$$-3p\,x^3-6q\,yx^2-9y\,qx^2+24\,y^2=0$$

ou, atendendo à equação dada: $2q\,yx^2-4y^2=0$; *donde* $q=2y/x^2$.

Com este valor de q, *a equação proposta dá, para* p, *o valor* $p=-2y^2/x^3$ *e a equação diferencial total das superfícies* (S) *é a equação de Pfaff:*

$$dz=-\frac{2y^2}{x^3}\,dx+\frac{2y}{x^2}\,dy$$

ou

$$dz=\frac{2y\,x^2\,dy-2y^2\,x\,dx}{x^4}=d\left(\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Integrando: $z=y^2/x^2+C$.

b) Substituindo as expressões de p *e* q *na igualdade* $dp\,dx+dq\,dy=0$ *logo se deduz que é* $x^2\,dy^2+3y^2\,dx^2-4xy\,dx\,dy=0$ *o que dá:* $dy/dx=y/x$ e $dy/dx=3y/x$.

A 2.ª corresponde às características; a 1.ª define a outra família de linhas de (S) *ao longo das quais é ainda verdadeira a equação* $dp\,dx+dq\,dy=0$ *e dá:* $y=c_1\,x$.

c) A ortogonalidade referida no enunciado equivale ao sist. dif.

$$\frac{dx}{-2y^2/x^3}=\frac{dy}{2y/x^2}=\frac{dz}{-1}.$$

Uma primeira combinação integrável é $x\,dx+y\,dx=0$ *e dá* $x^2+y^2=\alpha$.

A segunda deduz-se agora por substituição:

$$\frac{\alpha-y^2}{y}\,dy=-2\,dz\,,\quad \log|y^\alpha|-\frac{y^2}{2}=-2\,z+\beta.$$

E as linhas trajectórias são as da congruência:

$$x^2+y^2=\alpha,\ \log|y^\alpha|-y^2/2=-2z+\beta.$$

A circunstância particular de não figurar z *na 1.ª destas equações faz com que seja essa a equação das projecções ortogonais pedidas.*

2515 — Considere o integral $\int_{(c)}\frac{e^z\cdot z^{-1}}{1-z^2}\,dz$ onde (c) se supõe definido por $|z-(1+i)|=R$, condicionado o valor de R ao facto de se encontrar o contorno (c) inteiramente traçado na região do plano (z) em que $1<|z-(1+i)|<A$.

Para que valores de A se pode afirmar que (c) inclui, no seu interior, um só ponto singular da função integrando? E dois pontos singulares? Faça, em cada uma destas hipóteses, o cálculo do integral.

R: *Pontos singulares:* $z=0$, $z=+1$, $z=-1$.

Se $R<\sqrt{2}$, (c) *contém um só ponto singular:* $z=+1$ *e o correspondente valor do integral é* $-\pi ei$.

Se $\sqrt{2}<R<\sqrt{3}$, *são interiores a* (c) *os 2 pontos singulares* $z=0$ e $z=+1$; *e o valor do integral, é então:* $2\pi\,i\,(1-e/2)$.

F. C. L. — Análise Superior — **Exame final, 21 de Junho de 1947.**

2516 — Considere o duplo lacete (c) envolvendo os pontos $z=0$ e $z=1$, percorrido no sentido negativo, e mostre que $I_1=\int_{(c)}f(z)\,dz=2\pi i\,[R(2)+R(-2)+R(\infty)]$ sendo $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-4)\sqrt{z(1-z)}}$.

Faça $z=\rho\,e^{i\theta}$, $z-1=\rho_1\,e^{i\theta_1}$. Calcule $R(2)$, $R(-2)$ e $R(\infty)$. Mostre que $I_1=2\int_0^1\dfrac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}}$ e calcule $\int_0^1\dfrac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}}$.

2517 — As superfícies de certa família (S) verificam a seguinte propriedade: «A soma dos quadrados dos parâmetros directores da normal é igual a z^2+1 (z — cota de um ponto genérico). *a)* Escreva a equação às derivadas parciais, a que se subordinam essas superfícies. *b)* Determine um integral completo (tome $\operatorname{tg} c_1$ como primeira constante). *c)* Mostre que as características constituem nm sistema de linhas de curvatura e determine o outro. Interprete geomètricamente as superfícies do integral completo determinado, mostrando que, ao longo delas, tem lugar uma relação da forma $Ap+Bq+C=0$, com A, B e C constantes. Exprima estas constantes na do integral completo. *d)* Estabeleça a relação entre as constantes do integral completo, à qual corresponde a superfície de Cauchy relativa à curva $z-1=1-xy=0$. *e)* Estabeleça a equação diferencial a que se sujeitam as superfícies (S) — família simplesmente infinita — que são de revolução em torno de $0y$. Prove a existência de essas superfícies.

Enunciados e soluções dos n.os 2514 a 2517 de Humberto de Menezes.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

64 — ADAM, Pedro Puig — **Curso de Geometria Metrica**, Tomo I, Fundamentos — Primera Edicion — Madrid 1947 — Patronato de Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros Industriales. Preço 80 pts.

Depois dos trabalhos de David Hilbert sobre os fundamentos da geometria é impossível escrever qualquer obra sobre o assunto que os ignore. A análise profunda feita naquela época, principalmente, por