nombre des plantes à fleurs blanches ou à fleurs rouges, ces proportions restant ensuite stables de génération en génération. Dans une hypothèse intermédiaire, une fraction définie du nombre total de plantes étant soumis à l'autofécondation et le reste livré à la fécondation croisée, la population tendra graduellemment vers un état d'équilibre stable, comportant toujours moins de plantes à fleurs roses que dans le cas de la fécondation entièrement croisée.

Lorsque l'on suppose que les plantes à fleurs rouges, roses ou blanches, n'ont pas la même fécondité, ni la même vigueur, hypothèses plus conformes à la réalité, les calculs deviennent beaucoup plus compliqués, mais aussi beaucoup plus intéressants. Ils permettent en effet d'aborder un problème capital, d'où dépend toute la philosophie de la Biologie et toute la philosophie de la Science — le problème de l'évolution. Etudier en effet le problème de la persistance ou de l'extinction, au sein d'une population, d'un facteur conditionnant un caractère qui donne à son porteur une fécondité ou une vitalité, accrue ou diminuée, c'est en effet ébaucher la théorie de la Sélection naturelle, clef de voûte du Darwinisme, seule explication rationnelle de l'Evolution.

•

C'est sur cette indication — qu'il est naturellement impossible de développer ici — que je voudrais conclure. J'ai essayé de montrer l'intérêt que présentent les mathématiques pour la Biologie, mais on me permettra de regretter qu'il soit périodiquement jugé utile de faire cette démonstration. Il ne viendrait à l'idée de personne de demander une conférence de même niveau intitulée «Mathématiques et Physique». Ce n'est peut-être pas un très bon symptôme pour la qualité de la culture scientifique donnée par notre enseignement secondaire, qu'aux approches du milieu du XX[e] siécle, une conférence sur «Mathématiques et Biologie» ait encore sa raison d'être. Ce stade est dépassé depuis vingt ans, trente ou plus aux U.S.A., en U.R.S.S. et ailleurs. Il n'est que temps de rattraper un retard inexcusable, et toute réforme de l'enseignement serait incomplète si elle ne posait pas en principe que tous ceux que leur métier mettra en contact avec la matière ou qui auront à travailler, d'une façon ou d'une autre, sur les êtres vivants, c'est-à-dire les ingénieurs, les architectes... d'une part; les médecins, les agronomes et aussi, il faut le dire, les professeurs et les juristes d'autre part, devront recevoir un minimum de culture scientifique. Ce minimum, qui devra être impitoyablement exigé, comportera obligatoirement *toutes* les disciplines scientifiques, inégalement dosées selon les carrières préparées. La culture générale du biologiste, dont l'objet d'étude, quel qu'il soit, est toujours complexe, devra être particulièrement poussée et comportera, avec des éléments suffisants d'analyse, une large part de statistique.

PEDAGOGIA

RESULTADOS DE UM EXAME DE MATEMÁTICA - 1.º CICLO

*por **Maria Teodora Alves***

No n.º 29 da «Gazeta de Matemática» foi prometido que seria feito o estudo dos pontos para as provas escritas de Matemática do exame do 1.º ciclo no Liceu de Passos Manuel no ano lectivo 1945-46.

Os elementos estatísticos, relativos a êsse exame, que determinámos, constam do quadro seguinte:

	Aritmética e Álgebra	*Geometria*
Nota mínima	0	0
Nota máxima	18	19
média	9.9	11.2
σ	4.08	3.99
coeficiente de variação	0.41	0.35
Q_3	12.3	13.8
mediana	9.1	10.9
Q_1	6.7	8.0
Q	2.8	2.9
r	0.53	
$N=236$		

Em $N=236$ estão incluídos 42 alunos internos do Liceu de Passos Manuel e 194 externos e dêstes, uns, do ensino particular em estabelecimento, outros do ensino particular individual e, ainda, maiores e emancipaveis.

Em Aritmética e Algebra a distribuição das notas fez-se de 0 a 18 e em Geometria de 0 a 19. Isto é, os pontos que serviram às duas provas e os critérios de classificação adoptados pelos respectivos professores, distribuiram os alunos por quási tôda a escala oficial de classificação (0 a 20).

A média 9.9 na prova de Aritmética e Algebra difere sensìvelmente da média 11.2 na de Geometria, o que mostra que o grupo de alunos que se apresentou a exame tinha melhor preparação em geometria do que em Aritmética e Álgebra, ou que o ponto de Aritmética e Álgebra foi sensìvelmente mais difícil do que o de Geometria.

