etc., etc. Mas não se poderá de nenhum modo dizer que y é função da variável t, a qual, por isso mesmo, recebe neste caso o nome de *variável aparente*. Não convirá portanto usar aqui a notação $y=\Phi[\varphi(t)]$. Para evitar confusões com as funções compostas, costuma escrever-se então a variável t como índice de Φ, isto é:

$$y=\Phi_t[\varphi(t)];$$

ou mais simplesmente ainda

$$y=\Phi(\varphi).$$

Infelizmente, a palavra «função» costuma ser usada em duas acepções diversas: no sentido de «variável dependente» e no sentido de «operador»; daí, em grande parte, as dificuldades conceituais que a Análise funcional apresenta ao principiante.

O conceito de tipo lógico foi introduzido por Bertrand Russell, com o objectivo de resolver os paradoxos da teoria dos conjuntos. A intervenção dêste conceito em Análise funcional é de tal modo essencial, que não se pode deixar de pô-lo em evidência. Pode bem dizer-se que a distinção fundamental entre a Análise clássica e a Análise funcional está em que, enquanto a primeira se ocupa predominantemente de números ou de operações sôbre números, a segunda se dedica sistemàticamente ao estudo de operações de tipo superior.

Mas começa, por outro lado, a fazer-se sentir a necessidade duma *síntese*, que resolva o *antagonismo* entre a Análise clássica e a Análise funcional, e restitua à Matemática aquela unidade que tem sido sempre o seu ideal. E é assim que surge, por obra de M. Fréchet e de M. H. Moore, a Análise geral, cujo método consiste precisamente em deixar indeterminada a natureza dos elementos sôbre os quais incidem as operações, fixando apenas, por meio de condições mais ou menos largas (axiomas, no sentido moderno da palavra) propriedades lógicas, formais, das relações definidas entre tais elementos. Estes podem, ser números, funções, etc. A orientação da Anàlise geral é portanto aquela orientação *axiomática, formal ou abstracta* que caracteriza todo o movimento da Matemática moderna, desde a Álgebra à Topologia e à Lógica matemática.

(Continua)

II. Nombres Hypercomplexes

par ***Paul Belgodère***

La représentation d'une figure par un nombre hypercomplexe a pour but d'associer un algorithme à la loi de composition du groupe. Quittes à abandonner certaines propriétés fondamentales de l'algèbre (associativité du produit, non-divisibilité de zéro), nous pouvons ainsi attacher à toute géométrie au sein d'un groupe une méthode de calcul commode, une transformation étant représentée si possible par un ensemble de paramètres tels que les coordonnées généralisées de l'élément géométrique transformé soient fonction linéaire des coordonnées généralisées des éléments géométriques initiaux et des paramètres. Même s'il offre peu d'avantages pour les calculs effectifs, un tel procédé permet de mieux comprendre la nature de la géométrie étudiée.

La considération des éléments imaginaires d'une figure permet souvent de prévoir la nature des nombres hypercomplexes à associer à ses éléments réels pour représenter convenablement les opérations d'un groupe principal.

Par exemple, les transformations circulaires directes du plan, projection stéréographique des transformations projectives de la surface d'une sphère, qui en conservent globalement chaque système de génératrices, transforment une isotrope du plan en une isotrope de même système, la transformation entre isotropes de même système étant homographique. Une transformation circulaire *réelle* est donc caractérisée par la substitution homographique *complexe* qu'elle induit sur le paramétrage d'*un* faisceau d'isotropes (elle induit sur l'autre faisceau la substitution conjugée). L'*affixe* $x+iy$ d'un point *réel* du plan, n'étant autre que l'abcisse complexe de l'intersection de l'axe Ox avec une isotrope issue du point, constitue un paramétrage unicursal pour le faisceau d'isotropes, et est donc transformée *homographiquement* par les transformations circulaires réelles.

Nombres bicomplexes:

L'exemple des transformations circulaires du plan, paramétrées par l'introduction d'une affixe complexe attachée à un point réel, nous conduit à considérer une affixe bicomplexe $x+iy$, le point (x,y) étant *imaginaire*, et x et y étant des nombres complexes construits à l'aide d'une clef h telle que $h^2=-1$, mais n'ayant absolument aucun rapport avec la clef i telle que $i^2=-1$, interprétable comme un opérateur de rotation. Des difficultés apparaissent alors, car, par exemple, les nombres $(i+h)$ et $(i-h)$ ont un produit nul sans être eux-mêmes nuls: le système de nombres bicomplexes conserve la commutativité de la somme et du produit, la distributivité de la multiplication, mais possède des *diviseurs de zéro*, ce qui fait que la division peut y devenir impossible ou indéterminée pour des valeurs non nulles du diviseur.

