de professor (considero-me ainda aprendiza) não nos deixa arriscar juizos definitivos sobre este assunto, mas estamos em crer que, se o aluno em vez de resolver problemas teoricos de mudança de unidade, os resolvesse práticamente, isto é, depois de medir e de pesar, adquiriria perfeito sentido do problema. «Nada está no intelecto que não tenha estado nos sentidos» (Locke).

O óbice das turmas grandes e da falta de tempo para cumprir os programas levam-nos a abreviar o ensino desta e doutras questões e, portanto, a actuarmos na percepção dos alunos pelo «ear and eyes» que deu optimos resultados nas observações dos antigos astrónomos, mas dá muito fraco rendimento no ensino de crianças e de adolescentes.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES — JULHO DE 1947

Licenciaturas em ciências matemáticas, físico-químicas e geofísicas, preparatórios para as escolas militares, e curso de engenheiros geógrafos — Ponto n.º 1 — Julho de 1947.

2441 — Indique uma condição que assegure a existência de soluções inteiras para a equação $ax+by=c$. R: *Que* a, b *e* c *sejam inteiros e que o* m. d. c. *de* a *e* b *seja um divisor de* c.

2442 — Determine a base do sistema de logaritmos em que é $\log 873=4$. R: $\sqrt[4]{873}$, *pois é* $(\sqrt[4]{873})^4=873$.

2443 — A que condição devem satisfazer os coeficientes da equação $ax^2+bx+c=0$ para que as raizes sejam recíprocas? Justifique a resposta. R: *Deve ser* $a \neq 0$ *e* $c:a=1$ *pois que se forem* x_1 *e* x_2 *as raizes da equação e se estas são reciprocas é* $x_1=1:x_2$ *e então* $x_1 x_2=(1:x_2)\cdot x_2=1=c:a$.

2444 — Resolva a equação:

$$(a-x)(x-b)=(x-a)(x-c).$$

R: *Como a equação proposta é equivalente a*

$$(x-a)(2x-b-c)=0,$$

as raizes desta $x_1=a$ *e* $x_2=(b+c):2$ *são as raizes da proposta.*

2445 — Mostre que para valores reais de x o trinómio x^2-4x+5 toma sempre valores positivos. R: *O discriminante do trinómio é* $16-20=-4$; *o trinómio tem, por isso, zeros que são números complexos e então para valores reais de* x *ele toma sempre o sinal do coeficiente de* x^2, *logo, no caso posto, o trinómio é sempre positivo.*

2446 — Calcule a área da superfície lateral dum recipiente cilíndrico com a capacidade de 5 litros, sabendo que a altura e o diâmetro da base são iguais. R: *Se for* d *o diâmetro da base e a altura do cilindro* (supomos tratar-se de um cilindro recto de base circular) *será o seu volume* $\pi d^3:4=5\,\mathrm{dm}^3$, *donde* $d=\sqrt[3]{20:\pi}\,\mathrm{dm}$ *e a área da superfície lateral* $\pi d^2=\sqrt[3]{20^2\pi}\,\mathrm{dm}^2$.

2447 — Verifique a identidade:

$$(\operatorname{tg} a+\operatorname{cotg} a)\operatorname{sen} 2a=2.$$

R: *Como* $\operatorname{tg} a+\operatorname{cotg} a=(\operatorname{sen}^2 a+\cos^2 a):\operatorname{sen} a\cos a=2:\operatorname{sen} 2a$ *então é* $(\operatorname{tg} a+\operatorname{cotg} a)\operatorname{sen} 2a=2$.

2448 — Calcule a área dum losango em que cada lado tem 28,345 m de comprimento e um dos ângulos mede 67° 28′ 10″. R: *Como se sabe, se forem* d_1 *e* d_2 *as diagonais do losango, a área deste é dada por* $d_1 d_2:2$ *e se for* α *um dos ângulos internos do losango e* l *o lado é* $l_1=2l\cos\alpha/2$ *e* $d_2=2l\operatorname{sen}\alpha/2$, *logo a área será dada pela expressão* $A=l^2\operatorname{sen}\alpha=28^2{,}345\operatorname{sen}67°28'10''$; *pela aplicação de logaritmos tem-se* $\log A=2\log 28{,}345+\log\operatorname{sen}67°28'10''=2\times 1{,}45248+\bar{1}{,}96552=2{,}87047$ *e, portanto,* $A=742{,}1\,\mathrm{m}^2$.

