são ainda aplicáveis neste caso.

Funções racionais fraccionárias de operadores lineares.

Seja S um conjunto qualquer (que não será portanto, necessariamente, um sistema vectorial) e seja Φ uma transformação unívoca do conjunto S em si mesmo. Diremos que a transformação Φ é *invertível*, quando existir uma outra transformação unívoca Ξ do conjunto S em si mesmo, tal que $\Xi \Phi = \Phi \Xi = 1$; em tal hipótese, o referido elemento Ξ será chamado *inverso*

de Φ e poderá representar-se por Φ^{-1} ou por $\frac{1}{\Phi}$. Ora, como é fácil ver, para que o operador Φ seja invertível, é necessário e suficiente que ele constitua uma transformação biunívoca do conjunto S em si mesmo; isto é, será necessário e suficiente, que, para todo o elemento \mathbf{v} de S , exista um e um só elemento \mathbf{u} de S , tal que $\Phi \mathbf{u} = \mathbf{v}$ (1).

Assim, por exemplo, o operador D não será invertível, segundo tal conceito. Mas já a função $\varphi x \equiv x^3$ é uma transformação biunívoca do conjunto dos números reais em si mesmo, e portanto um operador invertível, tendo-se $\varphi^{-1} = \sqrt[3]{}$. Do mesmo modo, o operador

(1) Dêste modo, «biunívoca» será sinónimo de «invertível».

$\Theta = \begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$ admite o inverso $\Theta^{-1} = \begin{pmatrix} b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$.⁽¹⁾ Seja

finalmente Φ uma transformação linear do espaço cartesiano R_n em si mesmo: condição necessária e suficiente para que o operador Φ admita inverso é que o determinante da matriz representativa de Φ seja diferente de zero; em tal hipótese, o operador Φ^{-1} poderá ser determinado segundo a regra de CRAMER.

Os operadores invertíveis dir-se-ão também *regulares* e os operadores não invertíveis serão também chamados *singulares* ou *degeneres*.

Da anterior definição deduzem-se facilmente as seguintes propriedades: 1) *Se Φ é um operador regular, tem-se $(\Phi^{-1})^{-1} = \Phi$* ; 2) *Se os operadores Φ, Ψ são regulares, tem-se $(\Phi\Psi)^{-1} = \Psi^{-1}\Phi^{-1}$* ; 3) *Se os operadores Φ, Ψ são permutáveis entre si e Ψ é regular, também Φ, Ψ^{-1} são permutáveis entre si*⁽²⁾.

Nesta última hipótese, chama-se *coiciente* de Φ por Ψ e pode representar-se por $\frac{\Phi}{\Psi}$ o operador $\Phi\Psi^{-1} = \Psi^{-1}\Phi$.

Então, das proposições 2), 3) deduz-se imediatamente que: *Dados quatro operadores $\Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$, permutáveis entre si dois a dois, e dos quais Ψ_1 e Ψ_2 sejam regulares, tem-se*

$$\frac{\Phi_1}{\Psi_1} \cdot \frac{\Phi_2}{\Psi_2} = \frac{\Phi_1 \cdot \Phi_2}{\Psi_1 \cdot \Psi_2}. \text{ Em particular:}$$

Dados três operadores Φ, Ψ, Θ , permutáveis entre si dois a dois e dos quais Ψ, Θ sejam regulares, tem-se

$$\frac{\Phi}{\Psi} = \frac{\Phi\Theta}{\Psi\Theta}.$$

Temos suposto até agora que S é um conjunto qualquer. Pois bem, vamos agora a partir deste momento que S é de novo um sistema vectorial. Em tal hipótese, se forem Φ, Ψ, Θ três transformações unívocas do sistema S em si mesmo, sendo Θ regular, ter-se-á ainda:

$$\frac{\Phi}{\Theta} + \frac{\Psi}{\Theta} = \frac{\Phi + \Psi}{\Theta}.$$

Como se vê, é possível estender ao caso presente, uma a uma, tôdas as propriedades formais das frações numéricas, sob convenientes restrições⁽³⁾. Por outro

(1) Recordemos que, na teoria de GALOIS, são chamadas substituições estas transformações biunívocas dum conjunto finito em si mesmo.

(2) Tem-se com efeito $\Psi^{-1}\Phi = \Psi^{-1}\Phi\Psi\Psi^{-1} = \Psi^{-1}\Psi\Phi\Psi^{-1} = \Phi\Psi^{-1}$, q. e. d.