É ocasião de lembrar que o número de lições de

Aritmética e Algebra que os alunos recebem durante o 1.º ciclo é muito superior ao número de lições de Geometria, pelo menos quanto aos alunos internos, o que torna a diferença das médias obtidas mais significativa ainda e mais inesperada. Como as médias da distribuição das notas são influênciadas pelos valores extremos precisamos agora de procurar, para uma e outra prova, medidas que se encontrem à volta das respectivas médias. Consideremos então a mediana e os quartis de cada uma das provas :

Aritmética e Álgebra	*Geometria*
$Q_3 = 12.3$	$Q_3 = 13.8$
$M_d = 9.1$	$M_d = 10.9$
$Q_1 = 6.7$	$Q_1 = 8.0$

Nesta região, chamada de normalidade, a distribuição das notas de Geometria é mais regular do que a correspondente em Aritmética e Álgebra. Assim Q_3 que marca o limite inferior dos alunos bem dotados parece excessivamente baixo em Aritmética e Álgebra, não acontecendo o mesmo em Geometria, onde $Q_3 = 13.8$, está muito próximo da nota de 14 que é o limite inferior, na escala de 0 a 20, dos bons alunos.

A mediana que diz o que se passa na zona do meio da distribuição, encontra-se equidistante de Q_3 e Q_1, na prova de Geometria, não acontecendo o mesmo em Arítmética e Álgebra. Conclue-se então que, os alunos medianos vão nesta prova atraz da dificuldade, visto que $Q_1 = 6.7$ é valor muito abaixo.

Os gráficos seguintes indicam as diferentes zonas de distribuição e esclarecem bem as respectivas posições relativas.

enquanto que na prova de Geometria, essa mesma categoria de alunos se distribue entre os limites 10.9 e 13.8, zona de distribuição, sem dúvida, muito mais regular. A observação deste gráfico permite tirar conclusões idênticas em tôda a sua extensão.

O intervalo semi-quartil Q, não só marca para um e outro lado da mediana, a região normal, como dá a amplitude das notas de que há a probabilidade 1/2 de serem atribuidas a qualquer aluno. O valor $Q = 2.9$, na Geometria, correspondente à mediana 10.9, ainda vem indicar uma maior amplitude e melhor variação na região normal das notas de Geometria, do que na Aritmética e Álgebra onde é $Q = 2.8$, para a mediana 9.1. Os coeficientes de variação da média de cada prova foram 0.41 e 0,35 e indicam que as dificuldades em *cada um dos pontos* foram satisfatòriamente graduadas ; mas, mais uma vez se verifica, a melhor graduação do ponto de Geometria. Daqueles mesmos valores, por serem próximos um do outro e pequenos, ainda se conclue que, o grupo de alunos se comportou com aceitável regularidade, em cada prova, dando uma percentagem de admissões à prova oral de 59.3 %.

O valor $r = 0.53$ do coeficiente de correlação é pouco superior ao limite inferior da correlação, considerada média, o que permite supor, em geral, para *cada aluno*, desigual preparação em Aritmética e Álgebra, e em Geometria.

Todas estas razões conduzem a considerar o ponto de Aritmética e Álgebra sensivelmente mais difícil do que o ponto de Geometria.

As posições dos quartis e da mediana, quanto ao ponto de Geometria, parecem aconselhar que seja mantida a sua estrutura e graduação.

Inferiores	Q_1	Médios inferiores	M_d	Médios superiores	Q_3	Superiores	
	↓		↓		↓		Aritm. e Algebra
	6.7	8.0	9.1	10.9	12.3	13.8	
		↑		↑		↑	Geometria
	Inferiores	Q_1	Médios in'eriores	M_d	Médios superiores	Q_3	Superiores

Como 7.5 é a nota de admissão ao exame oral, verifica-se que, alguns alunos médios inferiores na prova de Aritmética e Álgebra não seriam admitidos à oral e que, pelo contrário, todos os alunos médios inferiores na prova de Geometria seriam admitidos à prova oral. Os alunos médios superiores, distribuem-se na prova de Aritmética e Álgebra, entre 9.1 e 12.3

Seria vantajoso estudar o comportamento de cada aluno perante cada questão do ponto de Geometria de modo que pudesse servir de padrão ao ponto do próximo exame, o que iria comprovar ou negar a satisfatória eficiência que agora lhe encontrámos.

Quanto ao ponto de Aritmética e Álgebra seria conveniente que sofresse também idêntico tratamento afim de que o ponto do próximo exame fôsse mais acertamente compensado.

