

radores, na ordem em que estão escritos, será o operador

$$\begin{Bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{Bmatrix}.$$

O leitor pode agora constatar que, por exemplo, as

transformações $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$ não são permutáveis,

e que o produto $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$ é nulo sem que ne-

nhum dos factores o seja — o que mostra que o anel $\Lambda(R_2)$ não é um domínio de integridade.

Tôdas estas considerações se estendem imediatamente ao caso dos espaços vectoriais cartesianos com

um número n qualquer de dimensões, reais ou complexas; então, os operadores lineares serão representados por matrizes de ordem n , isto é, matrizes com n linhas e n colunas.

(Continua)

Nota: Não tendo sido possível terminar no presente número esta série de artigos, fica transferida para o número seguinte a bibliografia já prometida.

Errata: No artigo do número precedente, pág. 2. linhas 13, 15, 30, onde está escrito $\alpha - D$, deve ler-se $D - \alpha$.

P E D A G O G I A

ALGUMAS DEFICIÊNCIAS EM MATEMÁTICA DE ALUNOS DOS LICEUS

por *Maria Teodora Alves*

Quando as deficiências em Matemática, acumuladas num dado aluno, atingem certo nível, esse aluno, por maiores esforços que faça não poderá prosseguir os seus estudos. O desânimo do aluno e . . . o medo à Matemática são as consequências mais imediatas do facto.

A escola tem, por isso, de procurar, a respeito de cada aluno, as suas deficiências, as quais podem ser de muito variada natureza, afim de as corrigir prontamente, evitando a formação de um complexo de inferioridade capaz de produzir graves perturbações.

Os Professores de Matemática do Liceu de Passos Manuel acordaram em que se começasse, por averiguar as deficiências de técnica de Cálculo Aritmético e Algébrico que, em cada ano do curso dos Liceus, os alunos trazem do ano anterior.

Por amabilidade para comigo incumbiram-me da organização dos respectivos testes e do estudo estatístico do resultado dos ensaios.

A técnica do Cálculo Aritmético e Algébrico é um objectivo subsidiário do ensino da Matemática na escola secundária.

Dai porque sem o conhecimento da técnica do Cálculo Aritmético e Algébrico não é possível prosseguir no estudo da Matemática e extrair portanto, as vantagens que esse estudo proporciona à formação mental da criança e do adolescente, a importância da técnica do Cálculo Aritmético e Algébrico e a necessidade do seu domínio pelos alunos.

Embora um dos mais altos espíritos da humanidade, Goethe, tenha afirmado que «A cultura mental proporcionada pelas matemáticas é particular e reduzida em

sumo grau»⁽¹⁾ em todos os tempos, e actualmente também, a Matemática tem sido considerada um agente insubstituível na formação mental da criança e do adolescente.

Os modernos psicólogos e pedagogos, rejeitando a velha teoria das disciplinas formais, retiraram à Matemática e aos estudos clássicos o monopólio que exerciam na educação, mas, como não negam a transferência do adestramento, isto é, «a influência que uma melhoria ou transformação numa função mental tem sobre as outras funções mentais» (Thorndike), a Matemática não fica, por isso, diminuída na sua acção educativa.

Eles discutem quanto e como se transfere ou o que se transfere, mas pode dizer-se que unanimemente aceitam que se realiza a transferência.

A esse respeito Inglis, quanto à Matemática diz «é igualada por poucas outras matérias do curso secundário, mas por nenhuma excedida».

Na transferência do adestramento de uma forma mental para outras, o método de ensino e os assuntos de incidência do ensino são elementos essenciais, isto é, o professor e o programa são peças basilares. Se o ensino da Matemática fôr concentrado em si próprio e desligado das suas conexões com a vida, poderá formar peritos neste ramo do saber — não é o objectivo da escola secundária — mas terá pouco valor educativo.

Além disso, o muito, o complicado e o difícil e

(1) Citação de Adolf Rude.

mesmo o abstrato, quando não utilizado progressivamente e com a devida cautela, são considerados factores de perturbação na transferência do adestramento.

O eminente matemático francês, H. Lebesgue, em resposta a um inquerito promovido em «L'Enseignement scientifique», reagiu contra o excesso e dificuldades dos programas dos liceus franceses de então, afirmando, talvez exageradamente: «Nenhum conhecimento é indispensável para que um indivíduo frequente uma escola de engenharia ou faculdade. Basta-lhe sómente ter aprendido a trabalhar intelectualmente.»

Ensinar a trabalhar intelectualmente, e não a transformar o aluno numa enciclopédia viva de conhecimentos, é, com efeito, um dos objectivos da escola secundária. E a escola secundária fá-lo-á tanto melhor, quanto melhor conhecer o aluno e as suas deficiências, o que só poderá determinar pela experiência.