(3) Tal não deve surpreender-nos. A maneira mais natural de introduzir os números racionais (e mesmo os números reais) consiste em apresentá-los como operadores lineares definidos num sistema de *grandezas contínuas*. Institue-se d'êste modo uma *teoria sintética dos números*, que será logicamente impecável, quando se tiver dado uma conveniente axiomática dos *sistemas de grandezas contínuas*, e se tiver demonstrado a não-contradição dessa axiomática (reduzindo-a à não-contradição da aritmética dos inteiros). Em particular, observando que os números positivos formam um sistema de grandezas contínuas a respeito da multiplicação, é-se conduzido a uma teoria dos logaritmos, que é a mais simples, a mais natural e a mais elegante que se possa conceber.

lado, recordando que duas funções racionais inteiras dum mesmo operador linear são sempre operadores lineares permutáveis entre si, e atendendo à proposição 3), torna-se natural agora definir *função racional fraccionária dum operador linear Φ* (suposto variável). Daremos esse nome a toda a função $R(\Phi)$, que, sem ser racional inteira, se possa reduzir à forma

$$R(\Phi) = \frac{f(\Phi)}{g(\Phi)} \text{ em que } f, g \text{ designam duas quaisquer}$$

funções racionais inteiras (de coeficientes numéricos). É claro que a função $R(\Phi)$ só será definida para aqueles valores de Φ que tornem o operador $g(\Phi)$ regular.

Podemos agora abordar o problema da decomposição duma fracção racional própria em soma de fracções simples: Dados dois polinómios inteiros em z , $p(z), q(z)$, dos quais o primeiro tenha grau inferior ao segundo, sabe-se que, representando por $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ as raízes (oportunamente repetidas quando múltiplas)

da equação $q(z) = 0$, a função racional $\frac{p(z)}{q(z)}$ admite

$$\text{uma decomposição do tipo } \frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(z-\lambda_i)^{r_i}}, \text{ em}$$

que os k_i representam determinados números complexos e os r_i determinados números inteiros. Pois bem, atendendo aos resultados precedentes, é bem fácil agora demonstrar que, *dado um operador linear Φ , para o qual os operadores $\Phi - \lambda_1, \dots, \Phi - \lambda_n$ sejam regulares, poderá ainda escrever-se*

$$\frac{p(\Phi)}{q(\Phi)} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{(\Phi - \lambda_i)^{r_i}}.$$

* * *

Todavia, êste resultado não permite ainda justificar o cálculo simbólico, tal como nós o utilizámos de início, na integração da equação linear ordinária a coeficientes constantes:

$$(1) \quad a_0 D^n \varphi + a_1 D^{n-1} \varphi + \dots + a_{n-1} D \varphi + a_n \varphi = \psi,$$

pois que, para nenhum valor de λ , o operador $D - \lambda$ é invertível: com efeito, a equação $D\varphi - \lambda\varphi = \theta$ admite infinitas soluções em φ , para cada função θ , dada sob certas condições. Ora não seria difícil, mediante considerações relativas a operadores plurívocos, justificar o uso do método simbólico em tal caso. É contudo preferível encarar o problema de um outro ponto de vista⁽¹⁾.

(1) O processo que vamos seguir é, na sua essência, devido a FANTAPPIK.

Representemos por \mathcal{C} o conjunto das funções complexas, definidas num intervalo fechado (a, b) e contínuas nesse intervalo⁽¹⁾. Se pusermos

$$(2) \quad \mathcal{J}f = \int_a^x f(t) dt \quad (a \leq x \leq b; f \in \mathcal{C}),$$

imediatamente se reconhece que \mathcal{J} representa uma transformação linear do sistema vectorial \mathcal{C} em si mesmo. Ora o operador $\mathcal{J} - \lambda$ é regular qualquer que seja o número complexo $\lambda \neq 0$, pois que, como é fácil verificar, a equação integral

$$\mathcal{J}\varphi - \lambda\varphi = \theta \quad (\lambda \neq 0)$$

admite, para cada $\theta \in \mathcal{C}$, a solução única

$$(3) \quad \varphi(x) \equiv -\frac{1}{\lambda}\theta(x) - \frac{1}{\lambda^2} \int_a^x e^{\lambda(x-t)} \theta(t) dt,$$

a qual pertence ainda, manifestamente, ao conjunto \mathcal{C} . (Para $\lambda=0$, o operador $\mathcal{J} - \lambda$ converte-se no operador \mathcal{J} , que é visivelmente singular).