Considérons spécialement les diviseurs de zéro $u=(1+ih)/2$ et $v=(1-ih)/2$, dont chacun est égal a son carré. On peut décomposer, de manière unique, tout nombre bicomplexe sous la forme $au+bv$, où a et b sont des nombres complexes ordinaires avec la clef i, et où $u^2=u$, $v^2=v$, $uv=0$.

Cette décomposition analyse complètement la structure des nombres bicomplexes, car elle donne le théorème d'addition

$$(au+bv)+(a'u+b'v)=(a+a')\,u+(b+b')\,v$$

et le théorème de multiplication

$$(au+bv)+(a'u+b'v)=(aa')\,u+(bb')\,v\,,$$

avec des formules analogues pour la soustraction et la division: les coefficients de u et v se combinent chacun par les règles de l'algèbre ordinaire, sans jamais avoir d'influence l'un sur l'autre: l'algèbre bicomplexe est somme directe de deux algèbres complexes ordinaires.

Interprêtant ce résultat dans le langage des transformations induites sur le plan de Cauchy (représentation réelle des points de la droite complexe) par les transformations analytiques de l'affixe prolongées aux points complexes du plan par l'emploi de nombres bicomplexes, nous pouvons dire qu'une telle transformation est à variables séparées, les isotropes de chaque système se transformant chacune pour son propre compte: c'est d'ailleurs la raison profonde pour laquelle toute transformation du plan de Cauchy associée à une fonction analytique de l'affixe est une représentation *conforme*.

Remarquons en passant que la structure des nombres bicomplexes $x+yk$, où x et y sont des nombres complexes ordinaires construits à l'aide d'une clef h $(h^2=-1)$, avec $k^2=+1$, sans que k soit égal ni à $+1$, ni à -1, est identique à celle des nombres que l'on vient d'étudier: il suffit de poser $u=(1+k)/2$, $v=(1-k)/2$ pour retrouver la décomposition précédente: on retrouve les mêmes nombres bicomplexes par prolongement complexe des nombres $x+yi$ ou $x+yk$, pris initialement avec x et y réels, $i^2=-1$, $k^2=+1$, lorsque x et y deviennent des nombres complexes ordinaires avec la clef h.

Une application de cette identité se rencontre dans l'étude des points complexes d'une quadrique. On obtient un paramétrage adapté aux transformations projectives conservant la quadrique en repérant chaque point par les paramètres x et y des deux génératrices qui y passent, d'où par le nombre

$$ux+vy=\frac{x+y}{2}+k\,\frac{x-y}{2}$$

(x et y sont réels pour les points réels d'une quadrique réglée) puisque x et y se transforment *chacun pour leur propre compte:* une transformation homographique sur $ux+vy$ équivaut à deux transformations homographiques opérant séparément sur x et y.

D'autre part, lorsqu'il s'agit d'une quadrique réelle convexe, le paramétrage par affixe revient à associer à tout point réel une génératrice imaginaire qui y passe, et le remplacement de l'affixe complexe par un nombre bicomplexe donne le même paramétrage total que si la quadrique avait été supposée initialement à génératrices réelles: il n'y a que le *domaine de réalité* des paramètres correspondant aux points réels qui diffère dans les deux cas.

Remarquons, comme dans toute autre branche de la Géométrie, le rôle fondamental que jouent les *éléments singuliers* formés ici par les diviseurs de zéro (pour lequel le coefficient de u ou v est nul). Dans toute représentation réelle d'éléments complexes ordinaires à un paramètre complexe, prolongée à la représentation complexe ordinaire d'éléments bicomplexes à un paramètre bicomplexe, les *protofils* (ensemble des points bicomplexes pour lesquels le coefficient de u ou v est fixé) jouent un rôle essentiel et ont un caractère intrinsèque pour les changements de paramètre bicomplexe. Dans l'image géométrique simplement complexe, ils donnent naissance à des éléments remarquables: par exemple la représentation de la «droite bicomplexe» sur le «plan de Cauchy» *complexe* met en évidence les droites isotropes de ce plan, qui jouent un rôle *essentiel* dans les transformations conformes du plan de Cauchy, associées aux changements analytiques de paramètre pour la droite bicomplexe. C'est ce qui explique le succés des *coordonnées isotropes* dans l'étude et les applications des *fonctions harmoniques* complexes ou même réelles.

