PONTOS DE EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

F. C. L. — Exame de Aptidão — **Outubro de 1946**

2343 — Determine as condições a que deve satisfazer o parâmetro m para que a inequação $m+1-3m^2-2mx-x^2<0$ seja verificada por todo e qualquer valor real atribuido a x. R: *A inequação proposta é equivalente à seguinte* $x^2+2mx+3m^2-m-1>0$, *e terá por isso que ser* $2m^2-m-1>0$, *quer dizer*, $m<-1/2$ *ou* $m>1$, visto serem $-1/2$ *e* 1 *os zeros do primeiro membro desta última desigualdade.*

2344 — Indique as condições a que devem satisfazer os coeficientes da equação $ax^2+bx+c=0$ para que ela tenha: 1) uma raiz nula; 2) duas raízes nulas; 3) uma raiz infinita; 4) duas raízes infinitas. R: 1) $c=0$, $a\neq 0$; 2) $c=0$, $b=0$, $a\neq 0$; 3) $a=0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$; 4) $a=0$, $b=0$, $c\neq 0$.

2345 — Determine os valores de k para os quais são iguais os radicais $\sqrt[k]{a^3}$ e $\sqrt[27]{a^k}$. R: *Terá que ser* $3/k=k/27$ *ou seja* $k^2=81$, *donde* $k=\pm 9$.

2346 — Dados um cateto e a área dum triângulo rectângulo, deduza, em função dos dados, as fórmulas que exprimem os comprimentos dos lados desconhecidos do triângulo e os seus ângulos. R: *Seja* A *a área e* b *o cateto dados. O outro cateto* c *é dado pela expressão* $c=2A:b$ *e a hipotenura* a *por* $a=\sqrt{(4A^2+b^4):b^2}$. *A tangente do ângulo* B *oposto ao cateto* b *é dado por* $\operatorname{tg} B=b^2/2A$ *e* $\widehat{C}=90^\circ-B$.

2347 — Verifique a identidade $\sec(a+b)\cdot\sec(a-b)=1:(\cos^2 a-\cos^2 b)$. R: *A identidade proposta é equivalente a* $\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)=\cos^2 a-\cos^2 b$. *Como* $\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)=\cos^2 a\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b=\cos^2 a(1-\operatorname{sen}^2 b)-\operatorname{sen}^2 a(1-\cos^2 b)=\cos^2 a-\cos^2 b$, *fica verificada a identidade proposta.*

2348 — Calcule sem recorrer às táboas $\operatorname{cosec} 16\pi/3$. R: *Como é* $16\pi/3=5\pi+\pi/3$ *e* $\operatorname{sen}(5\pi+\pi/3)=\operatorname{sen}(\pi+\pi/3)=-\operatorname{sen}\pi/3=-\sqrt{3}/2$, *será*

$$\operatorname{cosec} 16\pi/3=-2\sqrt{3}/3$$

2349 — Deduza o valor da razão entre a área duma esfera e a àrea total dum cilindro equilatero nela inscrito. R: *O cilindro equilátero inscrito na esfera tem por medida da geratriz, que é igual ao diâmetro da base,* $R\sqrt{2}$, *se for* R *a medida de raio da esfera; então a área total do cilindro é dada por*

$$\pi R\sqrt{2}\,(R\sqrt{2}+R\sqrt{2}:2)=3\pi R^2:$$

A razão pedida será por isso $4\pi R^2:(3\pi R_2:2)=8:3$.

2350 — Considere uma circunferência e nela um diâmetro MN, e uma corda MP; e seja Q a extremidade da corda que se dirige segundo a bissectriz do ângulo NMP. Prove que a tangente à circunferência no ponto Q é perpendicular à recta a que pertence a corda MP. R: *O ângulo* $N\widehat{P}M$ *é recto pois está inscrito num arco de* 180°. *Sendo* Q *o ponto médio do arco* $\widehat{NP}$ *a tangente em* Q *é paralela à corda* NP, *pois ambas são perpendiculares ao raio* OQ, *se for* O *o centro da circunferência. Assim a tangente é perpendicular à recta a que pertence a corda* MP.