A ocasião oportuna para serem colhidos todos êsses dados estatísticos seria a época de exames, e quando da classificação das provas dos alunos. Mas, nessa ocasião o professor tem de classificar, em 8 dias, 236 provas, por exemplo, e às vezes bastantes mais, fiscalizar as provas da 2.ª chamada e classificá-las também, e tudo isso é incomportável com a preocupação de estatísticas de pontos exame.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Em fins de Junho de 1946 tiveram logar no Liceu de Pedro Nunes de Lisboa, 3 conferências promovidas pela S. P. M. e que versaram os temas «A noção de número real» e «A estrutura de divisibilidade dos inteiros». Os conferentes foram Luís Neves Real, investigador do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto, Andrade Guimarães, aluno do 2.º ano da Licenciatura em Ciências Matemáticas da Faculdade de Ciências do Porto, e José D. da Silva Paulo, professor do Liceu de Gil Vicente de Lisboa. A «Gazeta de Matemática» atendendo à importância dos assuntos e à maneira por qne foram tratados e expostos, pediu aos conferentes que redigissem as notas que se seguem. Assistiram às conferências o Reitor do Liceu e vários professores do ensino secundário e superior sendo porém pouco numerosa a assistência.

A NOÇÃO DE NÚMERO REAL

por ***Andrade Guimarães*** *e* ***L. Neves Real***

O Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto fixou-nos, como tema das lições a realizar em Lisboa, a convite da Sociedade Portuguesa de Matemática, a teoria aritmética do contínuo tal qual a conceberam, no último quartel do século passado, Cantor, Méray e Dedekind, com tôda a precisão que os métodos da álgebra moderna permitem imprimir-lhe.

Ao artigo de Bachman, na Enciclopédia alemã, fomos buscar a orientação do nosso trabalho.

Evitando a definição dos números naturais

$$1\ 2\ 3 \cdots$$

introduzidos axiomàticamente, começamos por indicar como dos postulados de Peano se pode derivar tôda a aritmética. Em seguida, considerando o conjunto de todos os números naturais, algebrizado em relação à operação — soma — e definida nêle uma relação de ordem, menor do que, $<$, o espaço algébrico dos números naturais $\{a, b, c \cdots\}$ apresenta-se como um semi-grupo comutativo e ordenado. Nêsse semi-grupo, a operação $a+x=b$ não tem solução se $a \geq b$. A álgebra moderna, através do processo de formação de classes de equivalentes, fornece o método para construir a partir dêsse semi-grupo um novo espaço algébrico — agora grupo ordenado $\{\alpha, \beta, \gamma \cdots\}$ — que num certo sentido se pode considerar como uma sua ampliação: o novo espaço contém um semi-grupo isómorfo e semelhante ao de partida. No nosso caso o semi-grupo dos números naturais amplia-se até ao grupo ordenado dos inteiros (positivos, zero e negativos); para isso consideram-se todos os pares (b, a) de números naturais, chamam-se equivalentes dois pares (b, a) e (b', a') se $b+a'=b'+a$:

$$(b, a) \equiv (b', a') \longleftrightarrow b+a'=b'+a,$$

e, por definição, toda a classe (conjunto) de pares equivalentes é um número inteiro; pode representar-se por $b-a$ a classe α de todos os pares equivalentes a (b, a). As conhecidas definições de soma, produto e ordenação de inteiros, dão ao espaço algébrico dêstes números o caracter de domínio de integridade ordenado. Neste domínio e em relação à sua operação de soma e ao critério de ordenação nele adoptado, o sub-conjunto dos números inteiros da forma $(a+b)-a$ é um semi-grupo ordenado e a correspondência $(a+b)-a \longleftrightarrow b$ com os números naturais um isomorfismo algébrico e de ordem. Só neste sentido — *a menos dum isomorfismo* — é que podemos dizer que os inteiros contêm os números naturais. Por comodidade usam-se os símbolos $1, 2, 3, \cdots$ para representar os números inteiros isómorfos dos naturais: 1 para o inteiro $(a+1)-a$, 2 para $(a+2)-a$, etc. Mas êles representam seres matemáticos inteiramente diferentes: o número natural 1 é uma noção primitiva da axiomática de Peano, assim como o número natural 2 é o «sucessor» de 1, etc. — mas o número inteiro 1 é o conjunto (ou classe) de todos os pares de naturais da forma $(a+1, a)$, isto é, de todos aqueles cuja *diferença* é o número natural 1: o número inteiro 2 o conjunto de todos os pares de naturais cuja *diferença* é o número natural 2, etc.