Un autre exemple intéressant est fourni par les surfaces minima réelles de l'espace ordinaire, lieu des milieux des cordes joignant deux courbes isotropes, supposées imaginaires conjuguées. Les points réels de la surface minima peuvent être considérés comme les images des points complexes d'une courbe minima, ce qui conduit, par prolongement, à considérer les points complexes de la surface minima comme images des points bicomplexes de la courbe. D'après le théorème de décomposition, les protofils correspondent à ce que l'on obtenait initialement en prenant un point fixe d'une courbe minima, associé à l'ensemble des points de la courbe conjuguée; ils correspondent donc aux courbes de longueur nulle de la surface minima. On peut d'autre part paramétrer une courbe minima par la direction de sa tangente, c'est-à-dire par un paramètre repérant, sur une sphère, la génératrice de système déterminé qui lui est parallèle. La correspondance entre courbes minima de la surface, protofils de la courbe, génératrices de la sphère, permet d'énoncer immédiatement les théorèmes suivants: Il y a correspondance conforme entre une surface minima et son image sphérique par plans tangents parallèles. Tout changement analytique de paramètre sur la courbe minima initiale induit sur la surface minima une transformation conforme. L'abscisse d'un point de la courbe initiale étant pour elle un paramètre, on en déduit que *les sections de la surface minima par des plans parallèles* (qui correspondent à des fils d'égale partie réelle) *y forment un système isotherme.*

Les nombres bicomplexes s'introduisent automatiquement par extension analytique des figures réelles représentant les éléments complexes. On pourrait, par exemple, les utiliser avec profit dans l'étude de la *parataxie:* ils permettent de raisonner de façon rigoureuse, sans faire de confusion entre les imaginaires *de deux espèces différentes* qui interviennent dans le problème. Le *théorème de décomposition* montre évidemment qu'il ne s'agit pas là d'une algèbre essentiellement distincte de l'algèbre ordinaire, mais la décomposition est, au point de vue géométrique, plutôt un avantage qu'un inconvénient, et il est utile de pouvoir la prévoir et l'interprêter. Les nombres multicomplexes, obtenus par extensions analytiques sucessives (à l'aide de clefs comutatives h_i ou k_j telles $h_i^2=-1\,,\,k_j^2=+1$) donnent également lieu à une décomposition totale.

Nombres duaux:

Considérons les *nombres duaux* de la forme $z=x+y\,\varepsilon$, avec $\varepsilon^2=0$ sans que ε soit nul: une interprétation commode consiste à dire que l'on a un système *non archimédien*, dans lequel ε est l'infiniment petit des physiciens, dont le carré est totalement négligeable. Les coefficients x et y peuvent appartenir à des anneaux ou corps divers: nombres réels, nombres complexes ordinaires, vecteurs, quaternions, ...

La loi de multiplication est:

$$zz'=(x+y\varepsilon)\,(x'+y'\varepsilon)=(xx')+(xy'+x'y)\,\varepsilon$$

Le premier coefficient x, x' apparaît comme un *noyau*, qui se transforme pour son propre compte, quel que soit le coefficient secondaire $y\,,y'$.

Tout nombre dual pour lequel le coefficient principal x est nul est une racine de zéro, et joue évidemment un rôle singulier et fondamental.

Nous rappellerons ici les principaux résultats de l'utilisation des nombres duaux en géométrie, en insistant sur ceux qui nous paraissent nouveaux ou essentiels.

Prenons d'abord x et y dans le corps des nombres réels, et cherchons à représenter, sur le plan réel $x\,,y$, *les transformations projectives de la droite duale.*

Faisons le calcul:

$$x'+\varepsilon y'=\frac{(a+\varepsilon a')\,(x+\varepsilon y)+(b+\varepsilon b')}{(c+\varepsilon c')\,(x+\varepsilon y)+(d+\varepsilon d')}=\frac{ax+b}{cx+d}+$$

$$+\varepsilon\left[\frac{(a'x+b')\,(cx+d)-(ax+b)\,(c'x+d')+y\,(ad-bc)}{(cx+d)^2}\right].$$

Les droites $x=constante$ sont donc transformées en droites analogues.