2351 — Indique quais os números inteiros que pode somar simultâneamente aos dois termos da fracção $15/35$ sem lhe alterar o valor. R: *Os inteiros da forma* $3m$ *e* $7m$ *onde* m *é um inteiro qualquer.*

Solu,ões dos n.os 2343 a 2351 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — **1.° exame de frequência — 1945-46.**

2352 — Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{n+1}{n}\log n}$.

R: *O teorema de Cauchy* $\lim\sqrt[n]{\varphi(n)}=\lim\varphi(n+1)/\varphi(n)$ $(n\to\infty)$, *conduz ao valor* $L=1$.

2353 — Determinar o intervalo de convergência da série de termo geral $u_n=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^n$. R: *Trata-se duma série geométrica. É convergente para* $|x/(x-1)|<1$, *ou seja* $x<1/2$.

2354 — Determine os limites laterais de $y=\operatorname{arctg} 1/I(x)$ para $x=1$.

R: $y(1+0)=\pi/4$ *e* $y(1-0)=\pi/2$.

2355 — Calcular as derivadas das funções

a) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x(3k^2-x^2)}{k(k^2-3x^2)}$; *b)* $y=\log\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$.

R: *a)* $y'=3k/(k^2+x^2)$; *b)* $y'=\sec x/2$.

Soluções dos n.os 2350 a 2351 de L. Mendonça de Albuquerque.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Fevereiro de 1947

2356 — Derive a função

$$y=\arc\cos\sqrt{\frac{a^{\operatorname{sen}\alpha x}}{ch\,\alpha x}}\qquad(a,\alpha\ \text{const}\,;\ \alpha>0)\,.$$

2357 — Calcule a derivada de 3.ª ordem, para $x=-2$, da função $y=(x+2)^3\,e^{tg^2x+\log|\operatorname{sen}x|}$.
R: $y=uv$ *com* $u=(x+2)^3$ $v=e^{tg^2x+\log|\operatorname{sen}x|}$ $y'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''$ *pela fórmula de Leibniz. Para* $x=-2$, $u=u'=u''=0$, $u'''=6$. *Logo* $(y''')_{x=-2}=6e^{tg^2(-2)+\log|\operatorname{sen}(-2)|}$.

2358 — Considere o rectângulo limitado pelas rectas de equações: $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ e considere o ponto $P(\alpha,\beta)$. Ache a equação do lugar geométrico dos pontos tais que a soma dos quadrados das suas distâncias aos vértices do rectângulo é constante e tem o valor que assume no ponto P. Classifique o lugar e considere os casos particulares que porventura se possam apresentar. R: *Os vértices do rectângulo são os pontos* $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b), $(0,b)$. *Donde a equação do lugar:* $x^2+y^2+(x-a)^2+y^2+(x-a)^2+(y-b)^2+x^2+(y-b)^2=\alpha^2+\beta^2+(\alpha-a)^2+\beta^2+(\alpha-a)^2+(\beta-b)^2+\alpha^2+(\beta-b)^2$; $x^2+y^2-ax-by=\alpha^2+\beta^2-a\alpha-b\beta$: *donde:* $(x-a/2)^2+(y-b/2)^2=(\alpha-a/2)^2+(\beta-b/2)^2$. *O lugar é uma circunferência de centro situado no centro do rectângulo e de raio igual a* $\sqrt{(\alpha-a/2)^2+(\beta-b/2)^2}$. *O único caso particular digno de menção é* P *ser o centro do rectângulo; a circunferência degenera então num ponto.*

2359 — Ache as equações cartesianas das superfícies cujas equações em coordenadas esféricas (polares do espaço) são $\rho=4$, $\varphi=\operatorname{arc\,tg}-2/3$, $|\theta|=\pi/4$ (nas condições usuais de transformação). Determine as coordenadas cartesianas de todos os pontos comuns às 3 superfícies. R: *A 1.ª superfície é uma superfície esférica de centro na origem dos eixos coordenados e de raio* 4*; a sua equação cartesiana é:* $x^2+y^2+z^2=16$. *A 2.ª superfície é um plano passando pelo eixo dos* zz *que forma um ângulo* $\operatorname{arc\,tg}-2/3$ *com o eixo dos* xx*; sua equação cartesiana é:* $-3/2=x/y$ *ou* $2x+3y=0$. *A 3.ª superfície é uma superfície cónica de revolução de vértice na origem dos eixos coordenados, de eixo coincidente com o eixo dos* zz *e de semiabertura igual a* 45°*; sua equação cartesiana é:* $\pm\sqrt{x^2+y^2}/z=1$ *ou* $x^2+y^2-z^2=0$. *Acham-se os pontos comuns resolvendo o sistema de* 3 *equações a* 3 *incógnitas:* $x^2+y^2+z^2=16$, $2x+3y=0$, $x^2+y^2-z^2=0$ *ou, mais simplesmente, do modo seguinte:* $x=4\,.\,\sqrt{2}/2\,.\,(\pm\sqrt{2}/13)$, $y=4\,.\,\sqrt{2}/2\,.\,(\mp\sqrt{4/13})$, $z=4\,.\,(\pm\sqrt{2}/2)$ *escolhendo convenientemente os sinais. Correspondem* 4 *pontos de intersecção.*

