correspondance entre la géométrie de Laguerre réelle et les transformations projectives d'un cône réel. Les déplacements de l'espace euclidien correspondent, par projection isotrope (un point de l'espace étant centre d'une sphère de rayon nul passant par un cercle du plan) aux transformations de contact du plan qui changent les cercles en cercles et les droites en droites, en conservant la *distance tangentielle* de deux éléments de contact d'une même droite. Il suffit, pour faire correspondre la géométrie de Laguerre aux transformations projectives d'un paramètre dual $u+\varepsilon v$, de paramétrer les droites orientées sous la forme

$$(1-u^2)\,x+2\,uy+v=0\,.$$

Pour que la droite enveloppe un cycle, il faut et suffit que v soit un polynôme du second degré en u.

Les transformations représentées par une fonction de la variable $u+\varepsilon v$

$$f(u+\varepsilon v)=f(u)+\varepsilon f'(u).v=g(u)+\varepsilon\,[h(u)+vg'(u)]$$

(où $h\,,g$ et sa dérivée g' représentent des fonctions ordinaires, alors que f était fonction duale d'une variable duale) admettent au voisinage de chaque droite $u\,,v$ une transformation tangente de la forme:

$$u'-u_0'+\varepsilon\,(v'-v_0')=(a+\varepsilon b)\,(u-u_0)+\varepsilon\,(v-v_0)\;a\,.$$

Elles sont donc telles que la distance tangentielle de deux éléments de contact d'une même droite soit conservée. Le groupe ainsi obtenu (qui dépend de deux fonctions de variable réelle) correspond, pour la géométrie des droites, au groupe de la géométrie conforme à deux dimensions pour les points (qui dépend d'une fonction de variable complexe). Mais le groupe *équitangentiel* présente une dégénérescence par rapport au groupe conforme, de même que la métrique ponctuelle de l'espace euclidien (correspondant à *une* droite à l'infini) est dégénérée par rapport à la métrique angulaire (qui correspond à *deux* points cycliques). Dans une géométrie cayleyenne, au contraire, on peut envisager une géométrie conforme et une géométrie équitangentielle, parfaitement corrélatives l'une de l'autre, précisément par rapport à la conique absolue.

Revenant au plan euclidien, on peut dire que tout théorème de géométrie anallagmatique ou conforme *a* un conséquent dans la géométrie de Laguerre ou équitangentielle, la réciproque n'étant pas toujours vraie. *(Continua)*

Topologia e Álgebra

(Continuação do n.º 29)

por **B. Eckmann** (Lausanne e Zürich)

7. Assim se separaram muito claramente as coisas e julga-se, agora, poder abordar as questões com os dois princípios opostos: a *Topologia* e a *Álgebra*, a vizinhança e o cálculo, o transcendente e o algébrico, o contínuo e o discontínuo, (ou «discreto»). Desejar-se-ia, talvez, disputar entre elas a primasia, discutir qual faria aparecer os «fundamentos mais profundos», qual seria mais rica de esclarecimentos ou mais cómoda e assim sucessivamente.

Mas, no mesmo momento, aparecem tambem interdependências. São das mais diferentes espécies. Imediatamente aparecem, e não são as menos interessantes, as que se referem à geometria analítica ordinária onde se traduzem, com o auxílio das coordenadas, simples teoremas do espaço por teoremas da álgebra real — trata-se portanto aqui de topologia e álgebra «concretas». Como exemplo mencionemos o seguinte teorema já demonstrado por Poincaré: Quando sobre a superfície exterior duma esfera é dada uma corrente, portanto um campo de vectores que varia contìnuamente de ponto para ponto, devem sempre aparecer turbilhões, fontes ou outros pontos singulares (descontinuidades) (investigue-se, por exemplo, uma corrente ao longo dos meridianos ou dos paralelos, neste caso, os polos constituem tais descontinuidades). Algèbricamente pode exprimir-se êste teorema, dizendo que certos sistemas de equações com três incógnitas têm soluções reais. Mas só se pode traduzir o teorema, não a demonstração, e de resto não se conhece até hoje uma demonstração puramente algébrica. Assim a topologia resolveu certos problemas da álgebra real que esta mesma ainda não resolveu. Do mesmo modo isto se dá com muitos outros teoremas sôbre campos de vectores e correntes, e as suas consequências, de formulação algébrica, ou não foram ainda algèbricamente demonstradas ou só o foram parcialmente.

