$$-3p\,x^3-6q\,yx^2-9y\,qx^2+24\,y^2=0$$

*ou, atendendo à equação dada:* $2q\,yx^2-4y^2=0$; *donde* $q=2y/x^2$.

*Com este valor de* q, *a equação proposta dá, para* p, *o valor* $p=-2y^2/x^3$ *e a equação diferencial total das superfícies* (S) *é a equação de Pfaff:*

$$dz=-\frac{2y^2}{x^3}dx+\frac{2y}{x^2}dy$$

ou

$$dz=\frac{2y\,x^2\,dy-2y^2\,xdx}{x^4}=d\left(\frac{y^2}{x^2}\right).$$

*Integrando:* $z=y^2/x^2+C$.

*b) Substituindo as expressões de* p *e* q *na igualdade* $dp\,dx+dq\,dy=0$ *logo se deduz que é* $x^2\,dy^2+3y^2\,dx^2-4xy\,dx\,dy=0$ *o que dá:* $dy/dx=y/x$ e $dy/dx=3y/x$.

*A 2.ª corresponde às características; a 1.ª define a outra família de linhas de* (S) *ao longo das quais e ainda verdadeira a equação* $dp\,dx+dq\,dy=0$ *e dá:* $y=c_1\,x$.

*c) A ortogonalidade referida no enunciado equivale ao sist. dif.*

$$\frac{dx}{-2y^2/x^3}=\frac{dy}{2y/x^2}=\frac{dz}{-1}.$$

*Uma primeira combinação integrável é* $xdx+ydx=0$ *e dá* $x^2+y^2=\alpha$.

*A segunda deduz-se agora por substituição:*

$$\frac{\alpha-y^2}{y}dy=-2\,dz\,,\quad \log|y^\alpha|-\frac{y^2}{2}=-2\,z+\beta.$$

*E as linhas trajectórias são as da congruência:*

$$x^2+y^2=\alpha,\ \log|y^\alpha|-y^2/2=-2z+\beta.$$

*A circunstância particular de não figurar* z *na 1.ª destas equações faz com que seja essa a equação das projecções ortogonais pedidas.*

**2515** — Considere o integral $\int_{(c)}\frac{e^z\cdot z^{-1}}{1-z^2}dz$ onde (c) se supõe definido por $|z-(1+i)|=R$, condicionado o valor de $R$ ao facto de se encontrar o contorno (c) inteiramente traçado na região do plano (z) em que

$$1<|z-(1+i)|<A.$$

Para que valores de $A$ se pode afirmar que (c) inclui, no seu interior, um só ponto singular da função integrando? E dois pontos singulares? Faça, em cada uma destas hipóteses, o cálculo do integral.

R: *Pontos singulares:* $z=0$, $z=+1$, $z=-1$.

*Se* $R<\sqrt{2}$, (c) *contém um só ponto singular:* $z=+1$ *e o correspondente valor do integral é* $-\pi ei$.

*Se* $\sqrt{2}<R<\sqrt{3}$, *são interiores a* (c) *os 2 pontos singulares* $z=0$ e $z=+1$; *e o valor do integral, é então:* $2\pi\,i\,(1-e/2)$.

**F. C. L. — Análise Superior — Exame final, 21 de Junho de 1947.**

**2516** — Considere o duplo lacete (c) envolvendo os pontos $z=0$ e $z=1$, percorrido no sentido negativo, e mostre que $I_1=\int_{(c)}f(z)\,dz=2\pi i\,[R(2)+R(-2)+R(\infty)]$ sendo $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-4)\sqrt{z(1-z)}}$.

Faça $z=\rho\,e^{i\theta}$, $z-1=\rho_1\,e^{i\theta_1}$. Calcule $R(2)$, $R(-2)$ e $R(\infty)$. Mostre que $I_1=2\int_0^1\frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}}$ e calcule $\int_0^1\frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x(1-x)}}$.

**2517** — As superfícies de certa família (S) verificam a seguinte propriedade: «A soma dos quadrados dos parâmetros directores da normal é igual a $z^2+1$ ($z$ — cota de um ponto genérico). *a)* Escreva a equação às derivadas parciais, a que se subordinam essas superfícies. *b)* Determine um integral completo (tome $\operatorname{tg}c_1$ como primeira constante). *c)* Mostre que as características constituem nm sistema de linhas de curvatura e determine o outro. Interprete geomètricamente as superfícies do integral completo determinado, mostrando que, ao longo delas, tem lugar uma relação da forma $Ap+Bq+C=0$, com $A$, $B$ e $C$ constantes. Exprima estas constantes na do integral completo. *d)* Estabeleça a relação entre as constantes do integral completo, à qual corresponde a superfície de Cauchy relativa à curva $z-1=1-xy=0$. *e)* Estabeleça a equação diferencial a que se sujeitam as superfícies (S) — família simplesmente infinita — que são de revolução em torno de $0y$. Prove a existência de essas superfícies.

Enunciados e soluções dos n.ºs 2514 a 2517 de Humberto de Menezes.

# BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

**64** — ADAM, Pedro Puig — **Curso de Geometria Metrica**, Tomo I, Fundamentos — Primera Edicion — Madrid 1947 — Patronato de Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros Industriales. Preço 80 pts.

