recìprocamente, sem o trabalho do cientista puro, mesmo guiado por ideais platónicos, os progressos da técnica teriam sido impossíveis.

Entre duas tendências opostas oscila o pensamento através dos séculos — tendências que na idade média se chamaram *realismo* e *nominalismo*, e noutras épocas se chamam *racionalismo* e *empirismo*. No decurso da história, ora é uma, ora é a outra destas atitudes que predomina. Aquela fase da matemática a que eu então me referia, corresponde, de certo modo, ao período áureo do racionalismo científico, que encontrou a sua melhor definição nas célebres palavras de LAPLACE sobre a possibilidade de prever o futuro e de reconstituir o passado, a partir do conhecimento do «estado actual do universo». Hoje, porém, nós atravessamos, na história da ciência, uma zona de viragem, que se prolonga já desde o fim do século passado: os esquemas clássicos tiveram de ser abandonados, novos modelos estão a ser propostas para interpretar os dados da experiência[1]. No início do seu famoso livro sobre as funções de linha, VITO VOLTERRA cita uma curiosa interrogação feita por POINCARÉ ao abordar o estudo da questão dos quanta: «Les lois physiques ne seront-elles plus susceptibles d'être exprimées par des équations différentielles?». No mesmo livro, VOLTERRA refere-se aos fenómenos em que *a memória do passado se conserva e em que portanto o presente dependerá de toda a história, de modo que, sendo o tempo contínuo, o presente dependerá duma infinidade de elementos ou de variáveis que são as que individualizam os factos passados;* e introduz, para o estudo desses fenómenos, as equações por ele chamadas *integro-diferenciais*, às quais por sua vez aplica o conceito de *função de linha*.

A fundação da análise funcional, depois ampliada em análise geral, marca o início duma nova era em matemática. O que há de particularmente curioso em em tudo isto é que, para resolver questões concretas, seja necessário subir cada vez mais em abstracção. E é precisamente este elevado grau de abstracção que desorienta o leigo, fazendo-o crer que se trata dum afastamento da realidade. De resto, a análise geral é precedida e acompanhada duma intensa actividade crítica e de profundas investigações no campo da lógica pura, as quais, se não constituem pròpriamente actividade criadora, são hoje no entanto condição *sine qua non* para que se possa criar alguma coisa de sólido e de potente. É claro que, sendo assim tão elevado o grau de abstracção, mais do que nunca se torna necessário não perder de vista os problemas concretos que deram origem aos conceitos abstractos, de contrário ir-se-à cair fàcilmente na pura fantasia.

O sentimento estético será ainda e sempre um poderoso guia da investigação; e uma das principais preocupações do professor deve ser, precisamente, a de estimular nos seus alunos esse sentimento, fazendo-os aperceberem-se da *beleza* de certas proposições e da *elegancia* de certos raciocínios. Mas tal não basta ou melhor: *tal é uma condição necessária, mas não suficiente, para que o ensino resulte eficaz.*

Porque a matemática não é apenas a «música da razão»...

[1] Vem a propósito citar que, ainda há pouco tempo, se tratou nos Estados Unidos da constituição de um grupo de insignes matemáticos com o objectivo de estudar os problemas postos pelas novas descobertas sôbre a energia atómica.

PEDAGOGIA

UM METODO ACTIVO NO ENSINO DA GEOMETRIA INTUITIVA[1]

por ***Emma Castelnuovo***

. . . .

A geometria nasceu como ciência experimental, de um ponto de vista prático: da medida dos terrenos; nós sabemo-lo, dizemo-lo até aos rapazes no princípio do curso, mas depois apresentamos a matéria às avessas, relegando o assunto da equivalência, que deveria ser o primeiro capítulo, para último capítulo do último ano de geometria plana. Por outro lado, dedicamos o primeiro capítulo, como introdução do curso, ao estudo dos segmentos e dos ângulos, dando logo as definições destes conceitos; nos melhores textos de geometria intuitiva não falta sequer uma bela colecção de exercícios sobre estas primeiras noções, mas, se tais exercícios servem para mostrar a utilidade prática dos conceitos que foram definidos, êles não possuem por outro lado a virtude de facilitar a aquisição efectiva desses conceitos. Em resumo, visto que as definições precedem a prática, o aluno deve primeiro fazer o

[1] Extracto dum artigo, com o mesmo título, publicado no *Periodico di Matematiche*, Dez. 1946, série IV, vol. XXIV, n.º 3, pág. 129-140. Este artigo reproduz uma conferência feita pela A. no Istituto Romano di Cultura Matematica em 30 de Março de 1946.

esfôrço de conceber as ideias abstractas, e, depois que *não* as compreendeu, fazer as respectivas aplicações.