Soluções dos n.ºs 2356 a 2359 de Peter T. Braumann.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 1.º exame de frequência — 8-3-946.

2360 — Resolver a equação:

$$(z^2+i)^3+i=0\,,\ \left[i=+\sqrt{-1}\right].$$

R: *A equação proposta é equivalente a* $(z^2+i)^3=-i$ *ou* $z^2+i=\sqrt[3]{-i}$ *donde resultam as três equações* $z^2+i=i$, $z^2+i=-\sqrt{3}/2-i/2$ *e* $z^2+i=\sqrt{3}/2-i/2$ *cada uma das quais dá dois valores para* z.

2361 — Discutir o sistema

$$\begin{cases} ax-by=0\\ ay-bz=0\\ az-bx=0\\ x+y+z=1\end{cases}$$

no qual a e b são parâmetros reais arbitrários. R: *O determinante de 3.ª ordem formado pelos coeficientes das incógnitas da 1.ª, 2.ª e 4.ª equações é sempre não nulo para todos os valores reais de* a *e* b *não nulos; o único característico formável é igual a* b^3-a^3, *logo para* $a=b$ *o sistema é compatível e determinado e para* $a\neq b$ *é incompatível. Geomètricamente: se* $a=b$ *os 4 planos tem um ponto comum pois os três primeiros constituem um feixe e o último corta a recta de intersecção; se* $a\neq b$ *os três primeiros têm apenas como ponto comum a origem e o último não passa por lá.*

2362 — Diga de quantas maneiras distintas pode distribuir 20 volumes numa estante com 4 prateleiras colocando 5 volumes em cada uma. Examine as hipóteses que correspondem a considerar, ou não, a ordem dos volumes em cada prateleira. R: *Interessando a ordem:* $A_{20,5}\cdot A_{15,5}\cdot A_{10,5}\cdot A_{5,5}=20!$ *Não interessando:* $C_{20,5}\cdot C_{15,5}\cdot C_{10,5}\cdot C_{5,5}=\dfrac{20!}{5!\,4}$.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 1.º Exame de frequência — 15-3-946

2363 — Dado o complexo $z=\dfrac{1}{2+\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta}$ determinar θ de modo que o seu afixo esteja sobre a recta $y=x/2$. R: *Multiplicando ambos os termos de* z *pelo conjugado do denominador vem* $z=\dfrac{2+\cos\theta}{5+4\cos\theta}-i\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{5+4\cos\theta}$ *e para que* z *satisfaça ao enunciado deve ser* $-\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{2+\cos\theta}=\dfrac{1}{2}$, *donde se tira* $\theta=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ *e* $\theta=\operatorname{arctg}3/4$.

2364 — Dada a equação: $x^4+\lambda x^2-3x-1=0$ determinar λ de modo que a soma dos quadrados das suas raízes seja igual a -6 $[\sum\alpha^2=(\sum\alpha)^2-2\sum\alpha\beta]$. Deduzir daí que a equação tem 3 raízes complexas e 2 reais e determinar estas com um decimal exacto, pelo menos. R: *Da relação dada no enunciado vem* $-6=-2\lambda$ *ou* $\lambda=3$. *A equação será* $x^4+3x^2-3x-1=0$ *cujas raízes reais são* $+1$ *e* $-0{,}2\ldots$

Soluções dos n.os 2360 a 2364 de J. Marujo Lopes.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 1.º Exercício de revisão — Dezembro de 1946.

