ANO VII-N.º 30 GAZETA DE MATEMÁTICA NOVEMBRO-1946

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *Gazeta de Matemática, L.da* ■ ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c. — LISBOA-N

Que é ensinar? É dar sistemàticamente ao aluno oportunidade à descoberta própria.

Herbert Spencer

I. ÉLÉMENTS IMAGINAIRES. REPRÉSENTATIONS RÉELLES

par **Paul Belgodère**

Imaginaires:

Il n'est pas nécessaire d'insister sur l'importance de l'extension aux éléments complexes des propriétés géométriques: sans cette extension, la géométrie *algébrique* perdrait une grande partie de sa simplicité, et se réduirait à une géométrie *finie*, beaucoup moins riche. D'ailleurs les éléments imaginaires sont utiles même pour l'étude des figures *réelles*, car leur adjonction permet de passer par continuité de figures réelles à d'autres figures dont la structure réelle est différente (à cause de relations d'inégalité), mais qui supportent des théorèmes analogues: c'est le «*principe de continuité*». Par contre, les imaginaires ne présentent en général pas assez de souplesse et de généralité — sauf peut-être au voisinage d'un point singulier — pour être utilisés avec profit en *Géométrie infinitésimale directe,* et dans l'étude des fonctions sous des conditions peu restrictives de dérivabilité: dans le domaine complexe l'existence de dérivées premières entraine l'analyticité; cette analyticité presque obligatoire n'existe d'ailleurs pas avec certains nombres hypercomplexes, construits avec une clef ε ou k telle que $\varepsilon^2=0$ ou $k^2=+1$.

La géométrie analytique complexe est dominée par le *principe de permanence:* toute propositon de géométrie réelle susceptible d'un énoncé analytique (c'est-à-dire par l'intermédiaire d'*égalités* entre fonctions analytiques des coordonnées), admet une démonstration par le calcul seul, et ce calcul *garde un sens* pour des éléments complexes, ce qui permet de leur étendre, par définition et sans risque de contradiction, les propriétés des éléments réels. En général, et en particulier chaque fois que l'on se borne à des propriétés algébriques, les éléments singuliers pour lesquels le calcul pourrait accidentellement perdre sa signification ne peuvent constituer une coupure empêchant le passage continu entre éléments réguliers correspondant à des valeurs différentes des paramètres (chaque paramètre complexe peut varier arbitrairement, en contournant les valeurs singulières, qui sont isolées): il n'y a pas à se préoccuper des *cas de figure,* et les théorèmes de géométrie complexe sont plus simples qu'en géométrie réelle.

Isotropes:

En géométrie algébrique complexe, n'importe quel invariant attaché à une figure peut prendre la valeur zéro pour des valeurs convenables des paramètres initiaux. On obtient ainsi des éléments singuliers, dont l'importance est fondamentale dans la plupart des problèmes pratiques.

En particulier, toutes les propriétés métriques (angles et distances) de la géométrie euclidienne sont dominées par l'existence de droites isotropes (de longueur nulle), qui conservent leur importance en géométrie anallagmatique. Leurs propriétés sont paradoxales: Une isotrope fait un angle infini avec toute droite, un angle indéterminé avec elle même,... Dans un plan isotrope, la distance de deux points ne dépend que des isotropes qui les portent, et est donc fonction linéaire d'une abscisse convenable: la relation de CHASLES et d'autres relations analogues restent donc valables pour des points non alignés d'un plan isotrope. La géométrie dans un plan isotrope est un cas limite de la géométrie plane euclidienne, la notion d'angle peut y être remplacée par l'existence d'un écart angulaire, qui joue le rôle d'un angle infinement petit, et dont les propriétés sont corrélatives de celles de la distance euclidienne. Dans les déplacements, les isotropes s'échangent entre elles, et il en est de même dans l'espace pour les cercles-paraboles, tangents à l'ombilicale. Dans le plan, les paraboles équilatères (dont le point à l'infini est un point cyclique) admettent, contrairement aux coniques réelles, une rotation d'ordre 3 autour de l'un de leurs points... Mais, malgré ces apparences singulières, les isotropes sont indispensables à l'étude de la géométrie euclidienne, déduite de la géométrie projective par fixation d'une conique ombilicale, et *la géométrie réelle s'explique par des imaginaires sous-jacents.*

Représentations réelles:

Lorsque, par un artifice quelconque, et de préférence à l'intérieur d'un groupe déterminé, on réussit à associer à tout élément complexe un élément réel (dépendant de deux fois plus de paramètres réels qu'il n'existait de paramètres complexes pour l'élément initial), on peut énoncer sur cette représentation les propositions géométriques transposées de la géométrie complexe initiale. Cela permet en particulier de matérialiser sur des éléments réels des constructions isomorphes de celles que l'on peut imaginer pour des éléments complexes, et qui n'étaient réalisables que par le calcul.