Pode apresentar-se como exemplo típico de erro didáctico a definição de ângulo que costuma ser dada no início do curso. Qualquer que seja o modo como se apresente o conceito de ângulo (p. ex. como «parte do plano compreendido entre duas semi-rectas com a mesma origem», segundo a definição que aparece pela primeira vez à volta de 1660-70 nos tratados de Arnaud e de Bertrand, ou então adoptando a definição euclideana, como «inclinação de uma recta sôbre outra»), ele não é compreendido pela grande maioria dos rapazes — ou pela dificuldade do conceito de área infinita que entra na primeira definição, ou pelo uso duma palavra um tanto vaga para um rapaz como é aquela de «inclinação». O aluno-tipo limita-se a decorar a definição, não sei com que vantagem.

Diz-se: mas são conceitos simples aqueles que nós pomos no início, o conceito de ângulo, por exemplo. Precisamente porque são conceitos simples, idéias abstractas, eles resultam particularmente difíceis. «Ao professor — diz Tolstoi na sua Crónica da Escola de Isnaja Poliana — parece fácil ùnicamente o que não é complexo e vivo. Todos os textos de ciencias naturais começam pelas leis gerais, os de língua pelas definições, os de história pela divisão em períodos e até os de geometria pelos conceitos de espaço e de ponto matemático».

Feita a crítica do método tradicional do ensino, para ver como poderia desenvolver-se o curso com mais eficiência, fixemos os objectivos que se pretende atingir com esse curso. Eu penso que o objectivo essencial do curso de geometria intuitiva é o de, prosseguindo o estudo já feito na escola primária, chamar o interêsse e a atenção dos rapazes sôbre factos que depois constituirão, para aqueles que continuam, o material do curso sistemático. Mas o interesse por uma disciplina qualquer só nasce quando se tem a sensação de poder, com a própria capacidade e com a própria observação, dar uma contribuição ainda que mínima a esta disciplina. Ora, se uma matéria me vem ministrada do geral para o particular, a partir de leis evidentes, de definições e de conceitos simples, não tenho a sensação de dar eu uma contribuição a êste estudo. O meu professor poderá sugerir-me problemas e aplicações de tudo o que explicou, e eu poderei com entusiasmo procurar resolvê-los, mas, não nos iludamos, é um ardor que se desvanece logo depois de resolvido o problema, e fica ligado àquele determinado capítulo; não tenho a impressão de ser eu a criar toda a geometria e a sucessão dos problemas e dos capítulos. É, digamos assim, um método activo a ilhas, sendo as ilhas os vários capítulos.

É possível, pregunta-se, *criar para a geometria um método activo contínuo?* A resposta apresenta-se logo: o desenvolvimento histórico é, evidentemente, um trabalho activo de séculos. Surge portanto espontânea a ideia de seguir um método histórico, repassando, naturalmente sem exagerar, pela mesma labuta de pesquizas e de êrros.

Eu pretendo, em resumo, *substituir um método descritivo por um método construtivo.*

Depois de ter levado os rapazes a exercitarem-se com o desenho geométrico, que os põe em contacto com as figuras mais simples da geometria e que lhes dá a maneira de se aperceberem da diferença entre uma figura e uma outra (p. ex. entre o quadrado e o losango, entre o rectângulo e o paralelogramo não rectângulo, medindo as suas diagonais), inicio o curso retomando as origens da geometria e fazendo compreender a necessidade do cálculo das áreas, detendo-me, por enquanto, nas figuras poligonais. De resto, o problema das áreas é «sentido» pelos garotos desde a mais tenra idade.

Começo por calcular a área do rectângulo, à maneira habitual, considerando naturalmente as dimensões comensuráveis entre si; da área do rectângulo vêm logo as regras para determinar a área do quadrado, do triângulo, do paralelogramo, do trapézio, do polígono regular, do polígono qualquer dividindo-o em triângulos. Mil exemplos e aplicações se apresentam ao aluno da cidade, e mais ainda ao do campo, sôbre a utilidade prática destas regras de medida.

Observe-se bem que não introduzo de nenhum modo as definições de rectas paralelas e de rectas perpendiculares, mas me sirvo sempre destes conceitos; com o uso contínuo e com a prática do desenho tais conceitos vão-se esclarecendo e consolidando por si mesmos.

Mas além da determinação da área duma sala, dum terreno, etc. é útil que a creança se exercite com qualquer coisa de mais pequeno, de mais tangível direi. Os modelos em cartolina, a *decomposição e a recomposição* das figuras planas, oferecem-lhe ao mesmo tempo a possibilidade de analisar e de sintetisar, desenvolvendo as suas faculdades de observação.