2365 — Dados o ponto $P\equiv(2,1)$ e as rectas $r_1\equiv 2x-y+2=0$ e $r_2\equiv x+y+1=0$, determine a equação da recta r_3 tal que o ponto P seja o ortocentro do triângulo definido por r_1, r_2 e r_3. R: *Designando por* h_1 *e* h_2 *as alturas relativas a* r_1 *e* r_2 *respectivamente, tem-se:* $h_1\equiv x+2y-4=0$, $h_2\equiv x-y-1=0$. *Visto* r_3 *ser definida pelos pontos de intersecção de* h_1 *com* r_2 — $(-6,5)$ — *e de* h^2 *com* r_1 — $(-3,-4)$, *vem:* $r_3\equiv 3x+y+13=0$.

2366 — Dada a parábola $\pi\equiv y^2-x=0$, determine a equação cartesiana do lugar geométrico dos pés das perpendiculares baixadas do foco sobre as tangentes a π. R: *A equação geral das tangentes a* π *é* $x=ay-a^2/4$, *equação que pode, por exemplo, determinar-se obrigando a ser coincidentes os pontos de intersecção das linhas representadas pelas equações* $x=ay+b$ *e* $y^2-x=0$. *O ponto genérico do lugar geométrico é o ponto comum a* $x=ay-a^2/4$ *e* $4ax+4y-a=0$; *a equação pedida obtém-se eliminando* a *entre estas duas equações, vindo, portanto,* $x=0$.

2367 — No plano xOy, a cada ponto $R(\alpha,\beta)$, distinto da origem, faz-se corresponder a recta $r\equiv\alpha x+\beta y=1$. Mostre que se R descreve a recta $hx+ky=1$, a projecção P de R sôbre r descreve a circunferência $x^2+y^2-hx-ky=0$ (com exclusão de um ponto). R: *A projecção de* R *sôbre* r *é determinada pela solução do sistema* $\alpha y-\beta x=0$, $\alpha x+\beta y-1$. *Em virtude do enunciado tem-se também* $h\alpha+k\beta=1$. *Eliminando* α *e* β *entre estas três equações obtém-se* $x^2+y^2-hx-ky=0$, *o que prova que* P *percorre a circunferência referida (com exclusão da origem).*

Soluções dos n.os 2365 a 2367 de José Morgado.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — 1.º Exame de frequência, 1945-46.

2368 — Primitivar a função $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x+1}$.

R: *Escrevendo* $Pf(x)=P1.\operatorname{arc\,tg}1/(x+1)$, *o método de primitivação por partes dá*

$$Pf(x)=x\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+1}+P\frac{x}{x^2+2x+2}.$$

E para esta última primitiva o artifício (ou o método de Fubini)

$$P\frac{x}{x^2+2x+2}=\frac{1}{2}P\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-P\frac{1}{x^2+2x+2}$$

dá também

$$P\frac{x}{x^2+2x+2}=\log\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{5}}+C.$$

2369 — Primitivar a função $f(x)=\dfrac{3+\cos x}{1-\operatorname{sen}x}$.

R: *Pode utilizar-se a mudança de variável* $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. *Mas também se calcula fàcilmente a primitiva a partir do artifício* $f(x)=\dfrac{3+\cos x}{1-\operatorname{sen}x}=\dfrac{(3+\cos x)(1+\operatorname{sen}x)}{1-\operatorname{sen}^2x}=$ $=3\sec^2x+3\sec x\operatorname{tg}x+\sec x+\operatorname{tg}.x+c$.

2370 — Verificar que, quaisquer que sejam as funções f e φ, $z=f(xy)-\varphi(y/x)$ satisfaz à condição $y^2t-x^2r=yq-xp$.

2371 — Determinar os pontos da hipérbole $xy=1$ onde se anula a 1.ª derivada direccional da função $f(x,y)=x^2-y^2$, segundo a direcção da tangente. R: *Duas soluções reais*: $A(1,1)$ *e* $B(-1,-1)$.

Soluções dos n.os 2368 a 2371 de L. Mendonça de Albuquerque.

I. S. T. — Cálculo — 1.º exame de frequência — Fevereiro de 1945.

2372 — Sendo a inteiro, calcular (se existir) o integral $\displaystyle\int^{b} x^a\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{b}\,dx$.

