résultats d'expériences selon la loi des moindres carrés.

(24) *R. Lacape : Les problèmes mathématiques de l'influx nerveux.

(25) Mariani : Les espaces généralisés et l'électromagnétisme.

Samedi 14 septembre (10h.30 à 12h.) :

(26) E. Merwart: Chronologie mathématique: Deux numérotations inverses : période julienne et millésimes préchrétiens.

(27) E. Kraft : Critériuns de divisibité, critérium des nombres premiers.

(28) J. Malburet : Une démonstration du théorème de Saccheri (5e postulat).

(29) J. Malburet : Le sixième postulat d'Euclide.

(30) *E. Barbette : Le dernier théorème de Fermat et sa généralisation.

Le 66e Congrès aura lieu à Biarritz en Septembre 1947.
Le 67e Congrès aura lieu à Genève en 1948.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

F. C. L. — Exame de Aptidão — Julho de 1946.

I

2273 — Determine o parâmetro m de modo que as raizes da equação $x(1-x)=m/(m+1)$ difiram de duas unidades. R: *A equação proposta pode escrever-se sob a forma equivalente* $x^2-x+m:(m+1)=0$ *e se forem* x_1 *e* x_2 *as suas raízes teremos o sistema*: $x_1+x_2=-1$, $x_1-x_2=2$ *e* $x_1 x_2=m:(m+1)$, *cuja resolução conduz à solução procurada* $m=-3/7$.

2274 — Diga o que se lhe oferecer sôbre a possível existência de soluções inteiras e positivas da equação $10x-6y=8$. Justifique a resposta. R: *A equação* $10x-6y=8$ *é equivalente a* $5x-3y=4$, *equação que tem uma infinidade de soluções inteiras e positivas pois estas são dadas pelas expressões* $x=2+3m$ *e* $y=2+5m$, *onde* m *representa um inteiro positivo ou nulo qualquer, em vista de o par* $x_1=2$, $y_1=2$ *constituir uma solução inteira da equação proposta.*

2275 — Diga qual dos números $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt{2}$ é maior. Justifique a resposta. R: *Como* $\sqrt[3]{3}$ *e* $\sqrt{2}$ *se podem escrever sob as formas* $\sqrt[6]{3^2}$ *e* $\sqrt[6]{2^3}$ *resulta imediatamente da comparação destes radicais que é* $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.

II

2276 — Dado um cateto dum triângulo rectângulo, e a diferença entre a sua hipotenusa e o outro cateto, deduza em função dos dados as fórmulas que exprimem os comprimentos dos lados desconhecidos do triângulo, os seus ângulos agudos e a sua área. R: *Seja* b *o cateto dado e* $a-c=d$ *a diferença entre a hipotenusa e o outro cateto. Como o triângulo é rectângulo será* $b^2+c^2=a^2$ *ou* $a^2-c^2=b^2$ *ou ainda* $(a+c)(a-c)=b^2$, *donde se deduz* $a+c=b^2:d$ *e portanto* $a=(b^2+d^2):2d$ *e* $c=(b^2-d^2):2d$. *Daqui se deduz que* $\operatorname{tg} B=2db:(b^2-d^2)$ *e* $\operatorname{tg} C=(b^2-d^2):2db$.

2277 — Verifique a identidade

$$\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2}{1-\operatorname{sen}(2\alpha)}.$$

R: *O primeiro membro da igualdade pode escrever-se sucessivamente sob as formas:*

$$\sec^2(\pi/4+\alpha)=1:\cos^2(\pi/4+\alpha)=1:[\cos\pi/4\cos\alpha-$$
$$-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\pi/4]^2=1:[(\sqrt{2}/2)^2.(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)^2]=$$
$$=1:[1/2\times(\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)]=$$
$$=2:[1-\operatorname{sen}(2\alpha)],$$

o que prova a identidade.

2278 — Deduza a expressão geral dos ângulos que têm a mesma cosecante que o ângulo que mede θ radianos. R: *Como se sabe os ângulos* θ *e* $\pi-\theta$ *têm a mesma cosecante, e como* θ *e* $\theta+2k\pi$ (k *inteiro*), *e* $\pi-\theta$ *e* $\pi-\theta+2k'\pi$ (k' *inteiro*) *têm a mesma cosecante, poderemos escrever as expressões* $2k\pi+\theta$ *e* $(2k'+1)\pi-\theta$, *que se podem condensar sob a forma* $n\pi+(-1)^n\cdot\theta$ (n *inteiro*), *como sendo as expressões gerais dos arcos que têm a mesma cosecante que o ângulo* θ.

III

2279 — Deduza o valor da razão entre o volume de uma esfera e o de um cubo nêle inscrito. R: *O volume da esfera é dado pela expressão* $4\pi R^3:3$, *e a aresta do cubo inscrito na esfera de raio* R *é dada por* $l=2R\sqrt{3}:3$, *donde o volume* $l^3=8R^3\sqrt{3}:3^2$. *A razão dos volumes é então* $\pi\sqrt{3}:2$.

2280 — Considere duas circunferências de raios diferentes, tangentes exteriormente num ponto T.