Estamos portanto habilitados a integrar a equação (1), com as condições iniciais $\varphi^{(i)}(a) = c_i$ ($i=0, \dots, n-1$). Suponhamos, para fixar ideias, $n=2$:

$$(1^*) \quad a_0 D^2 \varphi + a_1 D \varphi + a_2 \varphi = \psi \quad (a_0 \neq 0);$$

aplicando duas vezes o operador \mathcal{J} a ambos os membros de (1*) (admitindo que $\psi, \varphi \in \mathcal{C}$), ter-se-á sucessivamente, pondo $\varphi(a) = c_0, \varphi'(a) = c_1$:

$$a_0 D \varphi - a_0 c_1 + a_1 \varphi - a_1 c_0 + a_2 \mathcal{J}\varphi = \mathcal{J}\psi$$

$$a_0 \varphi - a_0 c_0 - a_0 c_1 x + a_1 \mathcal{J}\varphi - a_1 c_0 x + a_2 \mathcal{J}^2 \varphi = \mathcal{J}^2 \psi$$

ou ainda, pondo $\bar{\psi} = \mathcal{J}^2 \psi + a_0 c_0 + (a_0 c_1 + a_1 c_0) x$:

$$(1^{**}) \quad (a_2 \mathcal{J}^2 + a_1 \mathcal{J} + a_0) \varphi = \bar{\psi},$$

equação integral equivalente à equação diferencial (1*), completada com as condições iniciais $\varphi(a) = c_0, \varphi'(a) = c_1$. Podemos ainda escrever (1**) sob a forma: $\varphi = (a_2 \mathcal{J}^2 + a_1 \mathcal{J} + a_0)^{-1} \bar{\psi}$. Então, atendendo a todas as considerações precedentes⁽²⁾ e utilizando a fórmula (3) será fácil achar a solução única de (1**), expressa por meio de quadraturas a partir de $\bar{\psi}$ e das constantes c_0, c_1 . Para que o processo fique completamente justificado, será necessário verificar no final que, pertencendo ψ a \mathcal{C} , também φ pertencerá a \mathcal{C} , hipótese esta em que o processo foi aplicado. Tal verificação é porém imediata.

Analogamente se resolve um sistema de equações diferenciais lineares ordinárias a coeficientes cons-

tantes. Como já tivemos ocasião de observar, os problemas relativos a circuitos eléctricos a constantes concentradas conduzem sempre a sistemas deste tipo. A questão requiere, porém, uma análise cuidadosa, que não é possível desenvolver aqui.

Espaços de BANACH — Até agora tratámos unicamente de funções racionais de operadores lineares. Se quisermos ir para além das funções racionais de operadores lineares, sem abandonar o método da *Análise geral que temos seguido até aqui*, será necessário restringir o conceito de «sistema vectorial».

Ora notemos que, no espaço cartesiano K_n (a n dimensões complexas), costuma ser definida uma noção de «comprimento», «módulo» ou «norma» dum vector: a cada vector $u = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, atribui-se, como seu comprimento, o número real $\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2}$, que representaremos aqui por $|u|$.⁽¹⁾ Por outro lado, esta avaliação (chamemos-lhe assim) verifica as quatro condições seguintes:

$$M_1) \quad |u| > 0, \quad \text{se } u \neq 0;$$

$$M_2) \quad |u| = 0, \quad \text{se } u = 0;$$

$$M_3) \quad |u + v| \leq |u| + |v| \quad \text{quaisquer que sejam o es-}$$

$$M_4) \quad |a u| = |a| |u| \quad \text{] calar } a \text{ e os vectores } u, v.$$

Dum modo geral, chamaremos *sistema vectorial normado* a todo o sistema vectorial — relativo ao corpo real ou ao corpo complexo — no qual, a cada vector u , se considere associado, de harmonia com as condições M_1 a M_4 , um número $|u|$ chamado *norma*, *comprimento* ou *módulo* de u .

Um exemplo dum sistema vectorial normado relativo ao corpo complexo, além do já citado (o espaço K_n), é o conjunto \mathcal{C} das funções complexas contínuas num intervalo fechado (a, b) , chamando *norma* $|\varphi|$ duma função $\varphi \in \mathcal{C}$ ao máximo valor de $|\varphi(x)|$ no intervalo (a, b) ; isto é, em símbolos:

$$|\varphi| = \max |\varphi(x)| \quad (a \leq x \leq b).$$

(É bem fácil ver como, em tal caso, são verificadas as condições M_1 a M_4).

Seja S um sistema vectorial normado. Diremos que uma dada sucessão $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ de elementos de S converge para um determinado elemento u de S , e escreveremos então $u = \lim u_n$, quando, a todo o número $\epsilon > 0$, se possa fazer corresponder um número natural N_ϵ , tal que, para $n > N_\epsilon$, se tenha necessariamente $|u - u_n| < \epsilon$.