2449 — Mostre que o produto de três números naturais consecutivos é sempre divisível por 6. R: *Seja* $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ *o produto de três inteiros positivos consecutivos. Destes três números um deles é divisivel por* 2 *pois se* n *o não é, então* n+1 *é divisivel por* 2; *e tambem um deles é divisivel por* 3, *pois que se* n *não é divisivel por* 3 *será* $n=3r+1$ *ou* $n=3r+2$; *no primeiro caso* $n+2=3r+3$ *é múltiplo de* 3 *e no segundo* $n+1=3r+3$ *é também múltiplo de* 3. *Então como* 2 *e* 3 *são primos entre si e o produto é divisivel por qualquer deles, ele é também divisivel por* 6.

2450 — Em quantos pontos se intersectam seis rectas dum plano, quando três quaisquer delas não passam por um mesmo ponto? R: *Como não se trata de geometria projectiva e portanto as rectas paralelas não se encontram, temos que considerar os seguintes casos:*

1.º) *Não há, entre as 6 rectas consideradas, duas que sejam paralelas, então o número de pontos de intersecção é* ${}^6C_2=15$.

2.º) *Há um só par de rectas paralelas. Então o número de pontos é* ${}^6C_2-{}^2C_2=15-1=14$.

3.º) *Há três, e só três, rectas paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-{}^3C^2=15-3=12$.

4.º) *Há quatro, e só quatro, rectas paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-{}^4C_2=15-6=9$.

5.º) *Há cinco e só cinco rectas paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-{}^5C_2=15-10=5$.

6.º) *As seis rectas são paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-{}^6C_2=0$.

7.º) *Há dois pares, e só dois, de rectas paralelas, mas não quatro rectas paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-2\cdot{}^2C_2=13$

8.º *Há três pares de rectas paralelas, mas não quatro paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-3\cdot{}^2C_2==15-3=12$.

9.º) *Há três rectas paralelas entre si e mais um par que não pertence àquele triplo de rectas, não havendo cinco rectas paralelas entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-{}^3C_2-{}^2C_2=11$.

10.º) *Há dois triplos de rectas paralelas entre si (dentro de cada triplo) mas não há seis rectas paralelds entre si. O número de pontos é* ${}^6C_2-2\,{}^3C_2=15-6=9$.

11.º) *Há quatro rectas paralelas entre si e um outro par de rectas paralelas distintas daquelas quatro, mas não há seis rectas paralelas. Então o número de pontos é* ${}^6C_2-{}^4C_2-{}^2C_2=15-6-1=8$.

Soluções dos n.os 2441 a 2450 de José D. da Silva Paulo.

I. S. C. E. F. — Ponto n.º 1 — 5 de Agosto de 1947

I — Aritmética

2451 — Divisibilidade; teorema fundamental da divisibilidade e sua aplicação à dedução de critérios de divisibilidade.

2452 — A soma de dois números inteiros é 589, e o cociente entre o seu menor múltiplo comum e o seu máximo divisor comum é 84. Calcular os números. R: *Sejam* a *e* b *os números e* d *e* m *respectivamente o* m. d. c. *e o* m. m. c. *Segundo o enunciado será:* $a+b=589$e $m/d=84$. *Na relação* 1) $ab/m=d$ *fazendo* 2) $a=dp$ *e* 3) $b=dq$ *e substituindo* m *pelo seu valor* $84d$ *vem* $pq=84$ *em que* p *e* q *são primos entre si. Fàcilmente se verifica por decomposição em factores primos que os números que verificam esta relação são:* $\begin{cases} p=4,\ 28,\ 12 \\ q=21,\ 3,\ 7 \end{cases}$ *que substituidos em* 2) *e* 3) *dão* $d=589/25,\ 19,\ 31$. *A primeira solução é de rejeitar por não ser inteira. A segunda e terceira por substituição em* 1) *dão as soluções do problema:*

$$\begin{cases} a=28\times19=532 \\ b=\ 3\times19=\ 57 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} a=12\times31=317 \\ b=\ 7\times31=217. \end{cases}$$