Il existe évidemment une infinité de représentations réelles possibles, deux d'entre elles n'étant liées que par une isomorphie de structure, et pouvant même être bâties à l'aide d'éléments de nature différente. Il n'existe donc pas de loi générale, mais on peut indiquer, sur l'exemple des représentations couramment utilisées, les caractères généraux d'une bonne figuration, apte à faciliter les raisonnements. Il y a intérêt, lorsque l'on figure les éléments complexes par des éléments réels du même espace, à ce que tout élément réel soit figuré par lui même, et à ce que l'élément réel attaché à un élément complexe lui soit lié de manière covariante par le groupe principal de la géométrie complexe initiale — ou par un sous-groupe. Un procédé commode pour obtenir une telle figuration consiste à attacher à l'élément complexe initial (auquel on peut adjoindre si nécessire l'élément complexe conjugué, en lui faisant jouer de préférence un rôle antisymétrique plutôt que symétrique) une figure algébrique, covariante par le groupe principal, et dont on n'envisagera ultérieurement que la partie réelle.

Les conditions d'analyticité en éléments complexes font apparaître, dans la représentation réelle, des conditions plus cachées de géométrie différentielle, qui sont la traduction des «Conditions de Cauchy», et qui expriment la différence entre une quantité dépendant d'*un* paramètre complexe et une quantité plus générale dépendant de *deux* paramètres réels. Par exemple, la partie réelle d'une fonction d'une variable complexe $x+iy$ est *fonction harmonique* de x et y.

Exemples dans le plan:

Citons quelques exemples, pour la représentation réelle des éléments imaginaires du *plan:*

Dans le groupe métrique, anallagmatique ou conforme, on peut attacher à chaque point complexe A les deux isotropes qui en sont issues, d'où le segment de leurs points réels qui sont les *foyers* du point A et du point conjugué. Toute transformation métrique, anallagmatique ou conforme *directe* complexe induit sur la première et sur la deuxième images rèelles des transformations métriques, anallagmatiques ou conformes directes réelles, indépendantes l'une de l'autre, et qui viennent se confondre si la transformation initiale est réelle. Ces propriétés restent valables sur la sphère, et il y a intérêt à considérer les points réels images comme appartenant à deux *feuillets* différents superposés mais indépendants. Chacune des images réelles associée aux points d'une droite du plan permet ainsi d'associer à toute affixe complexe un point réel (représentation de Cauchy). Plus généralement, les points d'une *courbe* complexe ont des images qui se correspondent par une transformation conforme inverse (symétrie de Schwarz). Pour la sphère, les deux images réelles d'un point complexe peuvent être jointes par une droite orientée, réelle, rayon de la géométrie hyperbolique de Cayley associée, qui devient indéterminé lorsque le point initial est réel.

Dans le groupe linéaire, on peut attacher à chaque point imaginaire et à son conjugué le segment réel orienté, concentrique et homothétique du précédent dans le rapport i.

Dans le groupe projectif d'une conique idéale (d'équation réelle, sans point réel), on peut attacher à chaque point les deux tangentes à la conique qui en sont issues, puis les deux points réels d'une sphère de Riemann qui y ont pour affixe les deux paramètres complexes de ces tangentes, et enfin le rayon réel, non orienté, qui les joint. Si l'on associe au point complexe initial les deux points réels de la sphère de Riemann qui ont pour affixes le paramètre d'une tangente et le conjugué de l'autre, on trouve une représentation peu différente de la représentation donnée comme premier exemple, par l'intermédiaire des isotropes et dont la validité s'étend maintenant à la géométrie métrique, anallagmatique ou conforme *non euclidienne.*

Dans le groupe métrique, on peut remarquer que si deux points A, A' se correspondent par rotation, leurs *foyers* B, B' se correspondent par une homothétie de même centre: ceci explique la *représentation cinématique* de Blaschke, qui associe à tout point complexe B du plan $z=0$ la droite réelle de l'espace passant par le point de même abscisse du plan $z=i$: lorsque la droite image passe par un point fixe réel de l'espace les foyers réels A, A' du point B se correspondent par une rotation réelle. De même, lorsque la droite réelle de l'espace est située dans une plan fixe, les foyers réels A, A' du point B se correspondent par un retournement.

