

## PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matematica». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

## PROBLEMAS PROPOSTOS

**2397** — Se os números complexos  $z_1, z_2, z_3$  e  $z_4$  são tais que  $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_4| = |z_4 - z_1|$ , então  $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$  e  $(z_1 - z_3)/(z_2 - z_4)$  é um imaginário puro.

**2398** — Mostre que é igual a 1 o determinante  $|a_j^i|$ ,

( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), assim definido:  $a_j^i = a_j^i = 1$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) e  $a_j^i = a_j^{i-1} + a_j^{i-2}$ , ( $i, j = 2, 3, \dots, n$ ).

**2399** — Mostre que  $\sum_{p=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n} (n!)^{p-1/n} = \left(\frac{e-1}{e}\right)^2$ .

Problemas n.ºs 2397 a 2399 propostos por José Morgado J.ºr.

## SOLUÇÕES RECEBIDAS

**2338** — Se os comprimentos dos lados  $a, b$  e  $c$  de um triângulo plano estão em progressão aritmética, os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  (opostos respectivamente a  $a$  e  $b$ ) satisfazem à relação  $\cos \hat{A} + \sin \hat{A} \cotg \hat{B}/2 = 2$ . R: Seja  $P$  o ponto de intersecção da bissectriz de  $\hat{B}$  com  $b$ . Do triângulo  $[ABP]$  tira-se  $c = AP \cos \hat{A} + BP \cos \hat{B}/2$  ou  $\cos A + (BP/AP) \cos \hat{B}/2 = c/AP$ . Por outro lado é  $BP/AP = (\sin \hat{A})/(\sin \hat{B}/2)$  e  $c/AP = a/CP = (c+a)/AC$ . Logo,  $\cos \hat{A} + \sin \hat{A} \cotg \hat{B}/2 = (c+a)/b = (2a+2r)/(a+r) = 2$ , c. q. d.

**2342** — Determinar todos os pares de inteiros cujo produto é igual ao quádruplo da sua soma. R: Sejam  $x$  e  $y$  os dois inteiros; segundo o enunciado, é  $xy = 4(x+y)$  ou  $(x/4) \cdot y = x+y$ . Será  $x = 4k$  ( $k$  inteiro) e, consequentemente,  $y = 4k/(k-1)$ , quer dizer,  $k-1$  divide 4, pois não divide  $k$  e  $y$  é inteiro. Então  $k = -3, -1, 0, 2, 3, 5$  e os pares de inteiros correspondentes são:  $-12$  e  $3$ ;  $-4$  e  $2$ ;  $0$  e  $0$ ;  $8$  e  $8$ ;  $12$  e  $6$ ;  $20$  e  $5$ .

Soluções n.ºs 2338 e 2342 de José Machado Gil (Barquinha).

## BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

**57** — FRICK, Bertha M. — **The first Portuguese Arithmetic**. Separata do Vol. XI, 1945 de Scripta Mathematica.

Em separata do Vol. XI, 1945, de Scripta Mathematica, publicou Bertha M. Frick, uma desenvolvida notícia sobre a Primeira Aritmética Portuguesa, notícia, a que foi levada pelo conhecimento que teve da existência recente na Biblioteca da Universidade de Columbia do:

Tratado da pratica d'Arismetica composta & ordenada per Gaspar Nicolas, agora quarta vez impressa, & com muita diligença emmendada. Vendese em Lixboa em casa de Francisco Grapheo Liureiro. 1559. e de nem esta nem qualquer das aritméticas portuguesas do seculo XVI, vir citada na *Rara Aritmetica*

do professor David Eugene Smith nem na sua *Addenda* de 1939.

A esta aritmética faz referência Gomes Teixeira na História das Matemáticas em Portugal, dando a existência de um exemplar da primeira edição de 1519, na Biblioteca da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Um outro exemplar da 1.ª edição deve existir na Biblioteca da Casa de Braganca em Vila Viçosa, pois pertencia a D. Manuel II, e um exemplar da 3.ª edição, de 1541, existe na Biblioteca de Évora. Na Biblioteca Nacional de Lisboa só existe um exemplar da 10.ª edição de 1716, duzentos anos depois da data da 1.ª.

Esta Aritmetica tem bastante interesse por duas razões a primeira por que sendo escrita em português

em 1519, é de notar que em Itália só existiam, à data, uma meia dúzia de aritméticas a primeira das quais datada de 1478; na Alemanha só duas aritméticas, escritas em alemão tinham sido publicadas uma em 1489, e uma outra que, entre 1514 e 1584, teve várias edições. Em Espanha a primeira aritmética aparece em 1512, a qual foi traduzida para francês em 1515, constituindo esta tradução a primeira aritmética escrita em língua francesa.

