

nombre de lacunes entre les carrés qui interviennent dans l'équation ponctuelle et ceux qui interviennent dans l'équation tangentielle.

Dans tous les cas $l < d$, et en particulier si $d=1$ (variétés à un seul point double), $l=0$.

Un hyperplan tangent touche une hyperquadrique tangentielle à $d-l$ carrés de S_{d-1} . Or, ces hyperquadriques, l fois spécialisées par rapport à S_{d-1} , dépendent de $(d-1)(d-1+3)/2 - l(l+1)/2$ paramètres.

De même, les hyperquadriques ponctuelles, d fois spécialisées, ayant pour espace double S_{d-1} , dépendent de $n(n+3)/2 - d(d+1)/2$ paramètres.

Donc, les hyperquadriques de spécialisations d, d' de S_n , dépendent de $n(n+3)/2 - d(d+1)/2 + (d-1)(d+2)/2 - l(l+1)/2 = n(n+3)/2 - 1 - l(l+1)/2$ paramètres, et leur groupe automorphe est à: $n(n+2) - [n(n+3)/2 - 1 - l(l+1)/2] = n(n+1)/2 + 1 + l(l+1)/2$ paramètres.

Il est remarquable que seules interviennent dans ces formules finales les valeurs de n et de l , mais non la place des l lacunes parmi l'ensemble des carrés figurant dans les équations ponctuelle et tangentielle. En particulier, la géométrie pseudo elliptique ($n=3, d=d'=2, l=0$), dépend d'un groupe à 7 paramètres aussi bien que la géométrie euclidienne ($n=3, d=3, d'=1, l=0$), avec évidemment une structure différente.

Ce groupe contient des sous groupes invariants, en particulier celui qui correspond à l'invariance simultanée du noyau tangential et des espaces linéaires générateurs du support ponctuel, et qui dépend de $n(n+1)/2 + 1 + l(l+1)/2 - (n-d)(n-d+1)/2 - (n-d')(n-d'+1)/2 = 1 + dd'$ paramètres.

II. Sobre o Cálculo Simbólico

(continuação do n.º 31)

por José Sebastião e Silva

Produto de operadores. Consideremos três conjuntos A, B, C quaisquer, e sejam: Φ , uma transformação unívoca de A em B ; Ψ , uma transformação unívoca de B em C . Chama-se *produto* de Φ por Ψ , e representa-se por $\Phi \cdot \Psi$ (ou simplesmente por $\Phi\Psi$), aquela transformação unívoca de A em C que equivale a aplicar sucessivamente Ψ, Φ (*primeiro* Ψ e *depois* Φ); isto é, em símbolos:

$$(\Phi \cdot \Psi)(x) = \Phi(\Psi(x)), \text{ para cada } x \in A. \quad (1)$$

(1) A expressão $x \in A$ deve ler-se aqui « x pertencente a A ».

D'autres sous-groupes invariants correspondent à l'invariance respective du noyau tangential ou des espaces générateurs ponctuels, ou du S_{d-1} double, etc.

$$X = \begin{vmatrix} H & 0 & 0 \\ A & B & 0 \\ C & D & H' \end{vmatrix} x$$

La matrice de la transformation, présentée ci-dessus, conserve les points de S_{d-1} , et la variété quadratique ponctuelle. Donc H est une matrice orthogonale à $n+1-d$ lignes et colonnes, et les deux tableaux supérieurs indiqués par 0 sont composés de termes tous nuls. De même, la matrice transposée indiquant, sur les coordonnées tangentielles, la transformation inverse, H' est une matrice orthogonale à $n+1-d'$ lignes et colonnes, et le troisième tableau indiqué par 0 est aussi composé de termes tous nuls. Quant aux tableaux A, B, C, D , ils sont composés d'éléments arbitraires, en nombre total dd' .

Remarquons que l'on ne peut pas en général normer en même temps toutes les coordonnées en sorte que les déterminants de H et H' prennent en même temps la valeur 1.

Le nombre de paramètres du groupe automorphe est donc:

$$(n-d)(n+1-d)/2 + (n-d')(n+1-d')/2 + dd' + 1 = -n(n-1)/2 + l(l+1)/2, \text{ et le sous groupe invariant } H=E, H'=\lambda E' \text{ dépend de } 1+dd' \text{ paramètres.}$$

É claro que, em particular, os conjuntos A, B, C podem coincidir entre si.