Eis alguns exemplos:

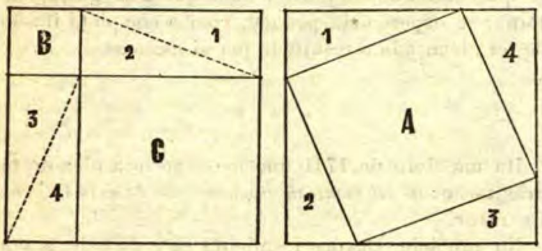
1) decompor um hexágono regular num triângulo equilátero e em três triângulos isósceles iguais; como é a área do triângulo equilátero a respeito da soma das áreas dos três triângulos isósceles?

2) decompor um hexágono regular em dois trapézios iguais e formar com êstes um paralelogramo. Que relação existe entre a base do paralelogramo e o perímetro do hexágono?

E finalmente este, que é, no fundo, a meta a que se pretendia chegar:

Dado um quadrado decompo-lo em dois rectângulos iguais e em dois quadrados desiguais; ou então decompo-lo em quatro triângulos rectângulos iguais e num quadrado (ver figuras).

O executar estas decomposições é simples; torna-se porém necessária uma particular intuição para tirar,



do seu confronto, uma propriedade; mas há sempre alguém na classe que propõe o caminho acertado: os rectângulos podem-se decompor em triângulos. E então? A ideia daquele companheiro lançou a centelha na aula: *o quadrado* A *deve ter a mesma área que a soma dos quadrados* B *e* C; ou seja: *o quadrado construido sobre a hipotenusa dum triângulo rectângulo é equivalente à soma dos quadrados construidos sobre os catetos.*

O efeito deste teorema de PITÁGORAS, redescoberto pelos rapazes nas primeiras lições do curso de geometria, é psicològicamente interessante; acontece ao aluno perante a «revelação» do teorema de PITÁGORAS o que sucede a um de nós que se encontre diante dum quadro maravilhoso ou dum espectáculo da natureza invulgar e sugestivo; é «deveras grandioso»[1]. A princípio esta estranha propriedade do triângulo rectângulo dá apenas um gosto estético; para poder apreciá-la é preciso fazer dela muitas aplicações: eis que o rapaz determina o comprimento da diagonal da sua mesa de estudo, o comprimento duma corda estendida entre a sua janela e a janela do andar inferior da casa em frente, a distância, depois dum certo tempo, de dois combóios partidos simultaneamente de Orte com dadas velocidades e dirigidos um para Arezzo e o outro para Terni, a intensidade da força com que é puxado um barco das duas margens dum rio com cordas em direcções perpendiculares e com forças de dadas intensidades, e vê assim como a geometria presta serviços em todos os domínios, na geografia, na física, na prática em geral (note-se de passagem que os alunos não conhecem ainda a operação de extracção da raiz quadrada, mas fazem uso da tábua de quadrados [1]).

Mas o mesmo rapaz que se interessa pelas aplicações práticas duma verdade geométrica, é capaz de se entusiasmar pelas aplicações e pelas extensões mais abstractas do mesmo teorema, como por exemplo: «o triângulo equilátero construido sobre a hipotenusa dum triângulo rectângulo é equivalente à soma dos triângulos equiláteros construídos sobre os catetos».

Esta lenta e progressiva passagem do concreto ao abstracto, do particular ao geral, faz com que a matéria vá sendo criada e estudada segundo as leis naturais do desenvolvimento psicológico; e eu penso que o teorema de PITÁGORAS, com o seu duplo aspecto prático e abstracto, esteja particularmente indicado para orientar a mente do aluno no sentido do raciocínio matemático. De resto, já PLATÃO no seu diálogo o *Menon* põe em evidência o valor do método heurístico sugerido por tal verdade geométrica, mostrando como o escravo, benèvolamente guiado por SÓCRATES, consegue construir um quadrado duplo de um outro dado.

Mas retomemos o problema que nos propusémos de início: a determinação das áreas dos terrenos. Sim, é fácil medir a área dum campo poligonal, se não há obstáculos, como lagos, bosques, etc. No caso contrário, seria necessário desenhar nas vizinhanças, numa esplanada, um campo *igual* aquêle dado. Surge assim, de maneira natural, o *problema da igualdade*: como se constroe um polígono igual a um polígono dado, em particular um triângulo igual a um triângulo dado?

É necessário para isto chegar ao *conceito de ângulo*; êle brota assim, a meio do primeiro ano de estudo, como uma necessidade. Eis como do complexo (polígono) se chega a pouco e pouco aos elementos (ângulo, segmento) que formam o complexo.

Não se dá a definição de ângulo; muitas medidas de ângulos com o transferidor.

Tal como os problemas práticos sobre as áreas nos conduziram ao facto não evidente do teorema de PITÁGORAS, assim também as medidas de ângulos conduzem a uma propriedade que é, como a primeira, não evidente, e portanto dá verdadeiramente a sensação da descoberta: *a soma dos ângulos dum triângulo tem sempre o mesmo valor, qualquer que seja a forma do triângulo.*

Muitíssimos exercícios sobre este assunto, como por exemplo:

[1] No original: «troppo grandioso».

