ANO VIII - N.º 31 GAZETA DE MATEMÁTICA FEVEREIRO-1947

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *Gazeta de Matemática, L.da* ■ ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c. — LISBOA-N

Mais je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterois le plaisir de l'apprendre de vous même, et l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à mon avis la principale qu'on puisse tirer de cette science.

René Descartes — La Géométrie

SOBRE O CÁLCULO SIMBÓLICO

por **José Sebastião e Silva**

Já desde Leibniz foram observadas curiosas analogias entre as propriedades formais de certos símbolos não numéricos e as regras de cálculo elementar. Mas, por muito tempo, estes factos pouco interesse despertaram, considerados como simples coincidências a que nada correspondesse de essencial.

Não foi senão em fins do século passado, com os importantes trabalhos de Heaviside relativos à integração de vários tipos de equações diferenciais lineares, ligadas a questões de electrotecnia, que as possibilidades do chamado «cálculo simbólico», como elegante e fecundo instrumento de descoberta, foram postas plenamente em evidência. Ele revelou-se particularmente útil na telefonia e na telegrafia a longa distância, e foi, juntamente com o Cálculo das Variações, uma das origens da Análise Funcional.

Consideremos, a título de exemplo, a equação linear ordinária[1] com coeficientes constantes

$$(1)\qquad a_0 D^n \varphi + a_1 D^{n-1}\varphi + \cdots + a_{n-1} D\varphi + a_n \varphi = \psi ,$$

em que ψ representa uma função conhecida, φ a função incógnita, $a_0, a_1, \cdots, a_n$ os coeficientes constantes da equação (reais ou complexos) e $D^i \varphi$ a derivada de ordem i da função φ $(i=1,2,\cdots,n)$. Posto isto, proponhamo-nos determinar o integral geral da equação (1), *admitindo que o símbolo* D *de derivação possa ser tratado com as regras usuais de cálculo, aplicáveis a símbolos numéricos;* e vejamos até que ponto nos pode conduzir este método, pondo de parte, por enquanto, preocupações de rigor. Comecemos então por dar à equação (1) a forma seguinte:

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n)\,\varphi = \psi$$

ou ainda

$$(2)\qquad \varphi = \frac{1}{a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n} \cdot \psi .$$

A expressão que, no segundo membro desta última igualdade, figura a *multiplicar* por ψ, apresenta-se como função racional de D. Utilizemos então, a propósito, o conhecido processo da decomposição de uma função racional em soma de fracções simples, e, para maior clareza, comecemos por supor que as raízes $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ da equação $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$ (chamada a *equação característica* de (1)) são todas simples. Como se sabe, será possível calcular então n números $k_1, k_2, \cdots, k_n$ tais que

$$\frac{1}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} = \frac{k_1}{z-\alpha_1} + \frac{k_2}{z-\alpha_2} + \cdots + \frac{k_n}{z-\alpha_n},$$

o que imediatamente nos sugere a ideia de dar à expressão (2) a forma

$$(3)\qquad \varphi = \frac{k_1}{D-\alpha_1}\psi + \frac{k_2}{D-\alpha_2}\psi + \cdots + \frac{k_n}{D-\alpha_n}\psi .$$

Se, por outro lado, fizermos

$$(4)\qquad \varphi_i = \frac{k_i}{D-\alpha_i}\psi \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

virá

$$D\varphi_i - \alpha_i \varphi_i = k_i \psi \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

ou ainda, em notação mais usual,

$$\varphi_i'(z) - \alpha_i \varphi_i(z) \equiv k_i \psi(z) \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

[1] Os sistemas de equações lineares ordinárias a coeficientes constantes apresentam-se no estudo dos circuitos eléctricos a constantes concentradas, enquanto as equações lineares às derivadas parciais (a coeficientes constantes) se apresentam no estudo dos circuitos eléctricos a constantes uniformemente distribuidas (caso da *equação dos telegrafistas*).

Mas estas não são mais do que equações diferenciais lineares de 1.ª ordem, cujos integrais gerais são dados, como se sabe, pelas fórmulas

$$(5)\quad \varphi_i(z) \equiv k_i e^{\alpha_i z} \int_a^z e^{-\alpha_i t} \psi(t)\, dt + c_i e^{\alpha_i z} \qquad (i=1,2,\cdots n),$$

em que c_i representa uma constante arbitrária e a um ponto do domínio da função ψ, escolhido como origem das integrações.