A escola não pode actuar por impressões gerais ou dentro de teorias por mais brilhantemente expostas ou deduzidas que sejam. Tem de experimentar, com cautela, mas tem de experimentar.

«Em pedagogia tudo está dito, mas nada demonstrado» (Thorndike).

Considerando sómente o caso restrito da Matemática, na escola secundária, o volume de experiências a realizar atinge tais proporções que não pode ser trabalho de um grupo de professores de um liceu. É trabalho para equipas de professores e em vários liceus.

O simples teste organizado para o 2.º Ano, apesar das deficiências que eu própria já lhe reconheço e o correlativo estudo estatístico, correspondeu a algumas horas de trabalho. Se em vez de averiguar as deficiências de técnica de cálculo fosse pretendido averiguar por exemplo a influência da Matemática no pensamento de selecção e relação dos alunos o hábito de generalizar ou a compreensão do simbolismo algébrico e o seu uso, as dificuldades aumentariam consideravelmente. A organização de um teste nessas condições exige um espírito crítico, um saber e uma experiência que confesso sinceramente não possuir. Se a Gazeta de Matemática patrocinasse, junto dos professores, um movimento no sentido de serem iniciados estudos dessa natureza, prestaria à cultura da Matemática em Portugal, um serviço inestimável.

O teste organizado para determinar as deficiências de técnica de cálculo dos alunos do 2.º Ano e que com autorização do senhor Reitor do Liceu de Passos Manuel serviu num tempo de aula (50 m), aos alunos das quatro turmas foi o seguinte:

Calcule:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1) 170×1 | 2) 1×120 |
| 3) $520 : 520$ | 4) $180 : 1$ |
| 5) 0×17 | 6) 21×0 |

- | | |
|--|--|
| 7) $0 : 18$ | 8) $1 : 1$ |
| 9) $2 - 3 - 4 + 7$ | 10) $9 - 2 + 5 - 4$ |
| 11) $(8 \times 6 \times 5) : (8 \times 6)$ | 12) $(7 \times 3 \times 9) : (3 \times 9)$ |
| 13) $4 : 0,1$ | 14) $20 \times 0,1$ |
| 15) $8 - 6 : 3$ | 16) $7 + 8 : 4$ |
| 17) $4 + 3 \times 2$ | 18) $10 - 4 \times 2$ |
| 19) $20 - 4 \times 2 - 15 : 3$ | 20) $16 - 12 : 4 - 3 \times 2$ |
| 21) 1^6 | 22) 1^9 |
| 23) $2^3 \times 2$ | 24) $3^4 : 3$ |
| 25) $3^8 \times 2^2 : 3^8$ | 26) $2^2 \times 5^3 : 5^3$ |
| 27) $2^2 + 3^2$ | 28) $4^2 - 3^2$ |
| 29) $2 \times (2 \times 3 + 3)$ | 30) $2 \times (18 : 6 + 1)$ |
| 31) $2 + 3/4$ | 32) $2/3 + 2$ |
| 33) $3 - 3/2$ | 34) $5/2 - 2$ |
| 35) $1/2 + 2/3$ | 36) $3/4 - 2/3$ |
| 37) $2/7 \times 3$ | 38) $2 \times 4/5$ |
| 39) $3,8 : 2$ | 40) $3/5 : 3$ |
| 41) $1 + 2/3 \times 2$ | 42) $1 - 2/5 \times 2$ |
| 43) $1 + 3/4 : 3$ | 44) $1 - 5/2 : 5$ |
| 45) $2/3 : 1/2$ | 46) $2 : 3/4$ |
| 47) $1 \ 1/4 \times 3$ | 48) $2 : 2 \ 1/3$ |
| 49) $(2/3)^2$ | 50) $(4/3)^2$ |

Para evitar que os alunos copiassem uns pelos outros e também facilitar a vigilância do professor assistente à prova, foram constituídas duas formas do teste que se distinguiam apenas na ordem das questões propostas, as quais mantinham em cada forma a mesma paridade. Assim, pôde ser distribuído a cada dois alunos sentados na mesma carteira uma forma diferente do mesmo teste.

A simples leitura do teste mostra a sua insuficiência.

Foram deixados por explorar muitos aspectos da técnica do cálculo em que os alunos poderiam revelar deficiências; isto é, outras orientações poderiam ter sido seguidas na constituição do teste e aquela que eu segui não teria sido, talvez, a melhor.

Mas por melhor que fosse a organização de um teste, para o efeito que era exigida, seria sempre insuficiente. Sómente o recurso a uma bateria de testes poderá resolver o problema em causa.

Também em questões como por exemplo 18 e 19, deviam ser consideradas duas fases: uma, a de maior valor educativo, referente à ordem e combinação das operações e a outra fase, de restrito valor educativo, referente à execução das operações. É outra deficiência do teste apresentado; mas se houvesse que atender a estas duas fases a organização do teste complicar-se-ia mais ainda.