[1] Nesta altura da conferência, a A. referiu-se à conveniência que há em evitar, na medida do possível, o ensino de algoritmos sem justificação. (Nota do T.).

1) Num triângulo isósceles ABC prolongue-se o lado BA de um segmento AD igual a AC e una-se D com C. Se $\widehat{B}=40°$, que valor tem o ângulo $B\widehat{C}D$? Resulta sempre: $B\widehat{C}D=\widehat{B}+\widehat{D}$?

2) Num triângulo rectângulo um ângulo é de 50°. Determinar a amplitude do ângulo compreendido entre a altura e a mediana relativas à hipotenusa. Observa-se que a amplitude deste ângulo é igual à diferença entre as amplitudes dos ângulos agudos. Será sempre verdadeira esta propriedade?

Tal género de exercícios faz sentir desde este momento a necessidade do cálculo literal.

Agora já se pode abordar o problema da construção de um triângulo igual a um outro dado, empregando os três critérios da igualdade (construções com régua, compasso e transferidor); ainda aqui *os critérios de igualdade se impõem como uma necessidade de construção.*

Mas as mais das vezes não é fácil encontrar uma esplanada em que se possa desenhar um campo igual àquele dado. E então?

Surge espontânea uma idea sugerida pela própria vida que circunda o rapaz, pela sua observação quotidiana. Todos os rapazes sabem que pode haver objectos com a mesma forma e com extensão diferente: quem não brincou em criança com aquelas caixas cúbicas que entram umas nas outras ou com aquêles ovos que se abrem e de que um é a forma reduzida do outro? Ou, para nos referirmos a uma época mais recente, qual o rapaz que não viu a planta duma sala, a ampliação duma fotografia, ou uma carta geográfica da mesma região em escalas diversas?

O conceito da semelhança é — parece-me — o conceito geométrico mais natural, mais espontâneo, mais atraente, não sei se mais fácil do que o de igualdade, mas certamente mais sugestivo. È um conceito qne nasce cedíssimo, não exagero se digo que à volta dos dois, ou três anos. Nós vemos disso uma prova no facto de a criança se divertir em ver representado em miniatura o mundo que a circunda: a sua casa, a casa em frente, a igreja da aldeia. De resto, o facto de estas ideas nascerem tão cedo na mente da criança é confirmado pelo estudo da evolução histórica deste conceito geométrico, que nos faz remontar a TALES de Mileto.

Acho pois que um estudo intuitivo-experimental do conceito de semelhança seria oportuno e desejável.

Sem continuar a descrever a sucessão dos capítulos segundo este ponto de vista, bastar-me-á resumir os princípios que o informam*: passagem do concreto ao abstracto, do complexo ao simples, e portanto ordenação o curso segundo o desenvolvimento histórico;* princípios que me parece reencontrar nas belas palavras de G. LOMBARDO-RADICE [1]: «Devemos deixar que o pequeno matemático, que há em todo o espírito infantil, se desenvolva tão livremente quanto possível, com esforços e investigações pessoais... Tem valor para a criança apenas aquele pouco que alcança com a própria experiência, ou que, com a guia dum mestre (o qual saiba donde parte e onde quere chegar), pode tornar-se experiência pessoal, com a completa ilusão de ter alcançado o resultado por si mesmo».

* * *

Há um livro de 1741 que me sugeriu a idea desta orientação: os *Éléments de géométrie* de ALEXIS-CLAUDE CLAIRAUT.

No prefácio, CLAIRAUT salienta este método, a sua originalidade e naturalidade, e agradece à Marqueza de CHÂTELET o ter-lhe suscitado a idea de uma tal orientação, tendo essa desejado uma via «real» para chegar às matemáticas.

É uma verdadeira jóia de exposição: é uma contínua descoberta natural das propriedades das figuras a partir da observação e da medida; é — podemos dizer — uma vista do mundo que nos circunda, com as lentes do geómetra. E é particularmente interes--sante que um matemático como CLAIRAUT, prodigiosamente dotado e extremamente precoce (como se sabe, aos 10 anos lia o Tratado das secções cónicas de L'HÔPITAL e aos 13 apresentava a sua primeira memória original) tenha dedicado o seu tempo a esta obra de natureza didáctica, com tanto gosto e com tanto amor.

. . . .

Evidentemente, CLAIRAUT previa como seria mal interpretado quando, no fim do prefácio dos *Elementos*, escrevia: «Visto que escolhi a medida dos terrenos para interessar os principiantes, não deverei talvez temer que se confundam êstes Elementos com os ordinários tratados de relêvo? Tal interpretacão não pode ser dada senão por aquêles que não perceberem que a medida dos terrenos não é, de nenhum modo, o verdadeiro objectivo dêste livro, mas que tal assunto me serve unicamente como pretexto para levar a descobrir as principais verdades geométricas».