8. Estas aplicações não são muito extraordinárias visto que empregam como auxiliares os números reais onde os dois pontos de vista já estão reunidos. Mas há também aplicações da álgebra abstracta à topologia e este é, em geral, o método mais importante para a investigação das propriedades topológicas.

Pensemos, por exemplo, na esfera, na superfície anelar ou superfícies semelhantes. Podemos cobri-las com uma rêde de triângulos; estes triângulos são limitados por linhas curvas, mas que podem ser deformadas em linhas rectas. Esta rêde de triângulos é uma espécie de esqueleto da superfície e, grosso modo, substitui-a. Podemos agora — isto assenta na essencia do contínuo — subdividir cada triângulo tão finamente quanto se queira, segundo uma lei prescrita, e, assim, cada ponto fica exactamente envolvido. Porém este refinamento, através do qual a superfície é aproximada de cada vez com mais precisão, está já completamente fixado pela rêde original, isto é, as propriedades da superfície devem já estar contidas nesta rêde, nas ligações dos vértices nos triângulos; só é necessário conhecer quais os 3 pontos que constituem cada triângulo e quais os triângulos que têm lados (ou parte) comuns. A investigação leva assim a combinar objectos discretos em número finito e aplica-se aqui, com vantagem, o formalismo da álgebra abstracta; esta *topologia combinatória ou algébrica* (cfr. [2], [4]) é precisamente um ramo da álgebra pura e aqui não se fala, de modo algum, em contínuo. Que é possível por outro lado investigar assim propriedades geométricas, isso apoia-se num facto tão notável, como importante, que fornece a ligação com o contínuo: podem encontrar-se «invariantes topológicos» em esquemas combinatórios, isto é, podem encontrar-se grandezas algébricas que só dependem do comportamento topológico da imagem geométrica em questão, mas não dependem da forma, grandeza, etc, em particular não dependem do esqueleto especial de vértices no qual se move a topologia algébrica. Por exemplo se: o número de vértices — o número de arestas + o número de faces tem um determinado valor para uma triangulação duma superfície fechada, esse valor é o mesmo para cada triangulação dessa superfície e também para qualquer triangulação doutra superfície do mesmo tipo topológico; para a esfera aquele valor é 2 — é o teorema de Euler dos poliedros — e para as superfícies do tipo da superfície anelar aquele valor é 0.

Em especial, a teoria da triangulação, de que falamos acima, é completamente interpenetrada pelos métodos algébricos, enquanto que na teoria das deformações (redução duma curva a um ponto, etc.) há outros princípios de primordial importância. Tudo o que mencionei de proposições sobre superfícies — triangulação, campo de vectores, etc. — ou sobre curvas no espaço, demonstra-se melhor com estes métodos algébricos; e ainda mais: podem-se «calcular» directamente propriedades geométricas a partir do número de vértices, arestas, triângulos, etc, e suas relações, e o método pode-se aplicar não só às figuras do nosso espaço e às da sua generalização a um número maior de dimensões, mas também, depois de investigações mais recentes, a muitos espaços abstractos, mais gerais. Pelo contrário, não se conseguiu ainda caracterizar a estrutura geométrica pela algébrica, isto é, substituí-la; são só propriedades singulares duma figura geométrica, que se podem determinar daquela maneira, e sob este ponto de vista há ainda muitos problemas sem solução.