Consideremos de novo o espaço cartesiano K_n .

(1) É claro que, dado um número complexo $z = a + bi$, representamos aqui, como habitualmente, por $|z|$, o módulo de z ; isto é, pomos $|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$.

(1) Trata-se portanto de funções complexas da variável real. É claro que uma parte deste conjunto será constituída pelas funções reais definidas em (a, b) ou aí contínuas. Podíamos tratar o assunto com maior generalidade, considerando espaços funcionais mais amplos do que este, mas isso levar-nos-ia demasiado longo.

(2) Trata-se, evidentemente, de decompor a fracção própria do segundo membro numa soma de fracções simples. (Veja-se o artigo do n.º 31 desta revista).

Neste espaço é, como se sabe, aplicável o critério de convergência de CAUCHY: *Condição necessária e suficiente para que uma sucessão de vectores $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ seja convergente é que, para todo o número $\varepsilon > 0$, exista um número natural N_ε , tal que, quaisquer que sejam $p, q > N_\varepsilon$, se tenha $|u_p - u_q| < \varepsilon$.*

Por outro lado, não é difícil demonstrar que também no sistema normado \mathcal{E} é válido o referido critério de convergência.

Pois bem, chamam-se espaços de BANACH todos aqueles sistemas vectoriais normados em que é válido o critério de convergência de CAUCHY. Um espaço de BANACH diz-se real ou complexo conforme ele for um sistema vectorial relativo ao corpo real ou relativo ao corpo complexo. Os espaços K_n e \mathcal{E} são, portanto, espaços de BANACH complexos. Variadíssimos outros exemplos de espaços de BANACH poderíamos citar aqui, se esta exposição não fosse já demasiado longa.

Espaços funcionais analíticos. Um primeiro conceito de espaço funcional analítico deve-se a SALVATORE PINCHERLE⁽¹⁾. Dados um número complexo α e um número real $r \geq 0$, representemos por $[a, r]$ o conjunto de todas as séries $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$, cujos raios de convergência são superiores a r . Como se sabe, cada uma destas séries define univocamente, no interior do seu círculo de convergência, uma função analítica (isto é, uma função provida de derivada em todos os pontos interiores ao círculo). Adoptando os conceitos usuais de soma de duas séries e de produto duma série por um número complexo, o conjunto $[a, r]$ torna-se manifestamente um sistema vectorial relativo ao corpo complexo.

Diremos que uma sucessão $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ de elementos de $[a, r]$ converge para um determinado elemento f de $[a, r]$ e escreveremos então $\lim f_n = f$, quando existir pelo menos um círculo com centro em α e de raio ao mesmo tempo maior que r e menor que os raios de convergência de todas as séries $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$, sobre o qual a função $f_n(z)$ tenda uniformemente para a função $f(z)$, quando $n \rightarrow \infty$. Com tal conceito de «limite» (que não chegou a ser introduzido por PINCHERLE), o sistema $[a, r]$ torna-se um caso particular dos espaços funcionais analíticos por mim considerados na nova sistematização que dei à teoria dos funcionais analíticos de FANTAPPIÉ⁽²⁾. Para maior brevidade, limitar-me-ei a este caso particular.

Ocorre desde logo perguntar se é possível introduzir no espaço $[a, r]$ uma noção de «norma», da qual se possa deduzir, conforme as convenções precedentes, a noção de «limite» que nele definimos. Creio que a resposta é negativa. Todavia, é fácil reconhecer que o espaço $[a, r]$ se pode exprimir, de certo modo, como soma duma infinidade numerável de espaços de BANACH.

Funções analíticas de operadores lineares. Consideremos de novo um espaço funcional analítico $[a, r]$. Seja por outro lado S um espaço de BANACH complexo, e representemos por $\Lambda(S)$ o conjunto das transformações lineares do sistema S em si mesmo. Pergunta-se: ζ Dado um operador $\Phi \in \Lambda(S)$ e uma função $f \in [a, r]$, que significado devemos atribuir ao símbolo $f(\Phi)$, que se obtém substituindo em $f(z)$ a variável complexa z pelo símbolo Φ ? Vou apenas indicar, em linhas muito gerais, como se responde a esta questão.