Segundo refere um dos mais sérios historiadores da matemática contemporâneos — DAVID EUGENIO SMITH — (no seu livro *The Teaching of Elementary Mathematics*»)

---

(1) G. LOMBARDO-RADICE: *Lezioni di Didattica*. Parte III: il primo insegnamento scientifico.

não parece que os elementos de geometria de Clairaut tenham chegado a entrar com o seu verdadeiro espírito no ensino oficial, nem sequer em França, embora ali tenham logo conquistado larga fama, tanto que Voltaire os eternizou com a frase: «Este cientista (Clairaut), tornando agradável a ciência, torna-a insensívelmente necessária à nossa nação».

Depois de ter experimentado por um ano este método didáctico, considero que possa dar no primeiro triénio médio [1] brilhantes resultados, fazendo nascer nos jóvens espíritos o desejo da investigação e da descoberta.

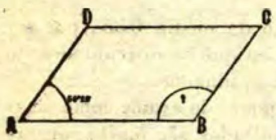
Tradução de J. Sebastião e Silva

(1) Desde a reforma Gentile, o ensino secundário em Itália está assim organizado: 1) três primeiros anos em comum *(escola média ou ginásio)*; 2) cinco anos diferenciados, com predomínio das ciências no chamado *liceu científico* e predomínio das letras no chamado *liceu clássico*.

RESULTADOS DUM EXAME DE GEOMETRIA — 1.º CICLO

por Maria Teodora Alves

Transcrevemos o ponto de exame de Geometria do 1.º ciclo (1.ª chamada) realizado no Liceu de Passos Manuel no ano lectivo findo.



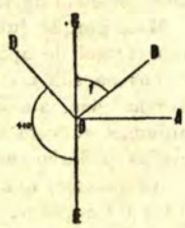
1.º — Condições da figura: $[ABCD]$ é um paralelogramo. O ângulo $\widehat{BAD}$ mede $40^\circ 29'$. Qual é a medida do ângulo $\widehat{ABC}$?

2.º — Construa o triângulo cujos lados medem respectivamente 3 cm, 5 cm e 6 cm e construa as alturas correspondentes aos três lados do triângulo.

3.º — Condições da figura: EC é perpendicular a OA, OD é perpendicular a OB. Ângulo

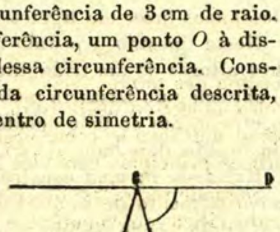
$$\widehat{EOD} = 140^\circ.$$

Qual é a medida do ângulo $\widehat{BOC}$?



4.º — Descreva uma circunferência de 3 cm de raio. Tome, no plano da circunferência, um ponto O à distância de 5 cm do centro dessa circunferência. Construa a figura simétrica da circunferência descrita, tomando o ponto O por centro de simetria.

5º — Condições da figura: No triângulo $[ABC]$ é: $\overline{AC} = \overline{BC}$. CD é paralelo a AB. Podemos afirmar que ângulo $\widehat{CAB}$ = ângulo $\widehat{BCD}$. Porquê?



6.º — Os dois lados consecutivos de um rectângulo medem respectivamonte 3 decímetros e 12 decímetros. O lado de um quadrado mede 6 centímetros. Calcule a área do rectângulo tomando por unidade a área do quadrado.

7.º — A geratriz de um cilindro de revolução mede 18 centímetros e o raio da base do cilindro é igual a 1/4 da geratriz. Calcule o volume deste cilindro expresso em decímetros cúbicos.

8.º — Quais são os poliedros regulares cujas faces são triângulos equiláteros?

Polígono da frequência das notas da prova escrita

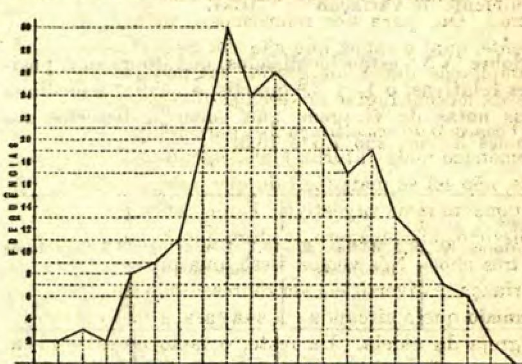


Gráfico 1

A observação deste gráfico mostra acumulação de abcissa nos pontos 8 e 14.

O facto é de fácil interpretação se tivermos em vista que as notas de viragem, nos exames liceais, são 7.5 e 13.5, correspondentes respectivamente à admissão à prova oral e à dispensa da prova oral. Se o examinador aprecia as provas dos alunos com benevolência, a acumulação faz-se no sentido favorável ao aluno. Se o examinador aprecia as provas com severidade, a acumulação faz-se no sentido desfavorável ao aluno.