2373 — Estudar a convergência do integral

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}\right)^{\cos 2\alpha}d\theta.$$

2374 — Seja $f(x)$ uma função, de variável real, que toma o valor 1 nos pontos de abscissa racional e o valor 3 nos pontos de abscissa irracional. Mostrar: 1.º Que $f(x)$ é integrável, no sentido de Lebesgue, em qualquer intervalo (a,b); 2.º Que não é integrável no sentido de Riemann; 3.º Que não é uma derivada.

2375 — A função $f(x)=1-\cos^3x+\operatorname{sen}^2x$ é infinitésima com x. De que ordem?

GEOMETRIA DESCRITIVA E PROJECTIVA

F. C. C. — 1.º Exame de frequência — 1945-46

2376 — *Geometria de Monge.* São dados: um ponto e duas rectas enviezadas. Conduzir pelo ponto a recta que é perpendicular à primeira e se apoia na segunda. R: *Conduz-se pelo ponto o plano* α *perpendicular à recta dada* r. *O ponto* Q *de intersecção de* α *com* r, *define com o ponto dado,* P, *a recta pedida.*

2377 — *Geometria de Monge.* Rodar o segundo plano bissector de modo que passe a conter o ponto dado. R: *Escolhe-se uma horizontal* h *do plano e ao mesmo tempo assente no plano horizontal* α *que contém o ponto* P, *dado; e rode-se* h *em* α, *tomando para eixo uma recta vertical, até conter* P. *Obriga-se depois o 2.º bissector à rotação assim definida.*

2378 — *Geometria cotada.* São dados: um plano e uma recta horizontal, conduzir por um ponto a recta que é perpendicular à horizontal e paralela ao plano. R: *Conduzem-se pelo ponto os planos:* α, *paralelo ao dado e* β *perpendicular à recta dada. A recta pedida é a intersecção de* α *com* β.

Soluções dos n.os 2376 a 2378 de L. Mendonça de Albuquerque

F. C. P. — Geometria Projectiva — 1.º Exame de frequência — 1945-46.

1.ª Parte

2379 — Demonstrar que dois triângulos ABC e $A'B'C'$, sem elementos comuns, se estiverem referidos entre si de modo que as rectas AA', BB', CC', que unem vértices correspondentes, passem todas por um mesmo ponto, O, então os lados homólogos AB e $A'B'$, AC e $A'C'$, BC e $B'C'$, intersectam-se em pontos L, M e N que pertencem a uma mesma recta s. Considerar separadamente os casos dos triângulos não complanos e dos triângulos complanos.

2380 — Fixe 3 pontos O, U, N, duma mesma recta e considere um sistema de abscissas que tem êstes pontos respectivamente para ponto origem, ponto unidade e ponto neutral. Sejam a, b, c as abscissas nesse sistema de 3 pontos $\overline{O}, \overline{U}, \overline{N}$. Determinar a fórmula de transformação de abscissas do sistema O, U, N, no sistema $\overline{O}, \overline{U}, \overline{N}$. Justificar depois todas as fórmulas empregadas.

2381 — *a*) Justificar a construção de Steiner para a determinação dos elementos comuns a dois feixes de raios sobrepostos. *b*) Defina polo de uma involução de pontos sôbre uma circunferência e demonstre a sua existência. *c*) Defina centro e potência duma involução de pontos duma recta.

2382 — Defina centro, diâmetros conjugados, assíntotas, eixos e focos duma cónica e diga como os determina numa cónica (elipse ou hipérbole) definida por 5 pontos.

2383 — Como resolve o problema de construir uma cónica que passa por um ponto real M e por 4 pontos imaginários definidos por duas involuções elíticas I_a e I_b.

2384 — *a*) Defina os elementos principais duma homologia. *b*) Defina pontos isogonais. *c*) Dada uma homologia pelo seu eixo, centro e por um par de pontos, determinar os elementos principais e os pontos isogonais. Justificar a determinação dêstes últimos.

2385 — Defina polaridade entre dois planos sobrepostos e deduza as suas equações.