Demonstre que tendo P e P' os pontos de contacto duma tangente comum às duas circunferências, o ângulo $P\widehat{T}P'$ é um ângulo recto. R: *Tracemos a tangente comum às duas circunferências no ponto* T *a qual encontrará a tangente* PP' *num ponto* Q. *Em vista da propriedade bem conhecida de os segmentos das tangen-*

tes tiradas de um ponto para a circunferência e compreendidas entre o ponto e a circunferência serem iguais tem-se $\overline{QP}=\overline{QT}=\overline{QP'}$ *o que mostra ser* Q *o centro duma circunferência que passa por* P, P' *e* T *e da qual* $\overline{PP'}$ *é um diâmetro, logo o ângulo* $\widehat{PTP'}$, *inscrito na meia circunferência* [PTP'], *é recto.*

2281 — Determine, sem efectuar as operações indicadas, o resto da divisão por 11 do número $N=5293^2+381\times 192$. Justifique o cálculo feito. R: *Como* $5293\equiv 2 \pmod{11}$, $381\equiv 7 \pmod{11}$ *e* $192\equiv$ $\equiv 5 \pmod{11}$ *é* $N\equiv 2^2+7\times 5\equiv 39\equiv 6 \pmod{11}$ *e portanto o resto é* 6.

Soluções dos n.os 2273 a 2281 de J. da Silva Paulo.

F. C. P. — Julho de 1946

I Parte — Aritmética

2282 — Escrever em numeração decimal o maior número que se escreve com 3 algarismos no sistema de base 13. R: 2196.

2283 — Como acha o m. d. c. de dois números empregando o método das divisões sucessivas?

2284 — Demonstrar que o máximo divisor comum de dois números m e n é igual ao máximo divisor comum entre o menor e o resto da divisão de um pelo outro.

2285 — Demonstrar que a condição necessária e suficiente para que um número seja divisível por 15 é que seja divisível por 3 e por 5. R: *A demonstração, que é imediata, baseia-se no facto de* 3 *e* 5 *serem primos entre si*.

2286 — Como se reduz uma fracção à sua expressão mais simples? Justificar a regra enunciada.

2287 — Justificar a prova dos noves-fóra na operação da divisão.

2288 — Provar que o resto da divisão do quadrado dum número impar por 8 é sempre igual á unidade. R: *Sendo* $2n+1$ *um número impar qualquer*, $(2n+1)^2=$ $=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1=\dot{8}+1$.

2289 — Achar os números que admitem para m. m. c. e m. d. c., respectivamente, 240 e 60. R: 240 e 60.

II Parte — Álgebra

2290 — Sabendo que o número de permutações de m objectos distintos é 6 vezes superior ao número das suas combinações, tomados 3 a 3, calcular o valor de m. R: $m=3$.

2291 — Escrever a equação do 2.º grau cujas raízes possam representar os comprimentos dos lados dos rectângulos que têm perímetro constante e igual a 20 metros.

Determinar, em seguida, o valor que devem tomar as raízes para que o rectângulo respectivo tenha a maior área possível. R: *As raízes deverão ser reais e a sua soma será igual a* 10. *A equação será portanto* $x^2-10x+c=0$. *Para que o rectângulo tenha área máxima deverá procurar-se o valor de* c *que torne nulo o descriminante. Encontra-se* $c=25$.

2292 — Sendo $a>0$, determinar os valores de a e k de modo que o trinómio ax^2+x+k tome valores negativos quando fizermos variar x entre -1 e $1/2$. R: *O trinómio terá valores negativos no intervalo* $[-1, 1/2]$ (e só nêste) *quando fôr* $k=-1$ *e* $a=2$.

2293 — Escrever a expressão geral dos números inteiros positivos, que divididos por 15 e 18 dêm restos iguais a 12. Calcular o menor dêstes números. R: $102-90t$, $t\leq 1$. *O menor número é* 12.

2294 — Demonstrar que a soma dos coeficientes do desenvolvimento do binómio $(a+x)^p$ é igual a 2^p. R: *Se, depois de efectuarmos o desenvolvimento, fizermos* $x=1$ *e* $a=1$, *encontramos imediatamente para soma dos coeficientes* 2^p.

2295 — Formar a equação biquadrada que admite as raízes $2i$ e 3. Achar as restantes raízes da mesma equação. R: $x^4-5x^2-36=0$. *As restantes raizes são:* $-2i$ *e* -3.

2296 — Resolver a inequação $\dfrac{x^2-4x+8}{x^2-1}>0$. R: $x>1$ *ou* $x<-1$.

2297 — Deduzir as condições a que devem satisfazer os coeficientes da equação de Diofanto $ax+by=c$, para que admita soluções inteiras e positivas.

III

2298 — Em que consiste o método de redução ao absurdo?

2299 — Conhecidas as proposições: *a*) A todo o triângulo pode circunscrever-se uma circunferência, *b*) Qualquer ângulo inscrito numa circunferência tem por medida metade do arco compreendido entre os lados, e *c*) A medida de qualquer circunferência é 360°, demonstrar, por redução ao absurdo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°. R: *Seja* ABC *um triângulo e* $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ *os seus ângulos. Suponhamos, por absurdo, que* $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\alpha$, *onde* $\alpha\neq 180°$. *Em virtude de* a) *existe uma circunferência circunscrita ao triângulo. Em virtude de* b) *resulta que* $\widehat{A}=\overset{\frown}{BC}/2$, $\widehat{B}=\overset{\frown}{AC}/2$ *e* $\widehat{C}=\overset{\frown}{AB}/2$. *Logo* $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB})/2=\alpha$. *Logo* $\overset{\frown}{BC}+$ $+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}=2\alpha\neq 360°$ *o que é absurdo*.

Soluções dos n.os 2282 a 2299 de Laureano Barros