Em todos os gráficos de frequência de notas de classificação que temos feito, sempre um dos dois casos temos verificado.

A justa medida, por mais objectivo que o examinador pretenda ser, é muito difícil atingir. Mas antes a adopção de um critério de classificação favorável ao aluno do que o critério oposto.

A acumulação no ponto 8 foi talvez excessiva, visto tratar-se de uma prova não decisiva, isto é, que ainda vai ser conjugada com a prova de Aritmética e Álgebra, para decidir depois a sorte do aluno.

Se tivesse sido evitada a acumulação nos pontos 8 e 14, o gráfico de frequência das notas de classificação das provas apresentaria uma regularidade mais satisfatória ainda.

Seguem agora algumas medidas estatísticas determinadas tomando por base a classificação das provas dos alunos e que mostram o comportamento deles perante o ponto:

3.º Quartil	$Q_3 = 13.6$	
mediana	$M_d = 10.7$	$N = 257$
média	$M = 10.8$	
1.º Quartil	$Q_1 = 8.2$	
	$\sigma = 3.85$	
coeficiente de variação	0.35.	

Sobre XX' estão localizados, quanto às suas posições relativas, o 1.º e 3.º quartis, a média, a mediana e as notas de viragem, que, como já dissemos nos exames liceais, são 7.5 e 13.5.

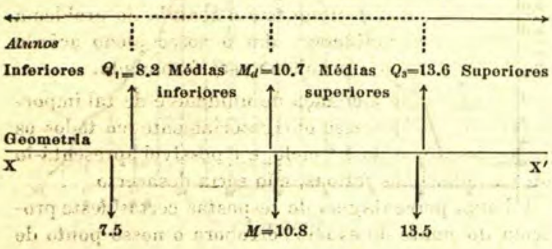


Gráfico 2

Pela inspecção do gráfico vemos que alguns alunos inferiores foram admitidos à prova oral pois o 1.º quartil Q_1 é superior à nota de viragem 7.5; todos os alunos superiores foram dispensados da prova oral, pois o 3.º quartil Q_3 quasi que coincide com a nota 13,5 que marca o limite inferior dos alunos bem dotados.

Por outro lado, a mediana próxima da média e sensìvelmente equidistante dos quartis, indica ter sido atingida uma gradual classificação tanto no grupo abrangido por alunos médios inferiores e inferiores, como no grupo abrangido por alunos médios superiores e superiores, o que é proveniente da ordenação dos alunos quanto à medida da habilidade que revelaram.

Essa regularidade de classificação acentua-se mais nìtidamente se considerarmos que a percentagem de reprovações 22.1 é sensivelmente igual à percentagem de alunos dispensados 22.5.

O valor $\sigma = 3.85$ e que interpretado como representando a diferença das abcissas entre uma questão que é respondida correctamente por 50 °/₀ dos alunos e uma questão que é respondida correctamente por 15.87 °/₀, dá a extensão para a qual diferem da média.

O coeficiente de variação da média 0.35, por ser relativamente pequeno, indica que as dificuldades do ponto foram razoàvelmente graduadas.

Podemos considerar este ponto de exame como aceitável e porque os seus resultados são muito concordantes com os resultados do ponto de exame do ano lectivo 1945-1946, de estrutura análoga, e que foram publicados no n.º 30 da Gazeta de Matemática, podemos arriscar a afirmação de que um ponto de exame organizado nos moldes destes dois pontos tem consistência para medir a habilidade dos alunos num exame de Geometria do 1.º ciclo.

Mas, porque julgamos que este ponto de exame é susceptível de aperfeiçoamento e porque não colaborámos na sua organização nem na classificação das provas dos alunos, seja-nos permitido apresentar algumas sugestões que, se forem consideradas judiciosas, poderão contribuir para melhorá-lo.

As questões que caracterizam êste ponto são a 3.ª, 5.ª e 6.ª e que por êsse motivo merecem estudo especial. Mas, antes de nos referirmos a cada uma delas, desejamos fazer um ligeiro reparo à 2.ª questão.

Nesta questão é pedido ao aluno a construção das três alturas de um triângulo dado. Como o triângulo é obtusângulo bastaria pedir as alturas relativas respectivamente ao lado oposto ao ângulo obtuso e a um dos outros dois lados do triângulo.

Evitar-se-ía uma construção repetida que nenhum novo elemento de informação traz acêrca do aluno; ou, então, sendo pedida a construção das três alturas do triângulo, deveria ser pedida a propriedade de concorrerem no mesmo ponto, o que daria finalidade à questão proposta.

Como está formulada a 2.ª questão, pedimos vénia para confessar a nossa discordância.

Posta esta discordância de pormenor insignificante, vamos ocupar-nos mais particularmente da 3.ª, 5.ª e 6.ª questões que, como já dissemos, dão caracter ao ponto.