Uma segunda aritmética espanhola foi publicada em 1515. Quer isto dizer que Portugal teve a sua primeira aritmética, escrita por um português, quando ainda em Espanha e na Alemanha eram raras, e em França nada havia além da tradução do espanhol.

A segunda razão aparece no facto de ela ter tido 10 edições, a última das quais em 1716, o que mostra a popularidade da obra, cuja influência, no ensino foi por isso notável.

A notícia de Bertha Frick, que refere todos estes factos é muito desenvolvida e completa. Nela se faz a análise da obra e das várias edições, procurando-se determinar o lugar das edições e resolver alguns problemas de ordem bibliográfica que elas levantam, mostrando a autora bom conhecimento, até do desenvolvimento da arte tipográfica em Portugal no século XVI.

Em apêndice dá-se uma lista das 10 edições do tratado, e das outras aritméticas portuguesas do século XVI, bem como a bibliografia de que a autora se serviu.

Trata-se, como se vê, de um estudo metódico, que pode servir de guia a trabalho do género, e que não nos dando novidades, pois a bibliografia é toda portuguesa, tem no entanto o mérito de pôr em evidência um trabalho de aritmética publicado em Portugal numa época em que tais escritos eram raros na Europa.

José da Silva Paulo

58 — PICONE, MAURO e MIRANDA, CARLO — *Esercizi di Analisi matematica* — 2.ª ed. — «*Studium Urbis*» — Roma, Città Universitaria, 1945.

No ensino da Matemática, como no ensino de qualquer ciência, há que atender a esta norma fundamental: não estabelecer uma funda separação entre a teoria e a prática. Quando tal norma não seja respeitada, o ensino teórico perderá eficiência e o ensino prático conduzirá a uma perigosa mecanização, que é a antítese mesma do espírito matemático.

Ora o presente livro de exercícios dos Prof.ª Picone (da Universidade de Roma) e Miranda (da Universidade de Nápoles) não está seguramente em desacordo com aquele princípio. A escolha dos problemas, o seu encadeamento mútuo e as considerações de que vêm precedidos ou entremeados fazem deste livro um subs-

tancioso e sugestivo comentário da teoria, o qual não só ilumina as noções propriamente teóricas, como ainda prepara o estudioso para enfrentar questões de interesse eminentemente prático. Está-se portanto aqui muito longe dos bem conhecidos receituários acéfalos, que tão deploráveis serviços têm prestado, sobretudo entre nós. E menos ainda se está em presença dum amontoado de questões sem interesse, desligadas do realidade, no género daqueles «quebra-cabeças» de almanaque, que fazem as delícias dos generais reformados e dos matemáticos manqués.

A distribuição das matérias é a seguinte: Cap. I, *Números complexos. Equações algébricas* (sem métodos de aproximação). Cap. II, *Análise combinatória. Determinantes. Sistemas de equações lineares*. Cap. III, *Limites. Funções duma variável*. Cap. IV, *Derivadas das funções duma variável*. Cap. V, *Integrais das funções duma variável*. Cap. VI, *Séries*. Cap. VII, *Derivadas e diferenciais para as funções de mais duma variável*. Cap. VIII, *Integrais curvilíneas*. Cap. IX, *Integrais múltiplos*. Cap. X, *Equações diferenciais*.

A todos os assuntos (exceptuado o das equações algébricas) é dado o máximo desenvolvimento compatível com a mentalidade dos leitores a que se destina: alunos dos dois primeiros anos de Matemática das universidades italianas. Os exercícios, numerosos e vários — sempre acompanhados de abundantes considerações teóricas — são escalonados de maneira a tornar fácil a subida, mesmo aos alunos dotados de menos fôlego. Todo o livro é escrito com aquela clareza, simplicidade e precisão, que distinguem as obras didácticas italianas e tornaram tão familiares aos nossos estudantes de Matemática os nomes de Enriques, Castelnuovo, Levi-Civita, Severi, Amaldi, Pincherle, Fubini, etc., etc.

Pelos referidos predicados, esta obra parece-nos mesmo recomendável àqueles estudiosos que, não tendo podido seguir cursos regulares, necessitem duma boa cultura matemática.

José Sebastião e Silva

59 — GILLESPIE. R. P. — *Integration*. 3 th. ed. Oliver and Boyd Ltd. — Edinburgh and London, 1945.

A. C. Aitken e D. E. Rutherford dirigem desde 1939 a edição duma excelente colecção de textos intitulada «*University Mathematical Texts*». Alguns destes livros, com uma simpática apresentação gráfica, são destinados, geralmente, a um largo público e a forma simples, ainda que correcta, por que são tratados os assuntos garantiram-lhe uma boa aceitação da parte dos leitores.