Les paraboles $y=Ax^2+Bx+C$ sont transformées en paraboles analogues.

Considérons la représentation classique des transformations projectives de la droite complexe sur les transformations circulaires d'un plan réel, ou de la sphère de Riemann dont il est projection stéréographique. Transformons par continuité la sphère de Riemann en un cylindre de génératrices parallèles à Oy, sans cesser de considérer sur les ellipsoïdes de révolution intermédiaires l'empreinte de la géométrie projective de l'espace. Dans le plan image, nous avons donc à considérer une géométrie anallagmatique mais, par rapport au repère cartésien, les *points cycliques* tendent l'un vers l'autre et finissent par se confondre, en sorte que les cercles initiaux donnent, à la limite, des paraboles d'axe parallèle à Oy. Les nombres hypercomplexes à associer à la géométrie intermédiaire, qui n'est que transformée par affinité de la géométrie anallagmatique ordinaire, sont de la forme $x+ky$, où le symbole k est tel que k^2 soit réel, négatif et tendant vers zéro (puisque les «*points cycliques*» sont symbolisés par $x^2+k^2y^2=0\,,t=0$ et tendent vers $x^2=0\,,t=0$). On voit donc que, à la limite, les transformations projectives de la droite duale correspondent aux transformations anallagmatiques d'un plan à points cycliques confondus, c'est-à-dire aux transformations projectives d'un cylindre (ou, ce qui revient au même, d'un cône). Deux points du cylindre dont l'affixe duale ne diffère que par une racine de zéro sont situés sur une même génératrice. En réalité, le groupe projectif du cylindre dépend de 7 paramètres, alors que le groupe projectif de la sphère ne dépendait que de 6 (de même que, dans la géométrie euclidienne de l'espace, le groupe à 6 paramètres de déplacements peut être prolongé en un groupe à 7 paramètres par l'introduction des homothéties, *non* *engendrables par des transformations involutives.* Cela correspond au fait qu'on peut prolonger la géométrie projective de la droite duale en lui adjoignant la transformation $x'+\varepsilon y'=x+m\varepsilon y$, où m est une constante arbitraire.

Ainsi, la géométrie projective de la droite duale réelle est identique (avec introduction éventuelle de la transformation $\varepsilon \to m\varepsilon$), à la géométrie anallagmatique du plan réel à points cycliques confondus, et à la géométrie projective du cône réel. De même la géométrie projective de la droite duale complexe est identique à la géométrie anallagmatique du plan complexe à points cycliques confondus (dont un exemple est fourni par un plan *isotrope* euclidien), à la géométrie projective du cône complexe, et à la géométrie euclidienne à 3 dimensions engendrée par les plans isotropes, tangents à la conique ombilicable.

Par changement de l' interprétation des coefficients, on peut repérer les points complexes de la droite duale suivant les points duaux de la droite complexe, c'est-à-dire les points duaux de la sphère réelle. On peut ainsi associer les points duaux de la sphère réelle aux plans isotropes, donc aux droites réelles orientées qu'ils contiennent (l'orientation de la droite réelle correspondant au choix entre les deux plans isotropes qui en sont issus). On peut d'ailleurs considérer cette correspondance comme cas limite de l'association à une droite réelle d'un point complexe d'une sphère, par l'intermédiaire des plans tangents que l'on peut mener de la droite à la sphère ; on pourrait dans ce cas général, utiliser avec profit des nombres bicomplexes.

A toute droite réelle orientée, on peut associer ses coordonnées plückériennes $a,b,c;l,m,n$, où a,b,c, sont composantes d'un vecteur unitaire porté par la droite, et l,m,n, les composantes du moment de ce vecteur par rapport à l'origine. Puisque $a^2+b^2+c^2=1$ et $al+bm+cn=0$, on voit que le vecteur de composantes duales $a+\varepsilon l$, $b+\varepsilon m$, $c+\varepsilon n$ est lui-même unitaire et apte à représenter la droite suivant un point dual de la sphère unité : c'est la représentation sphérique prévue par la théorie. Le noyau a,b,c, correspond à un point réel de la sphère, apte à paramètrer, par lui-même, la direction de la droite, puisque les isotropes qui en sont issues coupent l'ombilicale aux points où la touchent les plans isotropes issus de la droite.