Exemples dans l'espace :

Citons maintenant quelques exemples de représentation réelle des éléments imaginaires de *l'espace :*

Dans le groupe anallagmatique, on peut considérer tout point complexe comme foyer d'un cercle réel, tracé sur le cône isotrope centré en ce point. La distinction entre le point initial et le point complexe conjugué permet d'orienter le cercle et d'en faire un *cycle.* Les points d'une isotrope sans point réel ont pour image les cycles d'une *congruence paratactique.* Les points d'une sphère ont pour image les cycles orthogonaux à cette sphère.

Dans le groupe linéaire, on peut attacher à chaque point complexe et à son conjugué le segment concentrique, homothétique dans le rapport i. On peut aussi leur associer leur milieu et le vecteur libre quotient par $2i$ de leur vecteur de jonction, ce qui revient à étudier séparément la partie réelle et la partie imáginaire. Une *courbe* complexe est alors représentée par une surface réelle, armée d'un champ de vecteurs, et la condition d'analyticité impose à la surface réelle d'être *imaginairement de translation* : ses génératrices imaginaires sont homothétiques de la courbe initiale ; dans le cas général, les coordonnées x, y, z, des points réels de la surface représentative sont fonctions harmoniques de deux paramètres u, v; si la courbe initiale est de longueur nulle, on obtient ainsi la génération géométrique des *surfaces minima.*

Dans le groupe projectif, on obtient une représentation réelle des points d'une courbe complexe par les droites réelles qui rencontrent la courbe, ou par les droites réelles des plans osculateurs de cette courbe. Si, dans ce dernier cas, la courbe est de longueur nulle, on obtient une *congruence isotrope* de droites.

(Continua)

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

GODOFREDO GUILLERMO LEIBNIZ (1646-1716)

por **J. Gallego-Diaz**

Lo que hoy se llama Análisis lnfinitesimal tuvo su cuna en la mente genial de Leibniz. Él fué quien, por vez primera, pronunció la palabra función y es justo proclamar — apagados ya los ecos de la enconada controversia entre newtonianos y leibnizianos — que su maravillosa invención del cálculo infinitesimal fué enteramente independiente de la realizada por Newton cási simultáneamente.

La evolución iniciada por Descartes en la Matemática creando lo que Ampère bautizó mas tarde con el nombre de geometria analitica, fué seguida de otra no menos importante: el problema directo o de las tangentes y el inverso (cuadraturas y rectificaciones) eran resueltos con la máxima generalidad.

Si tuviéramos que reflejar en una fórmula la relación entre los griegos y los artífices del universo matemático diriamos que Descartes es a Apolonio lo que Leibniz es a Arquimedes.

Sin embargo, la trascendencia de los descubrimientos leibnizianos era tal que no debe sorprendernos el irónico comentario de Leibniz en carta dirigida a uno de sus amigos: «No he podido por menos de reir cuando he visto que ellos — el cartesiano Malebranche — consideran el álgebra (el álgebra de las cantidades finitas, se entiende) como la más grande y sublíme de todas las ciencias».

Pero la insaciable curiosidad espiritual de Leibniz no se dirigía solo al estudio de la matemática pura. La filosofía, la jurisprudencia, la história, la química, la física y la teologia recibieron el soplo impetuoso de su genio universal.

Su mas honda ambición se centraba en aquella «Vera Cabbala» «ars inveniendo y ars combinatoria» gracias a la cual ha sido posible desarrollar toda la labor crítica que sobre los fundamentos de la matemática se ha realizado en nuestro siglo.

Un español egregio, Raimundo Lubio, habia tenido el mismo sueño. El «arte lullica» fué quizà, para Leibniz, un valioso estímulo, no por superado menos digno de reconocimiento.

A pesar de su clara visión dialéctica necesitó varios años para pasar de la idea a los hechos y tal vez no se hubiera decidido a publicar sus descubrimientos en 1684, en la revista *Acta Eruditorum* por él fundada, si no hubiera sido porque uno de sus mejores y mas inteligentes amigos, Walter Ehrenfried, conde de Tschirnhaus, habia ya comenzado a publicar como propios los teoremas que confidencialmente le habia comunicado Leibniz.

La influencia que la obra de Leibniz tuvo en la posterior generación matemática ha ido creciendo hasta nuestros dias. Él fué el primero que empeló