Exemplo: Se representarmos por H a classe dos seres humanos e escrevermos « $y=pad\ x$ » como abreviatura de « y é pai de x » e « $y=mad\ x$ » como abreviatura de « y é mãe de x » (designando por x, y elementos indeterminados de H , sem distinção de sexo), é claro que os símbolos pad, mad representarão operadores definidos pelo menos numa parte H^* de H —operadores que fazem corresponder a cada elemento x de H^* um e um só elemento ($pad\ x$ ou $mad\ x$) de H . Ora é fácil ver que o produto $pad \cdot mad$ não é mais do

que o operador correspondente à expressão «avô materno de», pois que, por definição:

$$(pad . mad) x \equiv pad (mad x);$$

enquanto o produto $mad . pad$ é o operador correspondente à expressão «avó paterna de». E vê-se imediatamente que

$$mad . pad \neq pad . mad,$$

o que basta para pôr em evidência este facto de notável interesse em Matemática: que a multiplicação entre operadores não é, no caso geral, uma operação comutativa.

Dir-se-á que dois operadores Φ, Ψ são permutáveis, quando se tiver, excepcionalmente, $\Phi\Psi = \Psi\Phi$.

Exemplos: 1) As funções numéricas $\varphi(x) \equiv x-1$, $\psi(x) \equiv \sqrt[3]{x}$, que constituem, manifestamente, transformações unívocas do conjunto dos números reais em si mesmo, não são permutáveis⁽¹⁾, pois que se tem $\varphi(\psi(x)) \equiv \sqrt[3]{x}-1$, $\psi(\varphi(x)) \equiv \sqrt[3]{x-1}$, e portanto $\varphi \cdot \psi \neq \psi \cdot \varphi$ (isto é, as operações de «subtrair uma unidade» e de «extrair a raiz cúbica» não são permutáveis). Mas se pusermos $\varphi(x) \equiv \sqrt[3]{x}$, $\psi(x) \equiv x^2$, será $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$, pois que se tem $\sqrt[3]{x^2} \equiv (\sqrt[3]{x})^2$ (isto é, as operações de «extrair a raiz cúbica» e de «elevar ao quadrado» são permutáveis).

2) Seja A um conjunto formado por 4 elementos, que designaremos por a, b, c, d . Uma transformação unívoca do conjunto A em si mesmo⁽²⁾ será, por exemplo, o operador σ assim definido: $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = c$, $\sigma(c) = d$, $\sigma(d) = a$; ou, mais condensadamente, conforme a notação usual da teoria de GALOIS:

$$\sigma = \begin{pmatrix} b & c & d & a \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \text{ (por cima de cada letra a sua trans-}$$

formada por meio de σ). Uma outra transformação unívoca do conjunto A em si mesmo será, por exem-

plo, o operador $\theta = \begin{pmatrix} d & b & a & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$. Ter-se-á então

$$\sigma\theta = \begin{pmatrix} a & c & b & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad \theta\sigma = \begin{pmatrix} b & a & b & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \text{ e, portanto,}$$

$\sigma\theta \neq \theta\sigma$. Mas já, por exemplo, os operadores

$$\begin{pmatrix} c & d & b & a \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b & a & d & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \text{ são permutáveis, como é fácil verificar.}$$

(1) Convém notar que, no caso das funções numéricas, se apresentam dois conceitos não equivalentes de produto de duas funções φ, ψ : 1) o produto de φ por ψ é a função χ tal que $\chi(x) \equiv \varphi(x) \cdot \psi(x)$ [conceito usual]; 2) o produto de φ por ψ é a função θ tal que $\theta(x) \equiv \varphi(\psi(x))$ [conceito aqui considerado]. Para os distinguir, chamaremos ao primeiro produto elementar e ao segundo produto operatorio.

(2) É fácil ver que entre o conjunto A e ele mesmo se podem definir ao todo $4! = 256$ transformações unívocas.

Todavia, a multiplicação entre operadores é sempre uma operação associativa; isto é, ter-se-á $\Phi(\Psi\Theta) = (\Phi\Psi)\Theta$, quaisquer que sejam os operadores Φ, Ψ, Θ e os conjuntos entre os quais êles operam; podendo escrever-se então mais simplesmente $\Phi\Psi\Theta$ em vez de $\Phi(\Psi\Theta)$ ou de $(\Phi\Psi)\Theta$.

Observação: Quando em vez da notação $\Phi(x)$, se usa a notação Φx , é cômodo dizer que Φx representa o produto do operador Φ pelo elemento x . Não resultará daí qualquer inconveniente, mas apenas vantagem, desde que se evite confusão entre o símbolo de operador e o símbolo de elemento.