Observemos, em primeiro lugar, que o conjunto $[a, r]$ contém todos os polinómios inteiros em z (supõe-se, naturalmente, $\alpha \neq \infty$). Em particular, conterá a função $f(z) \equiv z$ e as funções do tipo $f(z) \equiv a$ (a , const. numérica qualquer); todas as outras funções pertencentes a $[a, r]$ se obtêm a partir dessas funções elementares, mediante adições e multiplicações efectuadas em número finito ou infinito, com passagens ao limite. Ora a atribuição dum significado ao símbolo $f(\Phi)$ deve ser feita de modo que subsistam as regras de cálculo usuais e, para isso, devem ser verificadas as seguintes condições:

- 1) $f(\Phi) \in \Lambda(S)$, desde que $\Phi \in \Lambda(S)$.
- 2) Se for $f(z) \equiv z$, será $f(\Phi) = (\Phi)$; e se for $f(z) \equiv a$, será $f(\Phi) = a$.
- 3) Se $f(z) \equiv f_1(z) + f_2(z)$, então $f(\Phi) = f_1(\Phi) + f_2(\Phi)$, e se $g(z) \equiv g_1(z) \cdot g_2(z)$, então $g(\Phi) = g_1(\Phi) \cdot g_2(\Phi)$.
- 4) Se for $f = \lim f_n$, será $f(\Phi) = \lim f_n(\Phi)$.

(Diremos, naturalmente, que uma sucessão (Φ_n) de operadores pertencentes a $\Lambda(S)$ converge para um determinado operador $\Phi \in \Lambda(S)$, quando se tiver $\lim (\Phi_n u) = \Phi u$, qualquer que seja $u \in S$).

Ora bem: *Condição necessária e suficiente para que tal problema seja resolúvel é que o operador $(\lambda - \Phi)^{-1}$ seja uma função de λ univocamente definida e analítica⁽¹⁾ no conjunto complementar do círculo com centro em α e de raio r ; em tal hipótese, a solução é única e dada pela fórmula*

$$(4) \quad f(\Phi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - \Phi} \frac{f(\lambda)}{\lambda - \Phi} d\lambda$$

(1) É claro que o significado do termo «analítica» aqui empregado deriva do anterior conceito de «limite duma sucessão de operadores». O mesmo se diga a respeito do integral que aparece na fórmula (4).

(1) Veja-se PINCHERLE na lista bibliográfica.

(2) *Sull'analisi funzionale lineare nel campo delle funzioni analitiche*, Rendiconti Acc. Lincei, 1946, pág. 711. A ideia destes espaços já se encontra esboçada num artigo de R. CACCIOPOLI sobre o mesmo assunto.

em que C representa o contorno, percorrido no sentido positivo, dum círculo com centro em α e de raio ao mesmo tempo maior que r e menor que o raio de convergência da série $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$.

Supusemos que S é um espaço de BANACH complexo; mas podíamos supor que se trata de um espaço funcional analítico ou, mais geralmente, de um espaço que se possa exprimir, de certo modo, como soma duma infinidade de espaços de BANACH complexos ⁽¹⁾.

Na hipótese de o operador Φ ser contínuo ⁽²⁾, demonstra-se que a função $(\lambda - \Phi)^{-1}$ de λ resulta analítica em todos os pontos λ em que é definida, isto é, em que o operador $\lambda - \Phi$ é invertível. Chama-se conjunto resolvente de Φ , precisamente, o conjunto desses valores de λ para os quais $(\lambda - \Phi)^{-1}$ existe, e chama-se espectro de Φ o complementar do conjunto resolvente de Φ . Portanto, no caso de Φ ser contínuo, a condição precedente reduz-se a exigir que o espectro de Φ esteja contido no círculo de de centro α e raio r .

Ainda na hipótese de Φ ser contínuo, deduz-se do que foi dito a proposição seguinte: Dada uma função $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$, condição necessária e suficiente para que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\Phi - \alpha)^n$ seja convergente e a sua soma coincida com o valor de $f(\Phi)$ dado pela fórmula (4), é que o espectro de Φ seja interior ao círculo de convergência da série dada.

Uma outra conclusão importante é ainda esta: Seja $f(z, t)$ uma função analítica das duas variáveis z, t , e seja Φ uma transformação linear de S em si mesmo, para a qual o símbolo $f(\Phi, t)$ tenha um sentido, fixado pela fórmula (4), para convenientes valores do parâmetro t ; então, se pusermos $g(z, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} f(z, t)$,

será $g(\Phi, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} f(\Phi, t)$.