9. Assim se evidencia em múltiplas aplicações, um certo parentesco entre os nossas dois esquemas aparentemente diferentes, álgebra e topologia. Esse parentesco sobressai com especial relevo na *síntese* das duas: Consideram-se sistemas que possuam, ao mesmo tempo, uma estrutura algébrica e uma topológica (isto é, conjuntos de elementos com os quais se pode calcular e que ao mesmo tempo constituem pontos dum espaço de vizinhanças).

O exemplo com que quero procurar indicar as linhas particulares desta síntese é a teoria dos «grupos topológicos comutativos» tal como ela foi, desenvolvida há poucos anos por Pontryagin [5] — não porque ela seja o único exemplo, mas porque é particularmente simples e clara e de interesse fundamental sob muitos pontos de vista. Permito-me, em primeiro lugar esboçar em breves palavras algumas idéias e resultados desta teoria.

A circunferência possui não só propriedades topológicas mas também algébricas. É uma variedade contínua e ao mesmo tempo um grupo: a cada ponto corresponde um ângulo (desde que escolhamos um ponto inicial) e os ângulos podem adicionar-se de modo que as suas somas dependam contìnuamente das parcelas. Diz-se, neste caso, que é um *grupo topológico* e, precisamente, um grupo fechado, ao contrário, por exemplo, da recta numérica que é aberta. Um outro exemplo dum grupo topológico fechado é a superfície anelar.

Tomemos agora uma segunda circunferência auxiliar e faça-se corresponder a cada ângulo da primeira circunferência um ângulo duplo na segunda; portanto, quando um ponto percorre completamente, uma vez, a primeira circunferência, o ponto correspondente na segunda circunferência percorre-a completamente duas vezes — do mesmo modo como o ponteiro das horas executa duas vezes a volta ao mostrador enquanto o Sol percorre uma vez a sua órbita. A uma tal correspondência, que não prejudica nem as relações de continuidade nem as operações de grupo, chama-se um *carácter* do grupo topológico.

Obtém-se um outro carácter da circunferência quando em lugar do ângulo duplo se toma o ângulo triplo (ou o quádruplo, etc.), ou ainda quando se faz corresponder a cada ângulo o negativo (igual e de sentido contrário) ou o duplo, ou o triplo negativos, etc. Pode também tomar-se o ângulo nulo, isto é, fazer corresponder a cada ângulo o ângulo *0*. Dêste modo se obtêm todos os caracteres da circunferência. O facto de não existir nenhum outro está ìntimamente ligado àquela propriedade da circunferência que eu mencionei, no início desta exposição como segundo exemplo.

Cada carácter da circunferência é, portanto, dado por um número inteiro, $0, 1, 2, \cdots$; o conjunto dos caracteres constitui, pois, qualquer coisa que é discreta (não contínua), o exemplo padrão da álgebra pura: o grupo dos números inteiros.

Este princípio de transporte que aqui indiquei para o caso da circunferência pode também aplicar-se a qualquer outro grupo topológico (comutativo). Fazem-se corresponder os seus pontos, da mesma maneira, aos de uma circunferência e chama-se a esta correspondência um carácter do grupo; o conjunto dos caracteres do grupo topológico constitui então qualquer coisa puramente algébrica, um grupo que é constituído por um conjunto numerável de elementos isolados, portanto um grupo discreto. Assim, a cada grupo topológico fechado corresponde um *grupo discreto* bem determinado, o seu *grupo de caracteres*.

O resultado principal da teoria diz agora que os grupos contínuo e discreto que assim se correspondem determinam-se completamente um ao outro. Nas propriedades algébricas dos grupos discretos estão contidas todas as propriedades topológicas dos contínuos e recìprocamente. Por exemplo a chamada dimensão do grupo discreto é igual à dimensão do grupo contínuo (indica portanto se ele é uma linha ou uma superfície, etc); o aparecimento de elementos de ordem finita (os que adicionados a si próprios várias vezes dão o zero) nos grupos discretos significa que a figura topológica é constituida por muitos bocados separados; tais relações podem obter-se mesmo relativamente a propriedades mais especiais das vizinhanças.

