l'espace les foyers réels A, A' du point B se correspondent par une rotation réelle. De même, lorsque la droite réelle de l'espace est située dans une plan fixe, les foyers réels A, A' du point B se correspondent par un retournement.

Exemples dans l'espace:

Citons maintenant quelques exemples de représentation réelle des éléments imaginaires de *l'espace:*

Dans le groupe anallagmatique, on peut considérer tout point complexe comme foyer d'un cercle réel, tracé sur le cône isotrope centré en ce point. La distinction entre le point initial et le point complexe conjugué permet d'orienter le cercle et d'en faire un *cycle*. Les points d'une isotrope sans point réel ont pour image les cycles d'une *congruence paratactique*. Les points d'une sphère ont pour image les cycles orthogonaux à cette sphère.

Dans le groupe linéaire, on peut attacher à chaque point complexe et à son conjugué le segment concentrique, homothétique dans le rapport i. On peut aussi leur associer leur milieu et le vecteur libre quotient par $2i$ de leur vecteur de jonction, ce qui revient à étudier séparément la partie réelle et la partie imáginaire. Une *courbe* complexe est alors représentée par une surface réelle, armée d'un champ de vecteurs, et la condition d'analyticité impose à la surface réelle d'être *imaginairement de translation*: ses génératrices imaginaires sont homothétiques de la courbe initiale; dans le cas général, les coordonnées x, y, z, des points réels de la surface représentative sont fonctions harmoniques de deux paramètres u, v; si la courbe initiale est de longueur nulle, on obtient ainsi la génération géométrique des *surfaces minima*.

Dans le groupe projectif, on obtient une représentation réelle des points d'une courbe complexe par les droites réelles qui rencontrent la courbe, ou par les droites réelles des plans osculateurs de cette courbe. Si, dans ce dernier cas, la courbe est de longueur nulle, on obtient une *congruence isotrope* de droites.

(Continua)

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

GODOFREDO GUILLERMO LEIBNIZ (1646-1716)

por ***J. Gallego-Diaz***

Lo que hoy se llama Análisis Infinitesimal tuvo su cuna en la mente genial de Leibniz. Él fué quien, por vez primera, pronunció la palabra función y es justo proclamar — apagados ya los ecos de la enconada controversia entre newtonianos y leibnizianos — que su maravillosa invención del cálculo infinitesimal fué enteramente independiente de la realizada por Newton cási simultáneamente.

La evolución iniciada por Descartes en la Matemática creando lo que Ampère bautizó mas tarde con el nombre de geometria analitica, fué seguida de otra no menos importante: el problema directo o de las tangentes y el inverso (cuadraturas y rectificaciones) eran resueltos con la máxima generalidad.

Si tuviéramos que reflejar en una fórmula la relación entre los griegos y los artifices del universo matemático diriamos que Descartes es a Apolonio lo que Leibniz es a Arquimedes.

Sin embargo, la trascendencia de los descubrimientos leibnizianos era tal que no debe sorprendernos el irónico comentario de Leibniz en carta dirigida a uno de sus amigos: «No he podido por menos de reir cuando he visto que ellos — el cartesiano Malebranche — consideran el álgebra (el álgebra de las cantidades finitas, se entiende) como la más grande y sublíme de todas las ciencias».

Pero la insaciable curiosidad espiritual de Leibniz no se dirigía solo al estudio de la matemática pura. La filosofía, la jurisprudencia, la história, la química, la física y la teologia recibieron el soplo impetuoso de su genio universal.

Su mas honda ambición se centraba en aquella «Vera Cabbala» «ars inveniendo y ars combinatoria» gracias a la cual ha sido posible desarrollar toda la labor crítica que sobre los fundamentos de la matemática se ha realizado en nuestro siglo.

Un español egregio, Raimundo Lubio, habia tenido el mismo sueño. El «arte lullica» fué quizà, para Leibniz, un valioso estímulo, no por superado menos digno de reconocimiento.

A pesar de su clara visión dialéctica necesitó varios años para pasar de la idea a los hechos y tal vez no se hubiera decidido a publicar sus descubrimientos en 1684, en la revista *Acta Eruditorum* por él fundada, si no hubiera sido porque uno de sus mejores y mas inteligentes amigos, Walter Ehrenfried, conde de Tschirnhaus, habia ya comenzado a publicar como propios los teoremas que confidencialmente le habia comunicado Leibniz.

La influencia que la obra de Leibniz tuvo en la posterior generación matemática ha ido creciendo hasta nuestros dias. Él fué el primero que empeló los determinantes, demostró el teorema que lleva el nombre de Wilson, resolvió el famoso problema de la *braquistocrona* y otros de cálculo de variaciones; dió la fórmula de la potencia de los polinómios, generalizando la del binómio de Newton, y sembró en multitud de campos con tal profusión, que los frutos aún no acabaron de recojerse.