Les rotations de la sphère duale conservent l'association entre points antipodes : la transformation homographique (à coefficients duaux), induit sur le paramétrage complexe-dual de la sphère a donc la propriété caractéristique de correspondre aux transformations projectives de plan isotrope en plan isotrope qui transforment les droites réelles en droites réelles, c'est-à-dire aux déplacements réels de l'espace.

La géométrie métrique de l'espace euclidien réglé n'est donc qu'une extension duale de la géométrie métrique de la gerbe de droite, et le principe de transfert permet d'étendre à la géométrie de l'espace les procédés de calcul et les résultats valables pour la géométrie autour d'un point. La distance apparaît comme une composante duale, secondaire par rapport à l'angle qui joue le rôle de noyau. L'interprétation de la distance comme un angle infiniment petit est une généralisation du procédé classique qui considère la géométrie euclidiene plane comme limite de la géométrie à la surface d'une sphère dont le rayon devient infiniment grand. Le fait que l'espace euclidien n'a pas d'unité de longueur privilégiée, et admet des homothéties, correspond au fait que, dans le corps des nombres duaux, la clef ε n'est pas caractérisée de mannière unique, et que l'on peut lui substituer $m\varepsilon$ ce qui, si on le désire, permet d'introduire un paramètre supplémentaire dans le groupe de transformations.

La représentation des droites de l'espace par des vecteurs duaux est particulièrement utile dans l'étude des propriétés métriques des complexes linéaires : l'axe d'un tel complexe $(a,b,c;l,m,n)$ a en effet des coordonées plückériennes de la forme $(a,b,c;l+ua,$ $m+ub,$ $n+uc)$, ce qui fait que le produit d'un même vecteur dual par un nombre dual arbitraire représente l'ensemble des complexes linéaires de même axe.

Etant donnés trois vecteurs $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$, on montre facilement que les trois vecteurs λ (produits vectoriels)

$$\mathbf{C}''=(\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})\wedge\mathbf{C}\,,\quad \mathbf{A}''=(\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})\wedge\mathbf{A}\quad \text{et}\quad \mathbf{B}''=(\mathbf{C}\wedge\mathbf{A})\wedge\mathbf{B}$$

ont une somme nulle et sont donc coplanaires (les trois plans-hauteurs d'un trièdre sont concourants), ce qui permet, à partir de 3 vecteurs $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$, de construire un vecteur $\mathbf{D}$ qui avec les 9 vecteurs $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$,

$$\mathbf{A}'=\mathbf{B}\wedge\mathbf{C},\ \mathbf{B}'=\mathbf{C}\wedge\mathbf{A},\ \mathbf{C}'=\mathbf{A}\wedge\mathbf{B},\ \mathbf{A}'',\mathbf{B}'',\mathbf{C}''$$

forme une configuration telle que chacun des 10 vecteurs ait un produit scalaire nul avec 3 autres.

De même, dans l'espace, le produit scalaire nul de deux vecteurs duaux correspond à l'intersection à angle droit des axes de deux complexes linéaires : on en déduit imédiatement que, à partir de trois droites A,B,C, on peut construire une configuration de Morley-Petersen de 10 droites dont chacune rencontre trois autres à angle droit.

L'utilisation des nombres duaux dans la géométrie de Laguerre des cercles orientés du plan n'est pas distincte de leur aptitude à paramétrer les plans isotropes de l'espace, puisqu'il y a correspondance entre les droites orientées d'un plan et les plans isotropes qui en sont issus. Restant dans le domaine réel, il y a correspondance entre la géométrie de Laguerre réelle et les transformations projectives d'un cône réel. Les déplacements de l'espace euclidien correspondent, par projection isotrope (un point de l'espace étant centre d'une sphère de rayon nul passant par un cercle du plan) aux transformations de contact du plan qui changent les cercles en cercles et les droites en droites, en conservant la *distance tangentielle* de deux éléments de contact d'une même droite. Il suffit, pour faire correspondre la géométrie de Laguerre aux transformations projectives d'un paramètre dual $u+\varepsilon v$, de paramétrer les droites orientées sous la forme

$$(1-u^2)\,x+2\,uy+v=0\,.$$

Pour que la droite enveloppe un cycle, il faut et suffit que v soit un polynôme du second degré en u.