2.ª Parte

2386 — Desenhar um triângulo equilátero OMN de 4 cm de lado. Marcar sôbre o lado MN a partir de M um ponto A tal que $\overline{MA}=1$ cm. Considerar a hipérbole que tem por assíntotas as rectas OM e ON e que passam pelo ponto A. Determinar *a*). A tangente à hipérbole no ponto A. *b*) Os focos da hipérbole.

2387 — Desenhar um triângulo equilátero ABC de 4 cm. de lado. Traçar uma recta externa ao triângulo paralela ao lado AB e designá-la por a. Determinar o ponto X de intersecção de AC com a, e o ponto Y de intersecção de BC com a. Marcar sôbre a, $XX'=4$ cm e $YY'=6$ cm tal que se verifique a seqüência $X'YXY'$. Considerar uma cónica que passe pelos pontos A, B e C e pelos pontos duplos da involução definida por (XX') e (YY'). Determinar: *a*) O centro duma homologia de recta limite a que transforma a cónica considerada numa circunferência. *b*) O ponto cujo transformado na homologia anterior seja o centro da circunferência.

Notas: a) Lembrar que uma circunferência é cortada pela recta do infinito nos pontos cíclicos. *b*) Que centro duma cónica é o polo da recta do infinito.

2388 — Desenhar uma circunferência de 3 cm de raio e de centro O e traçar uma recta l que passe pelo seu centro. Tomar em l um ponto M da circunferência e traçar uma recta que passa por M e faça 45° com l. Marcar sôbre ela MA igual a 5 cm e MB igual a 8 cm, verificando-se a seqüência MAB. Tirar por M uma perpendicular p a l. *a*) Determinar mais dois pontos da cónica que passa por A, B, pelo ponto do infinito de p e pelos pontos imaginários definidos pela involução elítica que tem por centro O e elementos correspondentes os pontos M e M' da intersecção de l com a circunferência desenhada. *b*) Classificar a cónica.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 1.º exame de frequência ordinário — 7 de Fevereiro de 1946.

2389 — Considere o sistema formado pelos seguintes vectores deslizantes

$$\begin{cases} A_1\,\mathbf{v}_1=(-1\,,3\,,3)\;(-\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3) \\ A_2\,\mathbf{v}_2=(0\,,-3\,,4)\;(4\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3) \\ A_3\,\mathbf{v}_3=(-6\,,1\,,2)\;(-3\mathbf{e}_1) \\ A_4\,\mathbf{v}_4=(0\,,3\,,0)\;(-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)\,. \end{cases}$$

Determine as coordenadas vectoriais deste torsor em relação ao ponto $C\,(0\,,1\,,2)$. Calcule o automomento e o momento mínimo. Ache os momentos do torsor em relação aos eixos coordenados. Efectue a sua redução canónica. Escreva a equação vectorial do eixo central. R: *As coordenadas vectoriais do torsor dado, em relação a* C, *são:* $\mathbf{v}=-4\mathbf{e}_1+5\mathbf{e}_2$ *(vector principal) e* $\overline{\mu}_c=0$ *(momento resultante). O automomento e o momento mínimo são nulos. O momento em relação à origem* O *das coordenadas é* $\overline{\mu}_0=\overline{\mu}_c+\mathbf{v}\wedge(\mathrm{O}-\mathrm{C})=-10\,\mathbf{e}_1-8\,\mathbf{e}_2+4\,\mathbf{e}_3$; *logo, os momentos em relação aos eixos coordenados* Ox_1, Ox_2 *e* Ox_3 *valem, respectivamente,* -10, -8 *e* 4. *O torsor reduz-se canònicamente ao vector deslizante* $\mathrm{C}\mathbf{v}$; *portanto, a equação vectorial do eixo central, suporte de* $\mathrm{C}\mathbf{v}$, *pode escrever-se* $\mathrm{Q}=\mathbf{c}+\mathrm{x}\mathbf{v}$, *ou seja,* $\mathrm{Q}=\mathrm{O}-4\mathrm{x}\,\mathbf{e}_1+(1+5\mathrm{x})\,\mathbf{e}_2+2\mathbf{e}_3$, *onde* x *designa o parâmetro.*

2390 — Demonstre que a derivada do versor de $\mathbf{v}$ é dada por

$$(\mathrm{vers}\,\mathbf{v})'=\frac{\mathbf{v}\wedge(\mathbf{v}'\wedge\mathbf{v})}{v^3}\,.$$