Assim se sobrepõem elegantemente (e se apresentam de certo modo como idênticas, mas formuladas em linguagem diferente) as duas noções fundamentais — cálculo e espaço.

¿Poder-se-á dizer qualquer coisa semelhante quando, em lugar de grupos topológicos fechados, se consideram grupos topológicos abertos, como por exemplo, a recta numérica? Aqui as coisas passam-se doutra maneira. De facto constroem-se, também neste caso, os caracteres do grupo, mas estes constituem, agora, qualquer coisa de contínuo: outra vez um grupo topológico aberto. De facto também aqui sucede que este grupo determina completamente o dado, e que propriedades topológicas passam a algébricas mas isto não se pode compreender da mesma forma pura, tal como anteriormente, visto que, simultâneamente, as propriedades algébricas passam a topológicas. As coisas passam-se um pouco como num parque simètricamente construido; é difícil dizer em que parte nos encontramos precisamente.

10. Tudo isto encontra expressão (bem conhecida do matemático e do especialista das ciências naturais) na *Análise harmónica*. Aí consideram-se, quando nos limitamos novamente ao exemplo mais simples dum grupo topológico, a circunferência, funções sobre a circunferência, isto é, do ângulo, portanto funções periódicas ou oscilações e estas decompõem-se em oscilações harmónicas (o tom fundamental e o tom superior, que são funções particularmente simples do ângulo, do duplo, do triplo ângulo, etc, não são mais que caracteres). Os números que indicam com que pesos são representadas cada uma das oscilações harmónicas, os «coeficientes de Fourrier», substituem completamente a função, como se sabe; substitue-se qnalquer coisa contínua, a função, por uma sucessão discreta de números. Pelo contrário, deve-se, nas funções não periódicas ordinárias — isto é, funções sobre a recta numérica — tomar um espectro contínuo de frequências, quando se quizer decompô-las em oscilações harmónicas (em lugar da série de Fourrier tem-se o integral de Fourrier). As coisas passam-se semelhantemente em todos os grupos topológicos (comutativos); estes constituem, juntamente com os seus grupos de caracteres, o próprio substractum da análise harmónica [6]. Note-se quão pouco necessitou a introdução desta noção de grupo topológico que resultou das duas operações estruturalmente constituintes escolhidas entre muitas possibilidades: a algébrica (adição) e a topológica (noção de vizinhança, onde basta tomar o princípio de que cada conjunto infinito de pontos contém numa sua vizinhança um ponto de acumulação).

Em geral — não se espantem com o tom paradoxal da expressão — tem-se nesta síntese completa, aquilo a que se chama análise. Portanto quando se abstrai dos grupos topológicos fechados restam essencialmente, entre os abertos, só os espaços vectoriais, portanto a geometria analítica ordinária. E quando além da adição no grupo se considera ainda a multiplicação (corpos), então há, como única possibilidade de tais corpos topológicos os números «ordinários» da análise, isto é, os númeras reais, os números imaginários o os quaterniões, o que constitue um interessante teorema de Pontryagin [5], que projecta nova luz sobre questões importantes da axiomática.

11. O confronto entre a topologia e a álgebra abstracta levou-nos a resultados de valor notável e revelou-nos singulares relações entre as duas. Tendo origem em necessidades intuitivas e formais diferentes, as duas maneiras de pensar têm funções diversas e são a expressão dos dois caminhos tão diferentes o do raciocínio e o da intuição; completam-se e apoiam-se mùtuamente da melhor maneira. Porém a diferença

entre elas é apenas aparente; a sua síntese não só dá um todo fechado, mas a possibilidade da passagem duma à outra. Em conjunto, há pròpriamente, só uma questão do ponto de vista, o de determinar se uma propriedade fica melhor num ou no outro lado; uma visão artificial do todo, permite, casualmente, que um sobressaia mais que o outro.