Ter-se-á portanto, atendendo a (3), (4), (5):

$$\varphi(z) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(k_i e^{\alpha_i z} \int_a^z e^{-\alpha_i t} \psi(t)\, dt + c_i e^{\alpha_i z}\right).$$

Para passar agora ao caso geral, observemos que, se representarmos por α um número complexo qualquer, e se pusermos

$$\chi_\nu = \frac{1}{(\alpha - D)^\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

virá

$$\chi_1 = \frac{1}{\alpha - D}\psi, \chi_2 = \frac{1}{\alpha - D}\chi_3, \cdots, \chi_\nu = \frac{1}{\alpha - D}\chi_{\nu-1}$$

donde, por indução, e atendendo aos resultados precedentes,

$$\chi_\nu(z) \equiv e^{\alpha z}\int_a^z dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_\nu - 1} e^{-\alpha t_\nu} \psi(t_\nu)\, dt_\nu + $$
$$+ c_1 z^{\nu-1} e^{\alpha z} + \cdots + c_{\nu-1} z e^{\alpha z} + c_\nu e^{\alpha z},$$

ou ainda, aplicando repetidamente o método da integração por partes,

$$\chi_\nu(z) \equiv \frac{1}{(\nu-1)!}\int_a^z (z-t)^{\nu-1} e^{\alpha(z-t)} \psi(t)\, dt +$$
$$+ (c_1 z^{\nu-1} + \cdots + c_{\nu-1} z + c_\nu) e^{\alpha z}.$$

Este resultado permitir-nos-á construir, como anteriormente, o integral geral de (1), no caso em que a equação característica admita raízes múltiplas, visto que, em tal caso, a função racional de D que figura no segundo membro de (2) admitirá uma decomposição do tipo

$$\sum \frac{k}{(\alpha - D)^\nu}.$$

Ora o que é verdadeiramente belo é que, por verificação directa em (1), a expressão assim obtida, resulta ser efectivamente o integral geral da equação proposta. Em particular, para $\psi = 0$, reencontra-se a fórmula que nos cursos clássicos costuma ser indicada para a integração da equação homogénea a coeficientes constantes. É claro que, para $\psi \neq 0$, se poderia usar ainda o método de Lagrange; mas o processo agora indicado é mais simples e elegante.

Os factos a que acabamos de nos referir fazem recordar, por uma natural associação de ideias, o que se passou, por exemplo, a respeito da introdução dos números imaginários em Matemática. Com o auxílio de tais números (que chegaram a ser tidos na conta de *diabólicos*), tornou-se fácil dominar várias questões relativas aos números reais, como a resolução algébrica das equações de 3.° e 4.° grau, as quais de outro modo não fôra possível resolver. O símbolo i, introduzido para designar uma *inexistente, imaginária* raiz da equação $x^2+1=0$, só muito mais tarde veio a receber uma interpretação geométrica adequada (que não era de nenhum modo indispensável como garantia de rigor lógico); e, todavia, *tratando aquele símbolo como se fosse realmente um número,* obtinham-se resultados positivos, com uma elegância por vezes prodigiosa.

No exemplo anterior fomos levados a considerar uma *função racional* do símbolo D (1). Passando porém a equações às derivadas parciais (lineares, a coeficientes constantes), como por ex. a equação da *propagação do calor*, no caso simples

$$D_t T - a^2 D_x^2 T = 0 \qquad (-\infty < x < +\infty),$$

a técnica do cálculo simbólico tornou-se ainda mais audaciosa, e chegou a utilizar *funções irracionais e transcendentes* do símbolo D, tais como e^{kD^2}, $\sqrt{D}$, etc., etc., servindo-se de desenvolvimentos em séries de potências de D ou D^{-1}, sem a mínima preocupação de rigor.

A verificação directa vinha, com frequência, confirmar a justeza da solução, obtida de modo tão aventuroso; mas não raramente se acabava por esbarrar em insucessos ou paradoxos que refreavam o entusiasmo inicial e faziam desejar uma delimitação rigorosa das condições de aplicabilidade do método em questão.

Tornava-se pois necessário dar uma base de racionalidade ao que não passava de método empírico, conquanto fecundo. (2) E eram primeiro que tudo razões de ordem prática que o exigiam: principalmente a necessidade de evitar perdas de energia em tentativas inúteis ou em verificações por vezes laboriosíssimas. Vários esforços foram empregados neste sentido de racionalização: por um lado, foi-se levado a condensar todo o método simbólico no uso da transformação de Laplace (3); por outro lado, procurou-se uma justificação mais directa do cálculo operatório, respeitando na medida do possível o seu espírito original.

---

(1) Este porém, ao contrário do que sucedia com o símbolo i, é já inicialmente provido dum significado preciso.

(2) Aos matemáticos impacientes que lhe pediam uma teoria do seu método, Heaviside respondia: «Para comer eu não preciso de conhecer a teoria da digestão». Todavia ele morreu desiludido e semi-louco, em grande parte por causa das críticas recebidas.

(3) No próximo número darei indicações bibliográficas sobre o cálculo simbólico em geral.