* * *

Vou agora indicar brevemente, sem entrar em pormenores, algumas aplicações do que acaba de ser

(1) A fórmula (4) foi estabelecida por FANTAPPIÈ para o caso das matrizes finitas. A sua extensão aos operadores em espaços a infinitas dimensões foi sugerida por E. CARTAN em carta a G. GIORGI, e pode considerar-se efectuada por E. R. LORCH (ver bibliografia). Todavia, LORCH limita-se a operadores lineares contínuos em espaços de BANACH.

(2) O operador Φ diz-se contínuo se, para cada sucessão convergente $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ de elementos de S , se tem

$$\Phi \left(\lim_n u_n \right) = \lim_n \Phi u_n.$$

estabelecido. Consideremos a equação integro-diferencial

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \equiv \int_a^y \varphi(x, t) dt \quad (a \leq y \leq b),$$

com a condição inicial $\varphi(x, y) \equiv \theta(y)$, supondo θ pertencente ao conjunto \mathcal{C} das funções complexas, contínuas no intervalo (a, b) ; e admitamos que a função incógnita $\varphi(x, y)$ é, para cada valor de x , uma função de y pertencente a \mathcal{C} . Então, se pusermos $\int_a^y \varphi(x, t) dt \equiv \mathcal{I} \varphi(x, y)$ ⁽¹⁾, a equação (5) tomará o aspecto

$$(5^*) \quad \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, y) \equiv \mathcal{I} \varphi(x, y).$$

Ora, se \mathcal{I} fosse um símbolo numérico, a solução desta equação seria, evidentemente,

$$(6) \quad \varphi(x, y) \equiv \varphi(a, y) e^{x\mathcal{I}} \equiv e^{x\mathcal{I}} \theta(y).$$

Mas notemos que, segundo a fórmula (3) atrás considerada, o espectro do operador \mathcal{I} se reduz ao ponto $\lambda=0$ ⁽²⁾; donde se conclui que o símbolo $e^{x\mathcal{I}}$ tem sentido para todo o x real ou complexo. Por outro lado, atendendo ao último dos resultados precedentes, vê-se que $e^{x\mathcal{I}} \theta(y)$ é de facto uma solução de (5*) e portanto de (5), solução cuja unicidade é fácil estabelecer. Resta-nos calcular $e^{x\mathcal{I}} \theta(y)$; para isso basta utilizar

o desenvolvimento $e^{x\mathcal{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \mathcal{I}^n$ e observar

que é: $\mathcal{I}^n \theta(y) \equiv \frac{1}{(n-1)!} \int_a^y (y-t)^{n-1} \theta(t) dt$ ⁽³⁾; chega-se

deste modo ao resultado:

$$(6^*) \quad \varphi(x, y) \equiv \frac{d}{dy} \int_a^y J_0 [2i\sqrt{x(y-t)}] \theta(t) dt$$
 ⁽⁴⁾,

em que J_0 representa a conhecida função de BESSEL já tabelada: $J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$. É fácil agora constatar a legitimidade da hipótese segundo a qual

(1) Seria mais correcto escrever $\mathcal{I}_x \varphi(x, y)$ em vez de $\mathcal{I} \varphi(x, y)$, mas prefiro a última notação por me parecer mais sugestiva neste caso.

(2) É fácil ver que o símbolo \mathcal{I} representa uma transformação linear contínua de \mathcal{C} em si mesmo.

(3) Para reconhecer a validade desta fórmula, basta derivar n vezes sucessivas em ordem a y (sem esquecer que y é ao mesmo tempo parâmetro e limite superior do integração) e observar que as primeiras $n-1$ expressões se anulam para $y=a$.

(4) Pode ainda verificar-se que o integral que figura nesta fórmula é igual a $\int_a^y J_0 [2i\sqrt{xt}] \theta(y-t) dt$.

$\varphi(x, y)$ é, para cada valor de x , uma função de y contida em \mathcal{C} .

Em vez de (5), podíamos considerar a equação mais geral

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = \int_a^y \mu(y, t) \varphi(x, t) dt + \psi(x, y)$$

com a condição inicial $\varphi(a, y) \equiv \theta(y)$ e designando por $\mu(y, t)$, $\psi(x, y)$ funções dadas sob convenientes restrições. Então, pondo $K\varphi(x, t) \equiv \int_a^y \mu(y, t) \varphi(x, t) dt$, a

equação (7) tomaria o aspecto duma equação diferencial linear de 1.ª ordem, com o parâmetro y , cuja integração faria surgir uma função inteira do operador linear K . Notando, por outro lado, como a inversão de $\lambda - K$ consiste na resolução de uma equação linear de VOLTERRA, ver-se-ia que o espectro de K se reduz ainda, neste caso, à origem, e que, portanto, o símbolo $f(K)$ tem sentido para toda a função $f(z)$ analítica na origem⁽¹⁾. Em tudo o mais, proceder-se-ia de modo análogo ao precedente, à parte o emprego da função J_0 .