Potências de operadores. Do anterior conceito de produto de operadores resulta imediatamente uma natural definição de potência Φ^n dum operador Φ (com n inteiro > 1). Será, por definição:

$$\Phi^n = \Phi \cdot \Phi \dots \Phi \text{ (n vezes).}$$

Assim, por exemplo, se representarmos por D o operador de derivação, será D^n a operação que consiste em derivar n vezes sucessivas (derivação de ordem n). Análogamente, o símbolo pad^n designará, segundo as convenções precedentes, o operador correspondente à expressão «o n -ésimo antepassado em linha masculina de». Outro exemplo: se fôr $\varphi(x) \equiv \sqrt{1-x}$, será

$$\varphi^2(x) \equiv \sqrt{1-\sqrt{1-x}}, \quad \varphi^3(x) \equiv \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}, \text{ etc.}^{(1)}.$$

Por outro lado, é natural pôr ainda, por definição: $\Phi^0 = \Phi$, qualquer que seja o operador Φ .

Finalmente, é natural convencionar que a potência de expoente 0 dum operador Φ qualquer seja a operação idêntica (ou identidade), isto é, aquele operador que faz corresponder a cada elemento x o mesmo elemento x ; operador que representaremos por I . De acôrdo com tal convenção está o facto de se dizer que a derivada de ordem 0 de qualquer função φ é a própria função φ , o que, simbolicamente, se exprime dêste modo: $D^0\varphi = \varphi$ (isto é $D^0 = I$).

Todas as anteriores definições de potência podem manifestamente resumir-se no seguinte esquema de recorrência: $\Phi^0 = I$; $\Phi^{n+1} = \Phi^n \cdot \Phi$. E é fácil ainda demonstrar as propriedades: $\Phi^m \Phi^n = \Phi^n \Phi^m = \Phi^{m+n}$, $(\Phi^m)^n = \Phi^{m \cdot n}$, as quais resultam de associatividade da multiplicação.

Soma de operadores. O conceito de soma $\Phi + \Psi$ de dois operadores Φ, Ψ (com um mesmo domínio A e

(1) É preciso não perder de vista que, no caso das funções numéricas, teremos dois conceitos de potência, correspondentes aos dois conceitos de produto atrás citados. Assim, por exemplo, a expressão $\text{sen}^2 x$ é susceptível de dois significados diversos: 1) $\text{sen}^2 x \equiv \text{sen } x \cdot \text{sen } x$ [significado usual]; 2) $\text{sen}^2 x \equiv \text{sen}(\text{sen}(x))$ [conceito aqui considerado].

um mesmo contradomínio B) só costuma apresentar-se de modo natural, quando o conceito de *adição* se encontra já definido a respeito dos elementos de B . Em tal hipótese, chama-se *soma de Φ com Ψ* , e representa-se por $\Phi + \Psi$, aquele operador que faz corresponder a cada elemento x de A o elemento $\Phi x + \Psi x$ de B ; isto é, em símbolos

$$(\Phi + \Psi)x = \Phi x + \Psi x, \text{ para cada } x \in A.$$

No caso das funções numéricas tal conceito coincide manifestamente com aquele usual. Assim, por exemplo, a soma das funções φ, ψ dadas pelas expressões $\varphi x \equiv \sqrt{x^2 - 1}$, $\psi x \equiv e^x \sin x$ é a função $\varphi + \psi$ dada pela expressão $(\varphi + \psi)x \equiv \sqrt{x^2 - 1} + e^x \sin x$.

Por outro lado, visto que entre as funções numéricas se encontra assim definida uma *adição*, é claro que também, pelo mesmo processo, ficará definida uma *adição* entre os operadores que operam sobre funções numéricas (operadores de tipo 2); e assim sucessivamente. Ter-se-á, por exemplo, segundo a definição geral (representando por φ uma qualquer função derivável):

$$(D^3 + D + I)\varphi \equiv D^3\varphi + D\varphi + \varphi.$$

Não fará porém sentido falar, por exemplo, da soma dos operadores *pad, mad* atrás considerados, por isso mesmo que não está definida nenhuma *adição* entre seres humanos (isto é, nenhuma operação que faça corresponder a cada par de pessoas x, y uma determinada pessoa $x + y$ chamada *soma* das duas primeiras).

Mas já faz sentido falar da soma das funções *número de irmãos de x , número de irmãs de x* , definidas em H , mas de contradomínio numérico (dados: *seres humanos*; resultados: *números*).

É fácil agora verificar o seguinte facto importante: *Se a adição definida em B é associativa, comutativa e invertível*⁽¹⁾, *o mesmo acontecerá a respeito da adição por ela induzida entre os operadores de contradomínio B .*

Ocorre ainda perguntar se a multiplicação atrás definida entre operadores é *distributiva* respeito da *adição* agora introduzida entre os mesmos; isto é, se as igualdades $\Phi(\Psi + \Theta) = \Phi\Psi + \Phi\Theta$, $(\Phi + \Psi)\Theta = \Phi\Theta + \Psi\Theta$ têm lugar quaisquer que sejam as transformações unívocas Φ, Ψ, Θ de A em si mesmo (supondo definida em A uma *adição*). Ora, como o leitor pode facilmente constatar, *tal propriedade não se verifica no caso geral*⁽²⁾, *mas ela verifica-se, com certeza, se nos limitarmos à*

família daqueles operadores Φ que satisfazem à condição

$$\Phi(x + y) = \Phi x + \Phi y,$$

quaisquer que sejam os elementos x, y de A ; operadores que diremos *distributivos* a respeito da *adição*.