À segunda categoria pertence a tentativa de justificação do cálculo símbólico do Prof. L. FANTAPPIÉ, como aplicação da sua teoria dos funcionais analíticos. Esta, por sua vez, nasceu como aplicação, ao campo das funções analíticas, dos métodos da Análise funcional instituídos por V. VOLTERRA e por S. PINCHERLE em fins do século passado.

Noção russelliana de tipo. Análise funcional e Análise geral. Observemos que, no caso simples do exemplo anterior, o cálculo simbólico pode justificar-se por meio de considerações muito elementares. Convirá entretanto aproveitar esta oportunidade para recordar e pôr em foco vários conceitos fundamentais que deverão ser utilizados mais adiante.

Sejam A, B dois conjuntos, finitos ou infinitos, constituídos por entidades cuja natureza deixaremos por enquanto indeterminada. Diremos definida uma *correspondência unívoca*, Φ, *entre os elementos de* A *e os elementos de* B, ou, mais simplesmente, uma *transformação unívoca* Φ de A em B, quando se tenha estabelecido um critério, pelo qual fique associado a cada elemento x de A um determinado elemento y de B, chamado *imagem* ou *transformado* de x por meio de Φ e representável por $\Phi(x)$ ou Φx. Duas transformações unívocas Φ, Ψ de A com B serão consideradas *idênticas*, se, e só se, fôr verificada a condição:

$$\Phi(x) = \Psi(x),$$

qualquer que seja o elemento x de A.

Para exprimir este facto poderá escrever-se indiferentemente

$$\Phi = \Psi, \quad \Phi(x) \underset{x}{=} \Psi(x), \quad \Phi(x) \equiv \Psi(x),$$

As transformações unívocas Φ de A em B são ainda chamadas *operadores unívocos, operações unitárias unívocas* ou *funções unívocas duma variável, de domínio A* e de *contradomínio B*. Os elementos x de A serão chamados *objectos* ou *dados* da operação Φ, e os elementos $\Phi(x)$ de B, *resultados* da operação Φ.

Em particular, A pode coincidir com B: neste caso tratar-se-á de *transformações unívocas do conjunto* A *em si mesmo*.

Particularizemos agora, em sucessivos exemplos, a natureza dos elementos de A e de B:

1) — Suponhamos que A é o *conjunto dos números reais* e que $B = A$. Transformações unívocas do conjunto A em si mesmo são, p. ex. o operador *sen*, o operador $\sqrt[3]{\ }$, a função φ dada pela fórmula $\varphi(x) \equiv 3(x-1)^2$, etc., etc.; mas não já o operador *log* ou o operador ψ dado por $\psi(x) \equiv +\sqrt{x^2-1}$, os quais são definidos sòmente numa parte de A.

2) — Suponhamos agora que o conjunto A é constituído por todas as *funções deriváveis até qualquer ordem, num mesmo domínio;* e seja ainda $B = A$. Exemplo duma transformação unívoca do conjunto A em si mesmo é, neste caso, o *operador de derivação*, D, o qual faz corresponder a cada função φ pertencente a A uma determinada função φ' pertencente ainda a A. Mas tal operador já não é definido, p. ex., no *conjunto das funções contínuas*.

3) — Seja agora A o conjunto das funções integráveis num mesmo intervalo (a, b) e B o conjunto dos números reais. Exemplo duma transformação unívoca de A em B será, neste caso, o *operador de integração*, que faz corresponder a cada função φ do conjunto A o número real $y = \int_a^b \varphi(t)\, dt$.

4) — Seja finalmente A o conjunto dos números reais e B o conjunto das funções reais definidas no intervalo $(-\infty, +\infty)$. Uma transformação unívoca de A em B é, neste caso, p. ex. aquela que faz corresponder a cada elemento x de A a função φ_x definida por $\varphi_x(y) \equiv \operatorname{sen} y/x$ (costuma dizer-se, neste caso, que φ_x é uma função dependente do parâmetro x; substancialmente trata-se duma função de duas variáveis).

Ora é de notar que, enquanto no primeiro caso se apresentam operadores que transformam *números em números* (isto é, operações cujos *dados* são números e cujos *resultados* são ainda números), nos casos restantes trata-se de transformações de natureza mais complexa: operadores que transformam *funções em funções*, operadores que transformam *funções em números* e operadores que transformam *números em funções*. No caso considerado em 1), os operadores dir-se-ão de tipo 1 a respeito do conjunto dos números reais; nos casos restantes, dir-se-ão de tipo 2 a respeito do mesmo conjunto. Poder-se-à, naturalmente, prosseguir na elevação de tipo, considerando p. ex. operadores que transformem operadores de tipo 2 em números ou em operadores de tipo 1, etc., etc. [1]. Lògicamente nenhuma limitação se apresenta, e poderá mesmo prosseguir-se no transfinito.