Também poderíamos substituir em (7) o limite de integração variável y pelo limite constante b , e assim, em vez do operador K , teríamos um outro operador linear \bar{K} , cujo espectro já não coincidiria necessariamente com a origem, mas seria ainda um conjunto limitado⁽²⁾, o que é suficiente para que o símbolo $f(\bar{K})$ tenha sentido quando $f(z)$ é uma função inteira.

Notemos ainda que o sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dx} \varphi_i(x) = \sum_{k=1}^n a_k^i \varphi_k(x) + \psi_i(x) \quad [i = 1, 2, \dots, n],$$

com a condição inicial $\varphi_i(a) = c_i$, designando por ψ_i funções dadas e por a_k^i números quaisquer, se pode integrar por considerações inteiramente análogas às precedentes, com a única diferença de que, em vez do operador \bar{K} , nos aparece agora o operador definido pela matriz finita $\{a_k^i\}$ ($i, k = 1, \dots, n$).

Em todos estes exemplos, as equações diferenciais são apenas da primeira ordem. Passando a equações de ordem superior, é-se levado a considerar funções analíticas de operadores lineares, que já não são funções inteiras.

* * *

O cálculo operacional baseado na fórmula (4) pode estender-se às funções de mais de uma variável. Seja S um espaço de BANACH (ou mais geralmente um espaço que se possa exprimir como soma de infinitos espaços de BANACH) e sejam Φ_1, \dots, Φ_n transformações lineares do espaço S em si mesmo permutáveis entre si duas a duas. Então, em condições inteiramente análogas às precedentes, designando por $f(z_1, \dots, z_n)$ uma função analítica das variáveis z_1, \dots, z_n , a atribuição dum significado ao símbolo $f(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ pode fazer-se mediante a fórmula

$$f(\Phi_1, \dots, \Phi_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{C_1} \dots \int_{C_n} \frac{f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}{(\lambda_1 - \Phi_1) \dots (\lambda_n - \Phi_n)} d\lambda_1 \dots d\lambda_n,$$

em que C_1, \dots, C_n designam convenientes curvas fechadas percorridas no sentido positivo. Tudo o que foi dito a propósito das funções analíticas dum operador linear pode estender-se sem qualquer dificuldade ao caso presente.

É mediante considerações deste género que FANTAPPIÈ resolve por quadraturas o problema de CAUCHY para os sistemas de equações às derivadas parciais, lineares e a coeficientes constantes. Não me deterei sobre tal assunto: na lista bibliográfica são indicadas as memórias de FANTAPPIÈ em que o problema é resolvido. Limitar-me-ei a recordar que, em muitos casos da prática (como, por ex., a propósito da equação do calor, da equação dos telegrafistas, etc.) não é o problema de CAUCHY que interessa resolver. Em tais casos, o cálculo operacional atrás exposto tem-se mostrado ineficaz, ou pelo menos pouco cómodo, sendo então aconselhável o método baseado na transformação de LAPLACE⁽¹⁾. Este, porem, não é isento de inconvenientes, aos quais não posso aqui referir-me com detalhe. A verdade é que ambos os métodos constituem um campo aberto à investigação, onde muito há ainda a esclarecer e a aprofundar.

Para êsse campo me é grato chamar a atenção dos estudiosos portugueses que desejem familiarizar-se rapidamente com os métodos de matemática moderna e obter em pouco tempo resultados animadores, que os lancem abertamente no caminho da investigação

Lista bibliográfica

A literatura sobre este assunto é vastíssima. Limite-me a indicar as obras e os artigos de que tenho mais directo conhecimento:

(1) Fácilmente se demonstra que o operador linear K é contínuo: transformação linear contínua do espaço \mathcal{C} em si mesmo.

(2) É fácil demonstrar que o espectro dum operador linear contínuo é sempre um conjunto limitado: ora \bar{K} é, como K , um operador contínuo. Observe-se ainda como a inversão do operador $\lambda - \bar{K}$ se traduz na resolução duma equação integral linear de FREDHOLM.

(1) Veja-se a lista bibliográfica.