Depois dos trabalhos de David Hilbert sobre os fundamentos da geometria é impossível escrever qualquer obra sobre o assunto que os ignore. A análise profunda feita naquela época, principalmente, por

Hilbert e pelos seus discípulos marca uma nova fase na forma de encarar não só a geometria mas toda a matemática. Se é certo que em Euclides o metodo seguido é, como em Hilbert, o axiomático o que é verdade também é que existe diferença fundamental entre um e outro, diferença que se nota não só quanto à arrumação e independência dos axiomas, mas também á introdução explicita de outros que em Euclides eram subentendidos durante a exposição ou mesmo ignorados, e, o que é muito mais importante e fundamental, os entes de que trata a geometria, em Hilbert, são de natureza não especificada, (o que permite encontrar muitos sistemas de entes concretos aos quais se aplica inteiramente tudo o que, com Euclides, só era válido para certos elementos bem determinados dados pela experiência imediata) e a existência do conjunto de tais entes é implicitamente postulada.

As geometrias elementar e projectiva, finitas ou não finitas, euclideanas ou não, podem ser estudadas ràpidamente uma vez que se tenha feito, pelo método axiomático de Hilbert, o estudo de uma delas, e esta é uma das outras grandes vantagens do método que invadiu todas as matemáticas modernas, pela necessidade de profundar a natureza e interdependência dos conceitos da matemática e de poupar esforço.

A obra do Prof. Puig Adam, bem conhecido já pelos seus trabalhos didáticos de matemática de colaboração com Rey Pastor, é baseada nos estudos da escola moderna alemã que teve em Hilbert e Klein os verdadeiros impulsionadores, e tem por isso e desde logo todas as vantagens apontadas.

A obra que se destina á preparação para o ingresso na Escola de Engenheiros Industriais de Madrid, pretende, como afirma o autor, a formação científica do futuro técnico, não pela resolução de muitos, muitíssimos exercícios como requere certa técnica preparadora que não é senão uma ginástica deformadora, mas pelo ensimo racional da geometria, e isto sem no entanto cair no defeito oposto de demasiada abstracção, já que se trata de preparar um técnico. Este fim é conseguido pelo Prof Adam no seu livro, que pelo equilibrado desenvolvimento dos assuntos e pelas contribuições pessoais, o tornam utilíssimo não só para o fim proposto, mas ainda para todos os que desejam iniciar o estudo racional da geometria elementar sob um ponto de vista moderno. É por isso um livro precioso, em especial para nós povos da Península, onde livros com estas características são raros.

Neste primeiro volume (Fundamentos) trata-se aquela matéria que é em geral conhecida por geometria elementar, a qual é aqui estudada com certa originalidade na formulação de alguns axiomas (Axioma III, da rigidez), em demonstrações de certos teoremas (por exemplo o das curvas de Jordan) e em certas noções como a da equivalência geométrica de polígonos.

Promete-nos o autor para breve um segundo volume (Complementos) onde tratará a Trigonometria, a Geometria Métrico-Projectiva e as Cónicas, o que ficamos aguardando com o maior interesse.

J. Silva Paulo

65 — JEFFREYS, H. and B. S. — **Methods of Mathematical Physics.** IX + 679 pp. Cambridge University Press, 1946.

Este livro dá com apreciável clareza os elementos de muitas teorias matemáticas de aplicação frequente na física (integrais múltiplos, potencial, cálculo das variações, funções de variável complexa e representação conforme, séries e integral de Fourier, equações diferenciais lineares de 2.ª ordem, equações das ondas e do calor, funções de Bessel e de Legendre, funções elípticas, etc.). O tratado não faz duplo emprego com a obra clássica de Hilbert-Courant e poderá ser de grande utidade para os físicos que desejam refrescar os seus conhecimentos matemáticos clássicos. Não pode no entanto ser considerado como um guia para investigações na física moderna porque não contem nada ou quási nada sobre algumas teorias matemáticas que são o «pão quotidiano» do físico moderno (cálculo tensorial, espaços de Riemann, geometria não-riemaniana, geometria diferencial das hipersuperfícies, spinores, grupos de transformações, espaço de Hilbert e seus operadores, funções e valores próprios dos operadores lineares, desenvolvimentos em séries de funções ortogonais, equações integrais, probabilidades e estatística, etc.). São precisamente estas teorias que deviam ser desenvolvidas completamente numa verdadeira introdução à física matemática, e seria muito para desejar que os autores o fizessem num segundo volume. Prestariam então a todos os físicos um inestimável serviço, visto que não existe ainda, *num só tratado homogéneo*, uma exposição completa destas doutrinas fundamentais.

É interessante notar um detalhe curioso do livro: os diferentes capítulos são encimados por citações de clássicos da literatura que, no espírito dos autores, são uma espécie de «síntese» das doutrinas tratadas. Por exemplo: o capítulo sobre representação conforme começa pela seguinte citação de Alphonse Karr: «Plus ça change, plus c'est la même chose». Confessamos que não nos é possível encontrar qualquer verdadeira relação entre o texto e estas citações; pelo contrário achamos que elas deparam um livro deste género. Mas trata-se aqui talvez dos «mistérios» do «humour».

A. Gião