Exemplo notável dum operador (de tipo 2) distributivo a respeito da *adição* é, precisamente, o operador de derivação, pois que se tem: $D(\varphi + \psi) = D\varphi + D\psi$ quaisquer que sejam as funções deriváveis φ, ψ . Mas já não é distributivo a respeito da *adição*, por exemplo, o operador Θ assim definido: $\Theta_x \varphi(x) \equiv [D_x \varphi(x)]^2$. Distributivos a respeito da *adição* são ainda os operadores M da forma $M_x \varphi(x) \equiv \gamma(x) \cdot \varphi(x)$, em que $\gamma(x)$ representa uma função fixada arbitrariamente. É interessante observar que os operadores desta forma não são permutáveis com D .

Operadores numéricos. Entre os operadores definidos em campos numéricos ou funcionais figuram, em primeiro lugar, os *multiplicadores numéricos*. Seja, por exemplo, \mathcal{F} o conjunto das funções reais definidas num mesmo intervalo: todo o número real a fará corresponder a cada função f pertencente a \mathcal{F} a função $a \cdot f$ pertencente ainda a \mathcal{F} ⁽¹⁾. Dêste modo, cada número real a definirá uma transformação unívoca de \mathcal{F} em si mesmo, de tal maneira que:

1) A soma dos operadores definidos por dois números a, b coincide com o operador definido pelo número $a + b$; pois que se tem $af + bf = (a + b)f$, qualquer que seja $f \in \mathcal{F}$.

2) O produto dos operadores definidos pelos números a, b coincide com o operador definido pelo número $a \cdot b$; pois que se tem $a(bf) = (ab)f$, qualquer que seja $f \in \mathcal{F}$.

3) O operador definido pelo número 1 coincide com a operação idêntica, I .

Nestas condições, não haverá qualquer inconveniente em confundir os números com os operadores por êles definidos (como multiplicadores). Assim, por exemplo, o símbolo $2/3$ representará indiferentemente o *número* $2/3$ ou aquele operador que faz corresponder a cada função f a função $2/3 f$, etc. Anàlogamente, o *operador idêntico* I poderá confundir-se com o *número* 1 e o *operador nulo* com o *número* 0. Por outro lado, ficará automaticamente estabelecido o que deva entender-se por *soma* $a + \Phi$ dum *número* a com um *operador* Φ , por *produto* $a \cdot \Phi$

(1) Chamamos naturalmente *invertibilidade da adição* à possibilidade de subtracção em qualquer caso.

(2) É todavia fácil ver que a segunda igualdade, $(\Phi + \Psi)\Theta = \Phi\Theta + \Psi\Theta$ (*distributividade à direita*) se verifica em qualquer caso.

(1) É claro que consideramos aqui como *produto dum número a por uma função f* a função $a \cdot f$ assim definida: $(a \cdot f)(x) \equiv a \cdot f(x)$. Também é manifesto que as considerações aqui desenvolvidas se aplicam, *mutatis mutandis*, aos conjuntos de funções complexas de variável complexa definidas num mesmo domínio: então os multiplicadores numéricos serão números complexos.

dum número a por um operador Φ e por produto $\Phi \cdot a$ dum operador Φ por um número a —uma vez estabelecido que os números se podem conceber como operadores.

[Para concretizar ideias, tomemos para exemplo um circuito eléctrico simples, com uma resistência r , uma indutância l e uma força electromotriz $\mathcal{E}(t)$, função do tempo. A intensidade $\mathcal{I}(t)$ da corrente deste circuito deve, como se sabe, verificar a equação

$$\text{diferencial } r \mathcal{I}(t) + l \frac{d}{dt} \mathcal{I}(t) \equiv \mathcal{E}(t), \text{ ou seja, mais}$$

condensadamente: $(r+lD)\mathcal{I}=\mathcal{E}$. Se então puzermos $r+lD=\Theta$, virá $\Theta\mathcal{I}=\mathcal{E}$, e podemos dizer, por analogia com a lei de Ohm, que o operador Θ —soma do operador numérico r com o operador diferencial lD —representa a *resistência funcional* do circuito considerado. Mas é preciso não esquecer que nem \mathcal{E} , \mathcal{I} são números (mas sim funções), nem Θ é um coeficiente numérico, tal como r].