Les transformations représentées par une fonction de la variable $u+\varepsilon v$

$$f(u+\varepsilon v)=f(u)+\varepsilon f'(u).v=g(u)+\varepsilon\,[h(u)+vg'(u)]$$

(où $h\,,g$ et sa dérivée g' représentent des fonctions ordinaires, alors que f était fonction duale d'une variable duale) admettent au voisinage de chaque droite $u\,,v$ une transformation tangente de la forme:

$$u'-u_0'+\varepsilon\,(v'-v_0')=(a+\varepsilon b)\,(u-u_0)+\varepsilon\,(v-v_0)\;a\,.$$

Elles sont donc telles que la distance tangentielle de deux éléments de contact d'une même droite soit conservée. Le groupe ainsi obtenu (qui dépend de deux fonctions de variable réelle) correspond, pour la géométrie des droites, au groupe de la géométrie conforme à deux dimensions pour les points (qui dépend d'une fonction de variable complexe). Mais le groupe *équitangentiel* présente une dégénérescence par rapport au groupe conforme, de même que la métrique ponctuelle de l'espace euclidien (correspondant à *une* droite à l'infini) est dégénérée par rapport à la métrique angulaire (qui correspond à *deux* points cycliques). Dans une géométrie cayleyenne, au contraire, on peut envisager une géométrie conforme et une géométrie équitangentielle, parfaitement corrélatives l'une de l'autre, précisément par rapport à la conique absolue.

Revenant au plan euclidien, on peut dire que tout théorème de géométrie anallagmatique ou conforme *a* un conséquent dans la géométrie de Laguerre ou équitangentielle, la réciproque n'étant pas toujours vraie. *(Continua)*

Topologia e Álgebra

(Continuação do n.º 29)

por **B. Eckmann** (Lausanne e Zürich)

7. Assim se separaram muito claramente as coisas e julga-se, agora, poder abordar as questões com os dois princípios opostos: a *Topologia* e a *Álgebra*, a vizinhança e o cálculo, o transcendente e o algébrico, o contínuo e o discontínuo, (ou «discreto»). Desejar-se-ia, talvez, disputar entre elas a primasia, discutir qual faria aparecer os «fundamentos mais profundos», qual seria mais rica de esclarecimentos ou mais cómoda e assim sucessivamente.

Mas, no mesmo momento, aparecem tambem interdependências. São das mais diferentes espécies. Imediatamente aparecem, e não são as menos interessantes, as que se referem à geometria analítica ordinária onde se traduzem, com o auxílio das coordenadas, simples teoremas do espaço por teoremas da álgebra real — trata-se portanto aqui de topologia e álgebra «concretas». Como exemplo mencionemos o seguinte teorema já demonstrado por Poincaré: Quando sobre a superfície exterior duma esfera é dada uma corrente, portanto um campo de vectores que varia contìnuamente de ponto para ponto, devem sempre aparecer turbilhões, fontes ou outros pontos singulares (descontinuidades) (investigue-se, por exemplo, uma corrente ao longo dos meridianos ou dos paralelos, neste caso, os polos constituem tais descontinuidades). Algèbricamente pode exprimir-se êste teorema, dizendo que certos sistemas de equações com três incógnitas têm soluções reais. Mas só se pode traduzir o teorema, não a demonstração, e de resto não se conhece até hoje uma demonstração puramente algébrica. Assim a topologia resolveu certos problemas da álgebra real que esta mesma ainda não resolveu. Do mesmo modo isto se dá com muitos outros teoremas sôbre campos de vectores e correntes, e as suas consequências, de formulação algébrica, ou não foram ainda algèbricamente demonstradas ou só o foram parcialmente.

8. Estas aplicações não são muito extraordinárias visto que empregam como auxiliares os números reais onde os dois pontos de vista já estão reunidos. Mas há também aplicações da álgebra abstracta à topologia e este é, em geral, o método mais importante para a investigação das propriedades topológicas.

Pensemos, por exemplo, na esfera, na superfície anelar ou superfícies semelhantes. Podemos cobri-las