II — Cálculo Numérico

2453 — Calcule a área lateral de um cone equilátero (diâmetro de base igual à geratriz) inscrito numa esfera cuja superfície tem de área 222,62 m². (Utilize logaritmos). R: *Segundo o enunciado* $4\pi R^2=222{,}62$, *sendo* R *o raio da esfera. A superfície lateral do cone de raio* $R'=R\sqrt{3}/2$ *e de geratriz* $R\sqrt{3}$ *e* $S=\pi R\sqrt{3}/2\times R\sqrt{3}=3\pi R^2/2=3\times222{,}62/8$ $\log S=\log 3+\log 222{,}62+\operatorname{colg} 8=0{,}477\,(12+2{,}34757+{}$ ${}+1{,}09691)=1{,}92160$, *donde* $S=83{,}483$ m².

III — Álgebra

2454 — Dada a função $y=2^{\frac{1}{x-1}}$. Calcule os valores da variável x que tornam a função y inferior a $1/4$.

R: *Segundo o enunciado* $2^{\frac{1}{x-1}}<1/4$, $2^{\frac{1}{x-1}}<2^{-2}$,

$$\frac{1}{x-1}<-2 \rightarrow \frac{2x-1}{x-1}<0 \rightarrow \frac{1}{2}<x<1$$

IV — Geometria Plana

2455 — Num círculo de raio r inscreve-se um rectângulo cuja diagonal forma com o lado maior um ângulo de 30º. Calcule, expressa em r, a área do referido rectângulo. R: *O rectângulo fica dividido pela diagonal* 2r *em duas metades dum triângulo equilátero de lado* 2r. *Então a área pedida será*

$$A=2\times(2r)^2\sqrt{3}/8=r^2\sqrt{3}$$

V — Geometria no Espaço

2456 — Triedros: definição; elementos de um triedro; triedro polar; relação entre os diedros dum triedro.

2457 — Dado um tetraedro de aresta a, deduza o seu volume expresso na referida aresta. R: *O volume pedido é o duma pirâmide regular de base triangular, cuja altura cai no centro do triângulo equilátero da base. Seja* ABCD *o tetraedro e* H *o pé da altura* $\overline{DH}$ *tirada de* D *para a base* ABC. *Como o triângulo* AHD *é rectângulo em* H *será* $\overline{DH}=\sqrt{a^2-\overline{AH}^2}$. *Como* H *é simultâneamente o ponto de encontro das mediatrizes e das medianas, visto ser* $[\widehat{ABC}]$ *equilátero, vem* $\overline{AH}=2h/3$ (h *altura da base*) *ou* $\overline{AH}=a\sqrt{3}/3$ *e* $\overline{DH}=\sqrt{2}a\sqrt{3}$.

O volume será $V=a^3\sqrt{2}/12$.

VI — TRIGONOMETRIA

2458 — Verifique que a soma dos quadrados da secante e da cossecante de um arco é igual ao produto dos seus quadrados.

R: $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x\cdot\operatorname{sen}^2 x}=\sec^2 x\cdot\operatorname{cosec}^2 x$.

Nota. É obrigatória a resolução de 4 pontos. A parte primeira dos pontos I e V vem esclarecida em qualquer bom compêndio, respectivamente, de Aritmética Racional do 3.º ciclo e de Geometria do 2.º ciclo.

Soluções dos n.os 2451 a 2458 de Mário Madureira.

I. S. T. e preparatórios para a Faculdade de Engenharia do Porto — Ponto N.º 1—Julho de 1947.

2459 — Dê a forma de um polinómio ordenado, de coeficientes inteiros, igualado a zero, à equação:

$$-1/2\,(1-2x)\,(2x+1)=(1/x2-1)^4-2/3\,(x+1)\,.$$

R: $3x^4-24x^3-24x^2-128x+40=0$.