Posto isto, poderemos já definir *função racional inteira dum operador* Φ . Daremos esse nome a toda a função de Φ que se exprima por meio dum número finito de sucessivas *adições e multiplicações* a partir de Φ e de constantes numéricas.

O que desde logo ocorre perguntar é se é lícito tratar as funções racionais inteiras de operadores com as mesmas regras que se usam para as funções racionais inteiras de variáveis numéricas ⁽¹⁾, e se, em particular, toda a função racional inteira de Φ é redutível à forma dum polinómio inteiro em Φ :

$$a_0 \Phi^n + a_1 \Phi^{n-1} + \dots + a_{n-1} \Phi + a_n$$

(em que a_0, a_1, \dots, a_n designam constantes numéricas arbitrárias e n um número natural qualquer).

Ora, como se pode ver facilmente, a resposta é *negativa no caso geral, mas afirmativa se nos limitarmos à classe daqueles operadores Φ que verificam as condições seguintes*: 1) $\Phi(f+g)=\Phi f+\Phi g$; 2) $\Phi(af)\equiv a(\Phi f)$, quaisquer que sejam o número a e as funções f, g pertencentes ao domínio de Φ . A primeira destas propriedades já sabemos que se exprime dizendo que Φ é *distributivo a respeito da adição*; quanto à segunda ela exprime-se, naturalmente, dizendo que Φ é *permutável* com os multiplicadores numéricos [podíamos escrever mais simplesmente $\Phi a = a\Phi$ em vez de $\Phi(af) = a(\Phi f)$]; finalmente, as propriedades 1), 2), verificadas conjuntamente, exprimem-se dizendo que o operador Φ é *linear*.

Exemplo notável dum operador linear é, precisa-

mente, o operador de derivação, D , pois que, além de ser, como já vimos, distributivo a respeito de adição, êle é ainda permutável com os factores numéricos [$D(af)=a(Df)$, qualquer que sejam o número a e a função derivável f]. Dêste modo, todas as regras aplicáveis ás funções racionais inteiras duma variável numérica, serão ainda aplicáveis às funções racionais inteiras do símbolo D . Assim, por exemplo, ter-se-á:

$$(D^2+2D-3)(D^2-2D-3)=D^4-10D^2+9; D^4-5D-36=(D-3)(D+3)(D-2i)(D+2i), \text{ etc., etc.}$$

Exemplos de operadores lineares são os próprios operadores numéricos. Tem-se, com efeito: 1) $a(f+g)=af+ag$; 2) $a(bf)=b(af)$, quaisquer que sejam as funções f, g e os números a, b .

Outro exemplo de linearidade é-nos dado pelos operadores M atrás citados.

Todavia, nós aqui limitámo-nos a definir o conceito de *linearidade* para operadores cujos domínio e contradomínio são constituídos por funções ⁽¹⁾. Ora a verdade é que tal conceito se estende fecundamente a muitos outros campos, e se quizermos, por uma racional medida de economia de pensamento, abraçar numa mesma teoria o maior número possível de domínios, devemos manter-nos fiéis ao método da Análise Geral: *abstrair completamente da natureza dos entes que constituem os dados e os resultados dos operadores, retendo apenas as propriedades formais de certas relações definidas entre esses entes* (por exemplo, as propriedades formais da adição).

Ê-se dêste modo levado, naturalmente, ao conceito abstracto de *sistema vectorial*.

Observe bem o leitor como o conceito que vamos definir (para o qual se adoptou a designação «sistema vectorial») corresponde exactamente ao fim que nos propomos atingir. Ele permitirá definir com a máxima amplitude possível o conceito de linearidade, conservando o que nêste existe de essencial. Em particular, tornar-se-á lícito falar de *funções racionais (inteiras ou fraccionárias) de um ou mais operadores lineares permutáveis entre si*, e aplicar a tais funções as regras do cálculo algébrico ordinário.

Quando depois se tratar de definir *funções irracionais ou transcendentales de operadores lineares*, será necessário restringir o conceito de «sistema vectorial», inserindo nele uma conveniente noção de «limite». Poderemos então instituir em bases rigorosas um *cálculo dos operadores lineares*, de que será apenas um caso particular o *cálculo simbólico dos electrotécnicos* (pelo menos numa parte em que este é admissível).

(1) O conceito estende-se imediatamente ao caso dos operadores de domínio e contradomínio numéricos; mas é fácil ver que as únicas funções *lineares* duma variável numérica são aquelas da forma $\Phi x \equiv ax$, em que a designa uma constante numérica arbitrária. Os operadores *log*, $\sqrt{\quad}$, $\sqrt[3]{\quad}$, *sen*, *cos*, etc. são notoriamente não lineares.

(1) Deter-nos-emos oportunamente sobre o sentido preciso desta questão. Trata-se agora apenas de sugerir o problema.