O que importa é não confundir *funções de tipo* 2, com *funções compostas*. Quando, p. ex., se põe $y = \int_0^1 \varphi(t)\, dt$, supondo φ variável, pode dizer-se que y é *função da função* φ; pois que, p. ex., à função $\varphi(x) \equiv x^2+1$, corresponderá o número $y = 4/3$; à função $\varphi(x) \equiv +\sqrt{1+3x}$, corresponderá o número $y = 14/9$,

[1] Dum modo geral, o tipo duma operação será imediatamente superior aos tipos dos seus dados e dos seus resultados.

etc., etc. Mas não se poderá de nenhum modo dizer que y é função da variável t, a qual, por isso mesmo, recebe neste caso o nome de *variável aparente.* Não convirá portanto usar aqui a notação $y=\Phi[\varphi(t)]$. Para evitar confusões com as funções compostas, costuma escrever-se então a variável t como índice de Φ, isto é:

$$y=\Phi_t[\varphi(t)];$$

ou mais simplesmente ainda

$$y=\Phi(\varphi).$$

Infelizmente, a palavra «função» costuma ser usada em duas acepções diversas: no sentido de «variável dependente» e no sentido de «operador»; daí, em grande parte, as dificuldades conceituais que a Análise funcional apresenta ao principiante.

O conceito de tipo lógico foi introduzido por Bertrand Russell, com o objectivo de resolver os paradoxos da teoria dos conjuntos. A intervenção dêste conceito em Análise funcional é de tal modo essencial, que não se pode deixar de pô-lo em evidência. Pode bem dizer-se que a distinção fundamental entre a Análise clássica e a Análise funcional está em que, enquanto a primeira se ocupa predominantemente de números ou de operações sôbre números, a segunda se dedica sistemàticamente ao estudo de operações de tipo superior.

Mas começa, por outro lado, a fazer-se sentir a necessidade duma *síntese,* que resolva o *antagonismo* entre a Análise clássica e a Análise funcional, e restitua à Matemática aquela unidade que tem sido sempre o seu ideal. E é assim que surge, por obra de M. Fréchet e de M. H. Moore, a Análise geral, cujo método consiste precisamente em deixar indeterminada a natureza dos elementos sôbre os quais incidem as operações, fixando apenas, por meio de condições mais ou menos largas (axiomas, no sentido moderno da palavra) propriedades lógicas, formais, das relações definidas entre tais elementos. Estes podem, ser números, funções, etc. A orientação da Anàlise geral é portanto aquela orientação *axiomática, formal ou abstracta* que caracteriza todo o movimento da Matemática moderna, desde a Álgebra à Topologia e à Lógica matemática.

(Continua)

II. Nombres Hypercomplexes

par **Paul Belgodère**

La représentation d'une figure par un nombre hypercomplexe a pour but d'associer un algorithme à la loi de composition du groupe. Quittes à abandonner certaines propriétés fondamentales de l'algèbre (associativité du produit, non-divisibilité de zéro), nous pouvons ainsi attacher à toute géométrie au sein d'un groupe une méthode de calcul commode, une transformation étant représentée si possible par un ensemble de paramètres tels que les coordonnées généralisées de l'élément géométrique transformé soient fonction linéaire des coordonnées généralisées des éléments géométriques initiaux et des paramètres. Même s'il offre peu d'avantages pour les calculs effectifs, un tel procédé permet de mieux comprendre la nature de la géométrie étudiée.

La considération des éléments imaginaires d'une figure permet souvent de prévoir la nature des nombres hypercomplexes à associer à ses éléments réels pour représenter convenablement les opérations d'un groupe principal.

Par exemple, les transformations circulaires directes du plan, projection stéréographique des transformations projectives de la surface d'une sphère, qui en conservent globalement chaque système de génératrices, transforment une isotrope du plan en une isotrope de même système, la transformation entre isotropes de même système étant homographique. Une transformation circulaire *réelle* est donc caractérisée par la substitution homographique *complexe* qu'elle induit sur le paramétrage d'*un* faisceau d'isotropes (elle induit sur l'autre faisceau la substitution conjugée). L'*affixe* $x+iy$ d'un point *réel* du plan, n'étant autre que l'abcisse complexe de l'intersection de l'axe Ox avec une isotrope issue du point, constitue un paramétrage unicursal pour le faisceau d'isotropes, et est donc transformée *homographiquement* par les transformations circulaires réelles.

Nombres bicomplexes:

L'exemple des transformations circulaires du plan, paramétrées par l'introduction d'une affixe complexe attachée à un point réel, nous conduit à considérer une affixe bicomplexe $x+iy$, le point (x, y) étant *imaginaire*, et x et y étant des nombres complexes construits à l'aide d'une clef h telle que $h^2=-1$, mais n'ayant absolument aucun rapport avec la clef i telle que $i^2=-1$, interprétable comme un opérateur de