R: *De* $\mathrm{vers}\,\mathbf{v}=\dfrac{1}{\mathrm{v}}\cdot\mathbf{v}$, *deduz-se*

$$(\mathrm{vers}\,\mathbf{v})'=-\frac{1}{\mathrm{v}^2}\cdot\frac{\mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}'}{\mathrm{v}}\cdot\mathbf{v}+\frac{1}{\mathrm{v}}\cdot\mathbf{v}'=-\frac{(\mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}')\,\mathbf{v}}{\mathrm{v}^3}+$$

$$+\frac{1}{\mathrm{v}}\cdot\mathbf{v}'=\frac{\mathrm{v}^2\,\mathbf{v}'-(\mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}')\,\mathbf{v}}{\mathrm{v}^3}=\frac{\mathbf{v}\wedge(\mathbf{v}'\wedge\mathbf{v})}{\mathrm{v}^3}\,.$$

2391 — A equação do movimento de P é

$$P=O+2\cos 3t\cdot\mathbf{i}+3\,\mathrm{sen}\,3t\cdot\mathbf{j}\,.$$

Ache a equação cartesiana da trajectória e indique a sua natureza geométrica. Determine os vectores velocidade e aceleração iniciais. R: *A trajectória é a elipse de equação* $\mathrm{x}^2/4+\mathrm{y}^2/9=1$. *A velocidade inicial vale* $\mathrm{P}'(0)=9\,\mathbf{j}$ *e a aceleração inicial,* $\mathrm{P}''(0)=-18\,\mathbf{i}$.

2392 — P e Q têm por trajectória uma circunferência de raio r. Os dois pontos móveis partem simultâneamente de A, em sentidos contrários, com a velocidade V_0. O movimento de P é uniformemente acelerado de aceleração tangencial $x>0$. A componente tangencial da aceleração de Q é também x. P e Q sobrepõem-se, pela primeira vez, precisamente no ponto em que Q inverte o sentido da marcha. Quanto vale x? R: $\mathrm{x}=\dfrac{\mathrm{V}_0^2}{\pi\mathrm{r}}$.

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 1.º exame de frequência extraordinário — 28 de Março de 1946.

2393 — Sabendo que $m=(x^2+y^2)/2$ é a função potencial do campo $(\mathbf{v})$, 1) determine a natureza geométrica das superfícies equipotenciais e das linhas do campo; 2) calcule a circulação do vector $\mathbf{v}$ desde o ponto $A\,(2\,,-4\,,0)$ até à origem O das coordenadas. R: 1) *As superfícies equipotenciais são superfícies cilíndricas de revolução em tôrno de* Oz; *as linhas do campo são rectas paralelas a* Oxy *e concorrentes com* Oz. 2) *A circulação pedida vale* $\mathrm{dW}=10$.

2394 — Entre as coordenadas cartesianas rectangulares (X, Y, Z) do vector $\mathbf{v}$ e as do ponto $P\,(x,y,z)$ existem as relações $X=y-z$, $Y=-x$, $Z=x$. Demonstre que a função $\mathbf{v}=\mathbf{v}(P)$ define um campo de momentos. R: *Designando por* $\mathbf{v}_P$ *e* $\mathbf{v}_{P_1}$ *os valores do campo nos pontos* P *e* P_1, *respectivamente, verifica-se fàcilmente que se tem* $\mathbf{v}_\mathrm{P}\,|\,(\mathrm{P}-\mathrm{P}_1)=\mathbf{v}_{\mathrm{P}_1}\,|\,(\mathrm{P}-\mathrm{P}_1)$. *Dêste modo, o campo goza da propriedade projectiva; logo, é um campo de momentos.*

2395 — Demonstre o seguinte teorema: «para que o movimento de P seja rectilíneo é necessário que o vector $P'\wedge P''$ seja identicamente nulo; se P' nunca se anular, a condição anterior é também suficiente».

2396 — Um ponto está animado de movimento rectilíneo uniformemente variado de aceleração igual a $8\,\mathrm{m/s^2}$. Para $t=3$ seg. a velocidade é nula. O ponto passa pela origem dos espaços no instante $t=11$ seg. Qual é a equação horária do movimento?
R: $s=-220-24\,\mathrm{t}+4\mathrm{t}^2$ (U. m.).