E não haverá nisto nada de arbitrário ou de artificioso. Tudo tenderá naturalmente para um fim, como o leitor vai ter ocasião de constatar.

Sistemas vectoriais. ⁽¹⁾ Por *sistema vectorial* ou *sistema de vectores relativo ao corpo real*, R , entende-se toda a classe S de entidades u, v, \dots de natureza qualquer, a respeito das quais sejam definidas duas operações — *adição* e *multiplicação escalar* — de acôrdo com os preceitos seguintes:

V_1) Para todo o par u, v de elementos de S existe um e um só elemento de S chamado *soma de u com v* e representável por $u+v$;

V_2) $u+v=v+u$, quaisquer que sejam $u, v \in S$ ⁽²⁾ (*comutatividade*);

V_3) $(u+v)+w=u+(v+w)$, quaisquer que sejam $u, v, w \in S$ (*associatividade*);

V_4) Dados dois quaisquer elementos u, v de S , existe sempre um e um só elemento x de S , tal que $u+x=v$; podendo escrever-se então $x=v-u$ (*invertibilidade*);

V_5) Para cada par a, u formado por um número real a e por um elemento u de S , existe um e um só elemento de S chamado *produto de a por u* e representável por au ;

$$V_6) a(u+v) = au + av;$$

$$V_7) (a+b)u = au + bu;$$

$$V_8) a(bu) = (ab)u$$

$$V_9) 1 \cdot u = u;$$

quaisquer que sejam $u, v \in S$; $a, b \in R$.

As propriedades V_1 a V_4 , quando verificadas conjuntamente, costumam também exprimir-se, dizendo que a classe S constitui um *grupo comutativo* ou *abeliano* a respeito da adição. De tais propriedades resulta, em particular, que existirá necessariamente em S um e um só elemento x tal que: $u+x=u$, qualquer que seja $u \in S$. Representaremos por O este elemento e chamar-lhe-emos o *zero* do sistema S .

Os elementos u, v, \dots do sistema vectorial S serão chamados *vectores*, e os elementos a, b, \dots do corpo R serão chamados *escalares* ⁽³⁾.

Na anterior definição, o corpo real R pode ser substituído por um outro corpo qualquer, por exem-

plo, o corpo complexo, K , o corpo racional, Ra , etc., e assim teremos: *sistemas vectoriais relativos ao corpo complexo*, *sistemas vectoriais relativos ao corpo racional*, etc.

Exemplos: a) Um primeiro exemplo dum sistema vectorial relativo ao corpo real é-nos fornecido pelos vectores do cálculo vectorial elementar. Como se sabe, cada vector é, neste caso, definido por um segmento orientado \overline{AB} , isto é, um segmento ao qual se atribui um determinado *sentido* de percurso, dizendo-se que *dois segmentos orientados* definem o *mesmo vector*, se, e só se, têm a mesma *directção*, o mesmo *sentido* e o mesmo *comprimento*. Por outro lado, sabe-se o que se entende então por *soma de dois vectores* (obtida segundo a regra do paralelogramo) e por *produto dum número real por um vector*; e é bem fácil constatar que as operações assim introduzidas verificam as condições V_1 a V_9 .

b) Convencionemos agora chamar *vector n -dimensional* a toda a sucessão (x_1, x_2, \dots, x_n) de n números reais, chamando *soma de dois vectores* (x_1, x_2, \dots, x_n) , $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ à sucessão $(x_1+x_1^*, x_2+x_2^*, \dots, x_n+x_n^*)$ e *produto dum número real a por um vector* (x_1, x_2, \dots, x_n) à sucessão $(ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$. É fácil ver então que o conjunto R_n de todas estas sucessões (chamadas agora *vectores n -dimensionais*) constitue, com as duas operações que nele introduzimos, um sistema de vectores relativo ao corpo real. A tal sistema R_n dá-se o nome de *espaço vectorial cartesiano a n dimensões reais*.

Se, em vez de sucessões de n números reais, considerarmos as sucessões de n números complexos, seremos conduzidos ao conceito de *espaço vectorial cartesiano K_n* , a *n dimensões complexas*, o qual constitue, manifestamente, um sistema vectorial relativo ao corpo complexo.

c) Um outro exemplo dum sistema de vectores relativo ao corpo real é o conjunto \mathcal{F} , já atrás considerado, das funções reais de variável real definidas num mesmo intervalo, dando às expressões «*soma $f+g$ de duas funções f, g* » e «*produto af dum número real a pela função f* » o significado que usualmente lhes é atribuído. Os *vectores* são portanto, neste caso, as *funções f, g, \dots*

Se, em vez das funções reais da variável real, considerarmos funções complexas da variável complexa (definidas num mesmo domínio), teremos aí um novo exemplo dum sistema vectorial relativo ao corpo complexo.