Sómente recorrendo a baterias de testes, repito, será possível resolver estas dificuldades, eliminando a maioria das deficiências indicadas.

Depois do ensaio do teste o professor de cada turma recebeu a indicação das questões não resolvidas ou mal

resolvidas pelos alunos. Ficou assim conhecendo as deficiências que cada aluno revelou nas questões ensaiadas e terá ocasião de insistir com eles de modo a corrigi-las ou de aconselhar-lhes a resolução de questões análogas até que adquiram o conhecimento desejado.

O coeficiente de confiança do teste (reliability coefficient) foi determinado pelo método aconselhado por Kelley (Split-test method), usando-se a fórmula de Spearman-Brown. Para isso as 50 questões de cada forma do teste foram divididas em dois grupos de dificuldade sensivelmente igual, o grupo das questões ímpares e o das questões pares contendo cada grupo 25 questões.

Cada questão, não resolvida ou de resposta errada, foi classificada com um zero, e com 1, se foi bem resolvida.

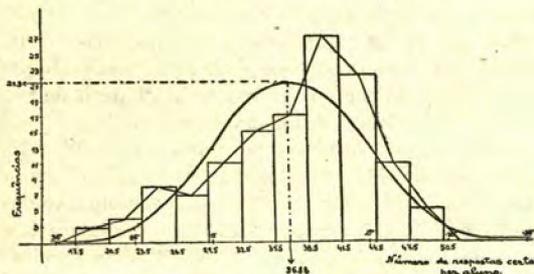
A cota de cada aluno, para a determinação do coeficiente de correlação foi o número de questões certas que resolveu nas questões de mesma paridade.

Apresento a estatística dos resultados do teste ensaiado:

Cota mínima	18
Cota máxima	50
Média	36.88
$\sigma^{(1)}$	7.23
r	0.81
r_x (Coeficiente de confiança)	0.89
$r_{x\infty}$ (Índice de confiança)	0.94

O valor $r_{x\infty}=0,94$ (índice de confiança) que indica a mais alta correlação de que o teste é capaz, por ser próximo de 1, pode considerar-se satisfatório.

As questões do teste foram agrupadas nos grupos: A, B, ... I, e foi calculada a percentagem de alunos



que resolveram todas as questões de cada grupo, sendo depois calculada a dificuldade do grupo, tomando σ para unidade de medida.

(1) Prefiro σ ao erro provável da média. R. Fisher, a propósito do erro provável, diz: «o uso vulgar do erro provável é a sua única recomendação».

Também foi calculada a percentagem de respostas erradas dadas em cada grupo.

É o que consta do quadro seguinte:

$N=129$ alunos

Grupos	Questões do teste pertencentes a cada grupo	Dificuldade expressa em σ	Percentagem de respostas erradas
A	1 a 8	0.61	72.87
B	11 e 12; 25 e 26	0.21	58.11
C	15 a 20; 29 e 30	0.40	65.81
D	31 a 36	0.33	62.80
E	13 e 14; 37 a 40; 45 a 48	0.98	83.73
F	21 a 24; 49 e 50	0.20	58.14
G	41 a 44	0.70	75.97
H	9 e 10	0.73	76.75
I	27 e 28	0.13	44.97

As percentagens de respostas erradas em cada grupo mostram as graves deficiências reveladas pelos alunos na técnica do cálculo aritmético.

Quais as causas de tão graves deficiências? A meu ver, são muitas e variadas e o seu estudo deverá ser feito cientificamente, pois de um autêntico problema científico se trata, que se não compraz com juízos «à priori» por mais bem deduzidos ou convincentes que pareçam.

O ajustamento da curva de normalidade ao histograma de frequência das respostas certas foi feito pelo método das ordenadas, tendo sido determinados sete pontos da curva.

média 36.88

$\sigma=7.23$

$i=3$

y_0 (ordenada máxima)=21.3

$\pm \sigma$, ordenada correspondente, 12.9

$\pm 2\sigma$, " " 2.88

$\pm 3\sigma$, " " 0.24

A inspeção desta figura mostra que o ajustamento da distribuição de frequência de respostas certas obtidas no ensaio do teste, à distribuição normal, da mesma área, média e σ se fez com algum desvio; isto é, há necessidade de introduzir correcções no teste pelo estudo isolado de cada questão devendo ser pesada a dificuldade de cada uma delas em σ , o que será feito quando eu tiver oportunidade para isso.

Para completar esta experiência agora iniciada, e obter resultados merecedores de confiança, conviria que este teste, ou outros do mesmo género, fossem ensaiados com muitos outros alunos e em outros liceus.