«*Integration*» da autoria de Gillespie é um livro que parece dedicado aos estudantes que precisam de adquirir um conhecimento elementar dos métodos gerais e

particulares de primitivação e de possuírem os conceitos de integral de Riemann, simples e múltiplo, integral curvilíneo, de superfície, etc., indispensáveis para abordar o estudo de muitas questões nos mais variados campos científicos. Os primeiros capítulos são muito fáceis de abordar e não requerem da parte do leitor mais do que o conhecimento dos elementos do cálculo diferencial. A noção de integral definido é introduzida como o cálculo de áreas planas e de volumes de revolução. Só no capítulo V é que é apresentada uma definição mais rigorosa e se estudam as principais propriedades do integral de Riemann. O capítulo seguinte ocupa-se das generalizações deste conceito: integrais impróprios, paramétricos, etc., sendo alguns parágrafos dedicados a um rápido estudo das funções  $\Gamma$  e  $\beta$  de Euler. No último capítulo é, sobretudo, completado o estudo dalguns dos assuntos tratados anteriormente.

O conceito de integral curvilíneo, tratado só no caso das curvas planas, parece-nos poderia ser definido numa forma mais natural e geral. Também por uma forma igualmente acessível se pudessem talvez apresentar os conceitos de integral de Lebesgue e de Stieltjes hoje de tão largas aplicações. Muito seria de desejar, na nossa opinião, a coleção Univ. Math. Texts viesse a contar de futuro com um livro contendo, entre outras, estas matérias que seriam levadas ao conhecimento dum grande público, como merecem.

É de registar também o número e qualidade dos

exercícios que acompanham e esclarecem os assuntos versados neste livro.

Manuel Zaluar Nunes

60 — TURNBULL, PROF. H. W. — *Theory of Equations* — 3.<sup>th</sup> ed. — University Mathematical Texts — Oliver and Boyd — Edinburgh and London, 1945.

O Autor é porventura já conhecido de há muito dalguns dos nossos leitores. Limitamo-nos a traduzir passagens do prefácio que traduzem fielmente as características principais deste livro.

«Contém uma exposição rápida e elementar sobre equações algébricas, desenvolvida tanto sob o aspecto teórico como prático, e acompanhada da álgebra dos polinómios e das funções racionais.

... São tratadas as equações dos 3.<sup>o</sup> e 4.<sup>o</sup> graus, as equações de tipo mais geral, a eliminação e as funções simétricas, mas não se aborda a teoria dos invariantes nem a dos grupos.

... O livro foi escrito com a preocupação constante do desenvolvimento histórico da álgebra; muitos dos assuntos foram escolhidos pela sua importância não só por fazerem parte da educação matemática geral mas por serem preliminares no estudo de toda a álgebra superior».

A 3.<sup>a</sup> edição é ampliada com um capítulo onde veem indicadas algumas contribuições recentes dos algebristas da Escola de Edinburgh. O livro tem também como origem um curso feito pelo Autor na Universidade de St. Andrews.

Manuel Zaluar Nunes

## PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

### REVISTAS E PUBLICAÇÕES EXCLUSIVAMENTE DE MATEMÁTICA

#### NACIONAIS

**Publicações do Centro de Estudos Matemáticos do Porto** — n.º 17 — *Sobre os corpos comutativos* — por A. Almeida Costa — 1946.

**Publicações da Junta de Investigação Matemática** — Cadernos de Análise Geral:

N.º 2 e 5 — *«Teoria Geral da Medida»* — 1-2 — *Medida à Jordan* — Ruy Luís Gomes e Laureano de Barros — 2.<sup>a</sup> edição — 1946.

**Portugaliae Mathematica** — Vol. 5, Fasc. 3-4:

Maurice Fréchet — *Fondements des méthodes statistiques d'estimation*.

Henryk Schärf — *Intégrale et mesure dans certains espaces algébriques (supplément)*.

H. Hadwiger — *Ein Translationssatz für Mengen positiven Masses*.

António Gião — *Forces nucléaires, gravitation et électromagnétisme*.

Vaclaw Sierpinski — *Sur une propriété des espaces métriques dénombrables*.

L. A. Santaló — *Sobre los cuerpos convexos de anchura constante en  $E_n$* .

Ruy Luís Gomes — *Au sujet de la notion de fonctionnelle*.

A. Pereira Gomes — *Sur l'axiome de semi-régularité*.

Sze-tsen Hu — *Homotopy properties of the space of continuous paths*.

#### ESTRANGEIRAS

##### Argentina

**Boletín Matemático** — (Buenos Aires) — Año XIX, n.º 9-10 (1946).

**Mathematicae Notae** — (Rosario) — Boletín del Instituto de Matemática — Facultad de Ciencias Matemáticas, etc. de la Universidad Nacional del Litoral — Año 6.º — Fascs 1, 2 (1946).

**Revista de la Union Matemática Argentina** — (Buenos Aires) — Vol. XII — núm. 1 (1946).