S. PINCHERLE e U. AMALDI—*Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*, Bologna, 1901.

O. HEAVISIDE—*Electromagnetic theory*, London, 1922.

G. GEORGI—*Nuove osservazioni sulle funzioni di matrici*, Rendiconti Acc. Lincei, Roma, Luglio, 1928.

J. R. CARSON—*Electric circuit theory and the operational calculus*, New York, 1929.

P. HUMBERT—*Le calcul symbolique*, Paris, 1934.

R. COURANT und D. HILBERT—*Methoden des Mathematischen Physik*. Bd. II, Berlin, 1937.

G. DOETSCH—*Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, Berlin, 1937 (reeditado em 1943 pela empresa Dover publications, New York).

H. SCHWERTFEGER—*Les fonctions de matrices*, Hermann, Paris, 1938.

L. FANTAPPIÈ 1) — *Integrazione con quadrature dei sistemi a derivate parziali*, ecc. Rendiconti del Cir. Mat. Pal., 1933.

2) *Sulla soluzione del problema di CAUCHY*, ecc., Comm. Pontificia Acc. Scient. 1939.

3) *Risoluzione in termini finiti del problema di CAUCHY con dati iniziali su una superficie qualunque*, Rend. Acc. Italia, 1941.

K. W. WAGNER—*Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik und Technik*, Leipzig, 1940.

H. ERTEL—*Elemente des Operatorenrechnung*, Berlin, 1940.

H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER—*Operational methods in applied mathematics*, Oxford, 1941.

K. FAN—*Exposé sur le calcul symbolique de Heaviside*, Revue scientifique, 1942.

E. R. LORCH—1) *The spectrum of linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., Sept. 1942.

2) *The theory of analytic functions in normed abelian vector rings*, Trans. Amer. Math. Soc., Nov. 1943.

N. DUNFORD—*Spectral theory*, Trans. Amer. Math. Soc., Sept. 1943.

A. GHIZZETTI—*Calcolo simbolico (La trasformazioni di Laplace e il calcolo simbolico degli elettrotecnici)* Zanichelli, Bologna, 1943.

Muitas destas obras referem-se exclusivamente ao método baseado no uso da transformação de LAPLACE. Entre estas é particularmente notável o tratado de DOETSCH.

Errata: No artigo do número precedente, pág. 8, 1.ª coluna, linhas 2 e 3 (a partir do título), deve substituir-se Φ por Ψ e Ψ por Φ .

No artigo do número 31, pág. 3, 2.ª coluna, linha 17, deve substituir-se «reais» por «positivos».

A propósito de uma nota

por José Sebastião e Silva

Na nota que publiquei no último número da *Gazeta de Matemática* como comentário ao artigo sobre a máquina calculadora electrónica, fui levado, por excesso de vigor na defesa dum ponto de vista, a fazer afirmações demasiado esquemáticas, que não traduzem exactamente a minha maneira de pensar sobre o assunto, e que vou procurar agora corrigir, para que não dêem origem a interpretações erradas.

Primeiro que tudo, convém precisar que a fase dos belos teoremas, das belas propriedades, etc. a que nessa nota me referia, não se estende propriamente a todo o século passado, nem dele é exclusiva. Por outro lado, eu não queria de nenhum modo dar a entender que essa fase tivesse sido pouco fecunda. A verdade é que poucos períodos da história da matemática se podem comparar a esse, em abundância e em variedade de produção. Simplesmente — e é sobre este ponto que eu desejo insistir — uma análise mais profunda dos factos levaria a concluir que as premissas para tão frutuosa actividade tinham sido criadas anteriormente, a partir de questões concretas, mais ou menos ligadas a fins práticos. Qualquer coisa de semelhante ao que se veri-

ficou no período helénico, que me serviu de termo de comparação — em que, renegando platonicamente a sua origem humilde como «arte de medir terrenos», a geometria se lançou nos etéreos espaços da especulação pura. E quem é que não reconhece a importância da obra então realizada? Todos nós sabemos que a ciência moderna é, na sua estrutura racionalista, um produto do génio grego. Todavia nós devemos pensar que, se porventura, há cinco mil anos, o homem não tivesse tido necessidade de talhar e medir terrenos nas margens do Nilo, talvez os filósofos gregos não tivessem encontrado matéria para as suas magníficas especulações. O certo é que, esgotada a seiva que lhe dera vida, a geometria de PITAGORAS e de EUCLIDES acabou por se estiolar no seco abstractismo medieval; e foi preciso esperar pelo aparecimento da álgebra — forma evoluída daquela «grosseira» arte de contar, própria de comerciantes e de mesteiros — para que a geometria pudesse ressurgir, sob novos aspectos e com novas energias.

Mas também não devemos encarar a evolução da ciência com espírito unilateral. É indiscutível que,