O quadro das respostas exactas dadas pelos alunos a estas três questões e das respostas incompletas, mas que mostraram que o aluno teve o entendimento delas, é o seguinte:

Questões do ponto	Respostas exactas	Percentagem	Respostas incompletas com o entendimento da questão	Percentagem
3.ª	210	81.7	1	—
5.ª	39	15.2	18	7.0
6.ª	46	17.9	52	20.0

Na 3.ª questão, dadas as condições de uma figura, pede-se ao aluno que estabeleça determinada conclusão por inferências dos seus conhecimentos ou intuïção.

Na 5.ª questão, afirma-se uma dada conclusão a respeito de uma figura e pede-se ao aluno que indique quais as inferências que conduzem à conclusão estabelecida.

Tanto numa como noutra questão as inferências pedidas são simples.

Somos de opinião que nos pontos de geometria do 1.º ciclo devem sempre figurar questões destes dois tipos, não só porque são funcionais no ensino da Geometria, como porque preparam para o estudo subsequente deste ramo da Matemática.

Geometria intuitiva e experimental não quer significar que os alunos não devam fazer inferências com os resultados da sua intuïção ou experiência.

«O pensamento em geometria é um pensamento em termos de relações» (Russel).

Há, todavia, que estudar o comportamento dos alunos em cada uma das questões para que possam ser, depois, bem graduadas nos pontos de exame.

As percentagens indicadas no quadro acima, parecem aconselhar que, em futuros pontos de exame, questões do tipo da 3.ª sejam mais dificultadas e que questões do tipo da 5.ª sejam mais facilitadas.

Para simplificar questões do tipo da 5.ª bastaria decompôr a conclusão, de modo a sugerir ao aluno a sucessão das inferências a estabelecer e que a justificam.

Dir-se-á que êste procedimento contraria as instruções pedagógicas sobre a organização de pontos de exame emanadas das estâncias superiores.

Um ponto de exame deve ter maleabilidade na sua organização. As alterações a introduzir-lhe devem provir do estudo estatístico dos resultados sem que estejam sujeitas a nenhum molde forçado.

Caso contrário, o ponto de exame cristaliza e mecaniza-se.

A 6.ª questão do ponto de exame é de outra ordem. É um caso simples de um problema de mudança de unidade, embora não apresentado sob a forma clássica.

A percentagem de alunos que o resolveram acertadamente foi, como mostra o quadro, 17.9.

Se lhe adicionarmos a percentagem daqueles alunos que revelaram o entendimento da questão, obtemos a percentagem 37.9 que é muito baixa ainda.

Em estudos subsequentes da Geometria, em Física e em casos correntes da vida de todos os dias, o problema de mudança de unidade é de uso frequente.

Já, na instrução primária, o aluno toma contacto com êste problema e tem larga prática de resolução de problemas dessa espécie, no estudo do sistema métrico. No liceu, principalmente no 2.º ano, no estudo dos números complexos, no sistema métrico e no conceito de razão de duas grandezas, o aluno estuda o problema de mudança de unidade sob vários aspectos.

Poder-se-á dizer que a 6.ª questão teria sido resolvida pela maioria dos alunos se fosse formulada deste modo: Quantos quadrados de 6 cm de lado cabem no rectângulo cujos lados consecutivos medem respectivamente 3 dm e 12 dm?

Todos os professores sabem, que à pergunta: Quantos cabem, os alunos invariàvelmente respondem: Já sei. É um problema de dividir.

Também estamos convencidos de que o número de respostas certas aumentaria, talvez, consideràvelmente.

Mas não é isso o que importa: o que se deve pretender saber, é se o aluno tem o sentido do problema de mudança de unidade e daí o nosso pleno acôrdo com o modo como o problema está formulado.

O problema de mudança de unidade é de tal importância que se figurasse obrigatòriamente em todos os pontos de exame do 1.º ciclo, e é possível apresentá-lo sob variadíssimas formas, não seria desacerto.

A baixa percentagem de respostas certas neste problema do ponto de exame corrobora o nosso ponto de vista.

Ainda considerando um pouco mais sobre a importância do problema de mudança de unidade, devemos dizer que nunca falámos com nenhum professor do 8.º grupo que não desse a êste problema uma capital importância.

Como explicar, portanto, tão baixa percentagem de respostas exactas? A pouca experiência da profissão de professor (considero-me ainda aprendiza) não nos deixa arriscar juizos definitivos sobre este assunto, mas estamos em crer que, se o aluno em vez de resolver problemas teoricos de mudança de unidade, os resolvesse práticamente, isto é, depois de medir e de pesar, adquiriria perfeito sentido do problema. «Nada está no intelecto que não tenha estado nos sentidos» (Locke).