Los filósofos no matemáticos han deformado su obra hasta la caricatura; fenómeno éste, por lo demás tan frecuente como lamentable. En el siglo pasado, por ejemplo, Dühring, en su célebre «Curso de Filosofía» demostró hasta la saciedad que era totalmente impermeable su espiritu para la filosofía matemática leibniziana. Otro filósofo (?) Julian Manes dice, a propósito de Leibniz en su libro: «La filosofia del P. Gratry» — «En el infinitamente pequeño no hay cantidad. El infinito no es una cantidad muy grande ni el elemento infinitesimal es una cantidad muy pequeña; no es *pequeño,* sino *nulo*».

Quis neget, naturam instinctu solo, sine etiam ratiocinatione, docere geometriam?

La biografía de Leibniz es demasiado rica para que pueda resumirse en unas pocas lineas. Nació en Leipzig el 1.º de Julio de 1646 y murió em Hannover el 14 de Noviembre de 1716. Desde su infancia demostró sus extraordinarias dotes intelectuales que no fueron apreciadas en su ciudad natal. Se doctoró en Leyes, en Nuremberg. Escribió poesías de escaso valor y siguió los cursos de Matemática de Erhard Weigel, en la Universidad de Iena. Weigel era un tipo mediocre que no supo ver en Leibniz aptitud alguna para la Matemática. Luego, como diplomático, estuvo en Paris y Londres. Conoció a Huyghens, a quien reveló sus primeras emociones cuando consiguió demostrar, con estremecimientos de inefable embriaguez, totalmente incomprensible para el profano, que la suma de las raices cuadradas de dos complejas conjugadas era una cantidad real. Leibniz tuvo la suerte de no tener que dar clases de Matemática en Universidad o Instituto alguno. Mas tarde pasó al servicio de los Duques de Brunswick que le dejaron morir oscuramente, obligándole a la ímproba tarea de desentrañar su aristocrática selva genealógica.

Su glória, osculatriz a la de Newton, es mas universal que la de éste. Su espiritu fáustico era de naturaleza compleja e irracional; sólo asi era posible abarcar la estructura del universo; sólo asi era posible que su obra goce de esa actualidad que le está siempre reservada a quien realiza alguna revolución verdadera.

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA

FÍSICA TEÓRICA

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS D'ONDE COSMOLOGIQUES DES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES

par ***António Gião***

Dans deux mémoires récents (1) sur la synthèse de la Relativité générale et de la mécanique ondulatoire j'ai montré que les équations $\Delta\Psi_{mn}=\alpha_n\Psi_{mn}$ et $\Delta_\omega\Phi_{mn}=$ $=\beta_n\Phi_{mn}$ (où Δ est le laplacien de la métrique interne $ds^2=g_{ik}\,dx^i dx^k$ de l'espace-temps et Δ_ω le laplacien de la métrique externe $d\Omega^2=\omega_{ik}\,dx^i dx^k$) ont un ensemble dénombrable de valeurs propres α_n, β_n et qu'à chaque α_n (ou β_n) correspondent *quatre* fonctions propres invariantes et non-arbitraires Ψ_{mn} et Φ_{mn} $(m=1,2,3,4)$, qui sont les *fonctions d'onde cosmologiques* des particules élémentaires de l'Univers. Les α_n et les β_n sont reliés comme suit aux masses propres m_n et aux charges électriques e_n des particules élémentaires:

$$m_n=\frac{2\pi c}{h}m_e^2\frac{1}{n^4\sqrt{\alpha_n}}\,;\quad e_n=\frac{e^2}{h}\sqrt{\frac{m_e}{\mathcal{Q}}}\frac{1}{n^4\sqrt{\beta_n}}\,,$$

m_e et e désignant la masse au repos et la charge de l'électron, et $\mathcal{Q}$ une constante numérique qui ne dépend que du nombre de nucléons (protons et neutrons) de l'Univers au début de sa phase en expansion. (Les électrons habituels correspondent à $n=1$ et pour $n>1$ on a une série de «*microélectrons*» qui n'ont pas encore été observés, mais qui pourront peut-être être isolés expérimentalement, au moins pour $n=2$, dans des phénomènes comme l'émission β continue des substances radioactives). Les Ψ_{mn} et les Φ_{mn} satisfont aussi aux équations suivantes du premier ordre:

$$\varepsilon_n^i\frac{\partial\Psi_{mn}}{\partial\rho}=-\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}\,;\quad \varepsilon_{nq}^i\frac{\partial\Phi_{mn}}{\partial q^i}=-\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}\,,$$

dans lesquelles ρ et q sont des coordonnées géodésiques *locales* orthogonales en un point quelconque

(1) I) — «*Le problème cosmologique généralisé et la mécanique ondulatoire relativiste*» (Portugaliae Physica, vol. 2, fasc. 1, pag. 1-98, 1946).

II — «*Forces nucléaires, gravitation et électromagnétisme*» (Portugaliae Mathematica, vol. 5, fasc. 3, pag. 145-194, 1946).