2460 — Resolva a inequação: $\dfrac{2x^2+x-4}{x-1}>0$.

R: $x>1{,}1861$; $-1{,}6861<x<1$.

2461 — Diga o que é uma superfície de revolução. Enumere, sem definir, os sólidos que conhece limitados total ou parcialmente por tais superfícies.

2462 — Dispondo de umas tábuas que lhe dêem os logaritmos com o mínimo de 5 decimais, dos números e das funções goniométricas, determine, com a aproximação que aqueles lhe permitem, os valores de α que satisfazem a equação:

$$\operatorname{sen}\alpha=\sqrt[3]{0{,}032745\times\cos^2 100^\circ\,12'\,30''}$$

R: $\theta=n\,180^\circ+(-1)^n\,5^\circ\,47'\,36''$.

2463 — Escreva o 5.º termo do desenvolvimento de $(2a\sqrt[3]{x}-x^{-1})^6$ e simplifique-o. R: $\dfrac{60\,a_2^3}{x^3\sqrt[3]{x}}$.

2464 — Sendo dadas uma circunferência e uma recta sobre o plano, determine, apenas com o auxílio da régua e do compasso os pontos da recta dos quais se vê a circunferência segundo um ângulo de 30º. Discuta as soluções possíveis.

Soluções dos n.os 2459 a 2464 do Eng. Manuel Amaral.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — ÁLGEBRA SUPERIOR — 2.ª exame de frequência, — 1945-46.

2465 — Primitivar as funções
a) $e^x/(4+e^{2x})$ *b)* $(x+\operatorname{sen}x\cos x)/\cos^2 x$

R: *a)* $1/2\operatorname{arc\,tg}e^x/_2+K$ *b)* $x\operatorname{tg}x+K$.

2466 — Achar os extremos da função
$f(x)=\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}^2 x$

R: *Um máximo nos pontos* $K\pi+\pi/3$, *com o valor* $3\sqrt{3}/8$; *um mínimo nos pontos* $K\pi-\pi/3$, *com o valor* $-3\sqrt{3}/8$.

2467 — Conduzir pelo ponto (1,4) as rectas tangentes à circunferência de centro na origem e raio 2. R: $y=4$ *e* $4y-x+1=0$.

2468 — Determinar o plano conduzido por ox paralelamente ao plano $x-y-z=1$ R: $y+z=0$

F. C. C. — ALGEBRA SUPERIOR — Exame final, Junho de 1947.

2469 — Sendo $0,1,2,4,6,8,10,\cdots$ os quocientes incompletos do desenvolvimento de certo número em fracção contínua, calcular uma fracção racional que represente o número com um erro inferior a 10^{-6}.

2470 — Primitivar a função $f(x)=\log\left(1-\sqrt[3]{x}\right)$.

2471 — Calcular pelo método de iteração três aproximações da raiz de $x+\log_{10}x-2=0$ compreendida em $(1,2)$.

2472 — Que pontos da recta $3x-3y+2=0$ distam $\sqrt{5}$ do ponto $(2,3)$?

2473 — Dados, dum triângulo esférico, os elementos $A=90^\circ$, $a=72^\circ\,31'\,32''$, $b=120^\circ\,20'\,21''$; calcular B e discutir.

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame Final — Julho de 1946.

2474 — Determine a equação da hipérbole de focos $(-1,0)$ $(1,0)$ e de assíntotas $y=\pm\sqrt{3}x$. R: *A equação será* $3x^2-y^2=k^2$ *ou* $\dfrac{x^2}{k^2/3}-\dfrac{y^2}{k^2}=1$ *com* $\dfrac{k^2}{3}+k^2=$ $=\dfrac{4k^2}{3}=1$; $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *donde:* $\dfrac{x^2}{(1/2)^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{3}/2)^2}=1$.

2475 — Ache os máximos e mínimos da função: $f(x,y)=(y+x^2)^2-(x-2y)^2$. R: *As condições de es-*