O óbice das turmas grandes e da falta de tempo para cumprir os programas levam-nos a abreviar o ensino desta e doutras questões e, portanto, a actuarmos na percepção dos alunos pelo «ear and eyes» que deu optimos resultados nas observações dos antigos astrónomos, mas dá muito fraco rendimento no ensino de crianças e de adolescentes.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES — JULHO DE 1947

Licenciaturas em ciências matemáticas, físico-químicas e geofísicas, preparatórios para as escolas militares, e curso de engenheiros geógrafos — Ponto n.º 1 — Julho de 1947.

2441 — Indique uma condição que assegure a existência de soluções inteiras para a equação $ax+by=c$. R: *Que* a, b *e* c *sejam inteiros e que o* m. d. c. *de* a *e* b *seja um divisor de* c.

2442 — Determine a base do sistema de logaritmos em que é $\log 873=4$. R: $\sqrt[4]{873}$, *pois é* $(\sqrt[4]{873})^4=873$.

2443 — A que condição devem satisfazer os coeficientes da equação $ax^2+bx+c=0$ para que as raizes sejam recíprocas? Justifique a resposta. R: *Deve ser* $a\neq 0$ *e* $c:a=1$ *pois que se forem* x_1 *e* x_2 *as raizes da equação e se estas são reciprocas é* $x_1=1:x_2$ *e então* $x_1\,x_2=(1:x_2)\cdot x_2=1=c:a$.

2444 — Resolva a equação:
$$(a-x)\,(x-b)=(x-a)\,(x-c)\,.$$
R: *Como a equação proposta é equivalente a*
$$(x-a)\,(2x-b-c)=0,$$
as raizes desta $x_1=a$ *e* $x_2=(b+c):2$ *são as raizes da proposta.*

2445 — Mostre que para valores reais de x o trinómio x^2-4x+5 toma sempre valores positivos. R: *O discriminante do trinómio é* $16-20=-4$; *o trinómio tem, por isso, zeros que são números complexos e então para valores reais de* x *ele toma sempre o sinal do coeficiente de* x^2, *logo, no caso posto, o trinómio é sempre positivo.*

2446 — Calcule a área da superfície lateral dum recipiente cilíndrico com a capacidade de 5 litros, sabendo que a altura e o diâmetro da base são iguais. R: *Se for* d *o diâmetro da base e a altura do cilindro (supomos tratar-se de um cilindro recto de base circular) será o seu volume* $\pi d^3:4=5\,dm^3$, *donde* $d=\sqrt[3]{20:\pi}\,dm$ *e a área da superfície lateral* $\pi d^2=\sqrt[3]{20^2\,\pi}\,dm^2$.

2447 — Verifique a identidade:
$$(\operatorname{tg} a+\operatorname{cotg} a)\,\operatorname{sen} 2a=2\,.$$
R: *Como* $\operatorname{tg} a+\operatorname{cotg} a=(\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a):\operatorname{sen} a\cos a=2:\operatorname{sen} 2a$ *então é* $(\operatorname{tg} a+\operatorname{cotg} a)\operatorname{sen} 2a=2$.

2448 — Calcule a área dum losango em que cada lado tem 28,345 m de comprimento e um dos ângulos mede 67° 28′ 10″. R: *Como se sabe, se forem* d_1 *e* d_2 *as diagonais do losango, a área deste é dada por* $d_1\,d_2:2$ *e se for* α *um dos ângulos internos do losango e* l *o lado é* $l_1=2l\cos\alpha/2$ *e* $d_2=2l\operatorname{sen}\alpha/2$, *logo a área será dada pela expressão* $A=l^2\operatorname{sen}\alpha=28^2{,}345\operatorname{sen}67^\circ28'10''$; *pela aplicação de logaritmos tem-se* $\log A=2\log 28{,}345+\log\operatorname{sen}67^\circ\,28'\,10''=2\times 1{,}45248+\bar{1}{,}96552=2{,}87047$ *e, portanto,* $A=742{,}1\ m^2$.

2449 — Mostre que o produto de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 6. R: *Seja* $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ *o produto de três inteiros positivos consecutivos. Destes três números um deles é divisivel por* 2 *pois se* n *o não é, então* $n+1$ *é divisivel por* 2; *e tambem um deles é divisivel por* 3, *pois que se* n *não é divisivel por* 3 *será* $n=3r+1$ *ou* $n=3r+2$; *no primeiro caso* $n+2=3r+3$ *é múltiplo de* 3 *e no segundo* $n+1=3r+3$ *é também múltiplo de* 3. *Então como* 2 *e* 3 *são primos entre si e o produto é divisivel por qualquer deles, ele é também divisivel por* 6.

2450 — Em quantos pontos se intersectam seis rectas dum plano, quando três quaisquer delas não passam por um mesmo ponto? R: *Como não se trata de geometria projectiva e portanto as rectas paralelas não se encontram, temos que considerar os seguintes casos:*