Muitos outros exemplos de sistemas vectoriais podiam ser citados ainda.

Operadores lineares. Anéis. Sejam S, S^* dois quaisquer sistemas vectoriais (relativos ao mesmo

⁽¹⁾ Muitos autores usam a designação «espaço vectorial» ou ainda «espaço linear», com o significado que atribuímos aqui a «sistema vectorial».

⁽²⁾ A expressão « $u, v \in S$ » deve ler-se aqui « u, v pertencentes a S ».

⁽³⁾ A razão de tal terminologia está em que ela sugere analogias fecundas com as noções do cálculo vectorial ordinário.

corpo) e seja Φ uma transformação unívoca de S em S^* . Diz-se que o operador Φ é *linear*, quando verifica as condições: $\Phi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \Phi\mathbf{u} + \Phi\mathbf{v}$, $\Phi(a\mathbf{u}) = a(\Phi\mathbf{u})$, quaisquer que sejam os vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} e S e o escalar a . É fácil ver desde logo que o produto ou a soma de dois operadores lineares é ainda um operador linear.

Representemos por $\Lambda(S)$ o conjunto de todas as transformações lineares do sistema vectorial S em si mesmo. Facilmente se reconhece que a adição e a multiplicação definidas em $\Lambda(S)$ conforme as convenções precedentes gozam das seguintes propriedades:

I) *Propriedades da adição*: univocidade, associatividade, comutatividade e reversibilidade (isto é, $\Lambda(S)$ forma um grupo comutativo a respeito da adição).

II) *Propriedades da multiplicação*: univocidade, associatividade e existência de unidade (o operador idêntico).

III) *Propriedade mista*: distributividade da multiplicação a respeito da adição.

Todas estas propriedades, assim verificadas conjuntamente — excluída a da existência de unidade — exprimem-se dizendo que o conjunto $\Lambda(S)$ constitui um anel a respeito das duas operações consideradas.

Nota: Observemos que também o conjunto dos números inteiros (positivos e negativos), o conjunto dos números pares, o conjunto dos polinómios inteiros em x , etc., etc. constituem anéis a respeito da adição e da multiplicação ordinárias, mas com estas diferenças capitais: 1) nêstes últimos conjuntos a multiplicação é comutativa; 2) o produto $a \cdot b$ de dois elementos nêstes conjuntos não pode ser nulo, sem que um pelo menos dos factores o seja; ao passo que, na família $\Lambda(S)$, excluído o caso de S ser unidimensional⁽¹⁾, a multiplicação não é comutativa e existem pares de elementos (chamados *divisores de zero*) cujo produto é nulo sem que nenhum dos factores o seja. Pois bem: dá-se o nome de *domínios de integridade* àquêles anéis, como o anel dos inteiros, em que a multiplicação é comutativa e o anulamento do produto implica o anulamento de um, pelo menos, dos factores.

Observemos por outro lado que também o conjunto dos números racionais, o conjunto dos números reais o conjunto das funções racionais, etc., são domínios de integridade — mas com esta diferença ainda: que, nêstes últimos conjuntos, ao contrário do que sucede

nos primeiros, a equação $ax=b$ é resolúvel para todos os pares de elementos a, b tais que $a \neq 0$ ⁽¹⁾. Dá-se o nome de *corpos* ou *domínios de racionalidade* a tais domínios de integridade.

É ainda de notar que o anel $\Lambda(S)$ contém sempre um corpo: o corpo dos operadores escalares.

Transformações lineares entre espaços cartesianos — Supondo fixado, no espaço ordinário, no espaço O como origem, cada ponto A do espaço definirá um vector: o vector representado por \overline{OA} . Transformações lineares deste sistema vectorial em si mesmo são, por exemplo, as homotetias em relação à origem (correspondentes aos operadores escalares), as rotações em torno da origem, as projecções cilíndricas sobre planos que passam pela origem, etc., etc.

Consideremos, para fixar ideias, o espaço vectorial R_2 , cujos elementos são, como sabemos, os pares ordenados de números reais (vectores do plano); e representemos por Φ o operador que faz corresponder a cada elemento (x_1, x_2) de R_2 o elemento (\bar{x}_1, \bar{x}_2) de R_2 dado pelo sistema

$$(1) \begin{cases} \bar{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \bar{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

em que $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ representam números reais quaisquer. Pois bem: é fácil ver que não só a transformação Φ assim definida é linear, como toda a transformação linear de R_2 em R_2 se pode reduzir à forma (1) mediante uma fixação oportuna dos coeficientes $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. Dêste modo, cada transformação linear de R_2 em R_2 será univocamente representada pelo qua-

dro ou matriz $\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix}$ — de tal maneira que matrizes

distintas representarão operadores distintos. O operador idêntico, 1 , será então representado pela matriz

$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$, e o operador 0 pela matriz $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$; dum

modo geral, cada operador escalar a terá a representação $\begin{Bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{Bmatrix}$. A soma de dois operadores $\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix}$,

$\begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Bmatrix}$ será, como é fácil ver, o operador

$\begin{Bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{Bmatrix}$; e o produto dos mesmos ope-

(1) Diz-se que um sistema vectorial S é unidimensional quando todos os elementos de S se podem obter de um deles ($\neq 0$), multiplicando-o por escalares.