Sem querer é-se, aqui, levado a pensar num fenómeno semelhante na física: a luz e também a matéria apresentam-se muitas vezes quer com a natureza das ondas quer com a dos corpúsculos (partículas); a teoria moderna dos quanta conseguiu encontrar uma formulação que reune as duas formas de apresentação, melhor, que assenta sobre as duas (para isso renuncia-se contudo à intuição). Que se observe uma vez o comportamento duma, outra vez da outra, isso só a experiência determinará. É portanto uma visão artificial que prefere, e manifesta, duma vez a natureza das ondas, doutra vez a dos corpúsculos. A analogia com o nosso dualismo espaço-número falhou; talvez não seja mais do que uma simples analogia.

Seria fàcil apresentar casos semelhante em exemplos da vida diária, onde segundo o ponto de vista, se pode considerar um facto sob dois aspectos completamente diferentes — mas então quási sempre as coisas não se passam tão simplesmente como na matemática.

Que espaço e número estejam tão intimamente ligados nas suas propriedades elementares, como tenho procurado mostrar ràpidamente é, decerto, extraordinário. Há, na matemática e nas ciências da natureza, ainda muitos outros exemplos desta espécie em que duas coisas aparentemente diferentes se apresentam, contra o que se espera, como de igual valor, permutáveis entre si. E isto não parece ser por acaso. Talvez possa então formular: Para nos aproximarmos do nosso mundo construimos diferentes figuras, esquemas — diferentes na origem, com diferentes meios e para diferentes fins — e quando, apesar disto, resultam iguais, ou de igual valor, então é evidente que o construtor é culpado de ter utilizado o mesmo espírito matemático para tudo; e é ele mais o responsável do que o exemplo especial em que se apoia. As relações têm validade mais geral do que os objectos nos quais elas se manifestam.

Certamente existem e sempre se mantêm os problemas singulares, especiais, concretos, do domínio do trabalho próprio do matemático; e ele consagrará toda a sua energia na execução desse trabalho. Mas esforçar-se-à, depois disto, por resolvê-los com o mínimo de cálculo automático e com o máximo de idéias claras. E, quando assim, procura a generalidade e não teme a máxima abstracção, não se afasta da realidade; pelo contrário, encontra sempre, outra vez, relações e leis que são comuns a todas as nossas maneiras de pensar e encarar o mundo e das quais, evidentemente não pode fugir.

LITERATURA

Correspondendo ao caracter da conferência, a nossa exposição é um apontamento geral, que contém também formulações de teoremas e resultados. Para as formulações, fundamentações completas, assim como para a exposição de pormenores, enviamos o leitor para as obras seguintes:

1 D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig und Berlin 1913)

2 H. Seifert und W. Threlfall: *Lehrbuch der Topologie* (Leipzig und Berlin 1935).

3 H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig und Berlin 1913)

4 P. Alexandroff und Hopf, *Topologie I* (Berlin 1935), em especial Parte II.

5 L. Pontryagin, *Topological groups* (Princeton 1939) Cap. V.

6 A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (Paris 1940), Cap. VI.

(tradução de Maria Pilar Ribeiro)

PEDAGOGIA

SOBRE A CORRELAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA E A FÍSICA NO ENSINO LICEAL

por *Rómulo de Carvalho*

É evidente que entre as várias partes do mesmo programa geral do ensino deve existir a necessária harmonia para que todas se equilibrem ao mesmo nível quando se referem à mesma fase do desenvolvimento mental dos alunos. Cada informação dada em cada disciplina deve ter o seu momento pedagógico apropriado e, postas ao lado umas das outras, as várias disciplinas do mesmo ano devem seguir paralelamente na sequência regular desses momentos. Sucede ainda que algumas disciplinas se penetram profundamente e, para estas, com muito maior razão, é necessário atender ao paralelismo dos seus programas parciais. Dá-se isto claramente entre a Matemática e as outras Ciências que a ela recorrem constantemente como acontece com a Física. Seria inconcebível, por exemplo, que um aluno estudasse a lei da queda dos graves, que tivesse de traduzi-la em termos matemáticos e, entretanto, só no ano seguinte estudasse, na disci-