(1) A referida propriedade do anulamento do produto está já implícita na resolubilidade de $ax=b$ para $a \neq 0$ (admitidas as restantes propriedades). Dêste modo, podemos definir corpo como todo o anel que, com a exclusão do zero, forma um grupo comutativo a respeito da multiplicação.

radores, na ordem em que estão escritos, será o operador

$$\begin{Bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{Bmatrix}.$$

O leitor pode agora constatar que, por exemplo, as

transformações $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$ não são permutáveis,

e que o produto $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$ é nulo sem que ne-

nhum dos factores o seja — o que mostra que o anel $\Lambda(R_2)$ não é um domínio de integridade.

Tôdas estas considerações se estendem imediatamente ao caso dos espaços vectoriais cartesianos com

um número n qualquer de dimensões, reais ou complexas; então, os operadores lineares serão representados por matrizes de ordem n , isto é, matrizes com n linhas e n colunas.

(Continua)

Nota: Não tendo sido possível terminar no presente número esta série de artigos, fica transferida para o número seguinte a bibliografia já prometida.

Errata: No artigo do número precedente, pág. 2. linhas 13, 15, 30, onde está escrito $\alpha - D$, deve ler-se $D - \alpha$.

P E D A G O G I A

ALGUMAS DEFICIÊNCIAS EM MATEMÁTICA DE ALUNOS DOS LICEUS

por *Maria Teodora Alves*

Quando as deficiências em Matemática, acumuladas num dado aluno, atingem certo nível, esse aluno, por maiores esforços que faça não poderá prosseguir os seus estudos. O desânimo do aluno e . . . o medo à Matemática são as consequências mais imediatas do facto.

A escola tem, por isso, de procurar, a respeito de cada aluno, as suas deficiências, as quais podem ser de muito variada natureza, afim de as corrigir prontamente, evitando a formação de um complexo de inferioridade capaz de produzir graves perturbações.

Os Professores de Matemática do Liceu de Passos Manuel acordaram em que se começasse, por averiguar as deficiências de técnica de Cálculo Aritmético e Algébrico que, em cada ano do curso dos Liceus, os alunos trazem do ano anterior.

Por amabilidade para comigo incumbiram-me da organização dos respectivos testes e do estudo estatístico do resultado dos ensaios.

A técnica do Cálculo Aritmético e Algébrico é um objectivo subsidiário do ensino da Matemática na escola secundária.

Dai porque sem o conhecimento da técnica do Cálculo Aritmético e Algébrico não é possível prosseguir no estudo da Matemática e extrair portanto, as vantagens que esse estudo proporciona à formação mental da criança e do adolescente, a importância da técnica do Cálculo Aritmético e Algébrico e a necessidade do seu domínio pelos alunos.

Embora um dos mais altos espíritos da humanidade, Goethe, tenha afirmado que «A cultura mental proporcionada pelas matemáticas é particular e reduzida em

sumo grau»⁽¹⁾ em todos os tempos, e actualmente também, a Matemática tem sido considerada um agente insubstituível na formação mental da criança e do adolescente.

Os modernos psicólogos e pedagogos, rejeitando a velha teoria das disciplinas formais, retiraram à Matemática e aos estudos clássicos o monopólio que exerciam na educação, mas, como não negam a transferência do adestramento, isto é, «a influência que uma melhoria ou transformação numa função mental tem sobre as outras funções mentais» (Thorndike), a Matemática não fica, por isso, diminuída na sua acção educativa.

Eles discutem quanto e como se transfere ou o que se transfere, mas pode dizer-se que unanimemente aceitam que se realiza a transferência.

A esse respeito Inglis, quanto à Matemática diz «é igualada por poucas outras matérias do curso secundário, mas por nenhuma excedida».

Na transferência do adestramento de uma forma mental para outras, o método de ensino e os assuntos de incidência do ensino são elementos essenciais, isto é, o professor e o programa são peças basilares. Se o ensino da Matemática fôr concentrado em si próprio e desligado das suas conexões com a vida, poderá formar peritos neste ramo do saber — não é o objectivo da escola secundária — mas terá pouco valor educativo.

Além disso, o muito, o complicado e o difícil e

(1) Citação de Adolf Rude.