# MATEMÁTICAS SUPERIORES

## PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA E FINAIS

### I — ESCOLAS PORTUGUESAS

## ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

**I. S. C. E. F. — 1.ª** Cadeira — **Exame final — Outubro de 1945.**

**2300** — Estudar e representar geomètricamente a função $y=e^{+\sqrt{\operatorname{sen} x}}$. R: *Função periódica de período* $2\pi$, *definida apenas para valores de* x *tais que* $\operatorname{sen} x \geq 0$; *basta, portanto, estudá-la no intervalo* $(0,\pi)$. *Por ser* $y'=e^{+\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cdot \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$, *a função é crescente em* $(0,\pi/2)$ *e decrescente no intervalo* $(\pi/2,\pi)$. *O ponto* $(\pi/2, e)$ *é de máximo. O estudo de* $y''$, *no domínio considerado, mostra que a curva tem a concavidade voltada no sentido negativo do eixo das ordenadas.*

**2301** — Determinar as raízes reais da equação $\operatorname{sen}^4 x-5\operatorname{sen}^3 x-4=0$. R: *Fazendo* $\operatorname{sen} x=y$ *tem-se* $y^4-5y^3-4=0$, *equação algébrica de coeficientes inteiros, de que nos interessam apenas as raízes* $y=\operatorname{sen} x$, *reais compreendidas no intervalo* $(-1,+1)$. *A equação não tem raízes racionais. A representação geométrica das funções* $z=y^4-4$ *e* $z=5y^3$, *por exemplo, mostra a existência duma raíz irracional da equação no intervalo* $(-1,0)$ *e outra à direita do ponto* $y=1$ *que portanto não têm interêsse. Essa raiz é, a menos de uma décima,* $y=-0,8$ *donde* $x=\operatorname{arcsen}(-0,8)$.

Soluções dos n.os 2300 e 2301 de O. Morbey Rodrigues.

**I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — Outubro de 1945.**

**2302** — Quando o ponto $z=x+iy$ descreve no plano de Cauchy a recta $ax+by+1=0$, que curva $F(X,Y)=0$ descreve o ponto $Z$, tal que $z=1/Z$, no mesmo plano? R: $z=\frac{1}{X+iY}=\frac{X-iY}{X^2+Y^2}=x+iy$

$$x=\frac{X}{X^2+Y^2} \quad e \quad y=-\frac{Y}{X^2+Y^2}.$$

*Substituindo* x *e* y *na equação da recta* $ax+by+1=0$, *vem a equação da curva pedida* $\frac{aX}{X^2+Y^2}-\frac{bY}{X^2+Y^2}+1=0$

$X^2+Y^2+aX-bY=0$ *que representa uma circunferência.*

**2303** — Sendo $P$ e $Q$ os pontos de intersecção da tangente a uma elipse com os eixos de simetria, mostrar que o comprimento $\overline{PQ}$ é mínimo quando fôr igual à soma dos comprimentos dos semi-eixos. R: *Dada a elipse* $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ *a equação* $xx'/a^2+yy'/b^2=1$ *representa a tangente à elipse no ponto* $(x',y')$.

*Pontos de encontro da tangente com os eixos:* $P(a^2/x',0)$ $Q(0,b^2/y')$.

*Comprimento do segmento* $\overline{PQ}$: $\overline{PQ}^2=a^4/x'^2+b^4/y'^2$.

*Como* $\overline{PQ}$ *é positivo consideraremos* $\overline{PQ}^2$ *em vez de* $\overline{PQ}$.

*Da equação da elipse deduz-se* $y'^2=b^2/a^2 \cdot (a^2-x'^2)$, *e substituindo:* $\overline{PQ}^2=\frac{a^4}{x'^2}+\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2-x'^2}$.

*Consideremos* $F(x)=\frac{a^2}{x'^2}+\frac{b^2}{a^2-x'^2}$. *Tem-se:*

$$F'(x)=2\frac{(b^2-a^2)\,x'^4+2a^4x'^2-a^6}{x'^3(a^2-x'^2)^2}.$$

*Das raízes de* $F'=0$ *só convem ao problema* $\pm a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$, *que correspondem de facto a um mínimo da função. O valor correspondente de* $\overline{PQ}$ *é* $a+b$.

**2304** — Sendo $A(-2,0)$, $B(0,6)$, $C(6,0)$ os vértices de um triângulo, mostrar que os pés das perpendiculares baixadas de um ponto qualquer da circunferência circunscrita sôbre os lados do triângulo estão sempre em linha recta.

**2305** — Dadas as semi-rectas $OA$, $OB$, $OC$ de parâmetros directores respectivamente $(1,2,3)$ $(2,3,1)$ e $(3,1,2)$, escrever as equações dos planos que passam por cada uma delas e são perpendiculares aos planos formados pelas outras duas. Mostrar que êsses planos passam por uma mesma recta e achar as equações dessa recta. R: *Equações normais das rectas:* $OA \equiv x/1=y/2=z/3$, $OB \equiv x/2=y/3=z/1$, $OC \equiv x/3=y/1=z/2$. *Equação do plano* OAB: $7x-5y+z=0$. *Equação do plano* OAC: $x+7y-5z=0$. *Equação do plano* OBC: $5x-y-7z=0$. *Equação do plano que passa por* OA *e é perpendicular a* OBC: $x-2y+z=0$. *Equação do plano que passa por* OB *e é perpendicular a* OAC: $2x-y-z=0$. *Equação do plano que passa por* OC *e é perpendicular a* OAB: $x+y-2z=0$.

*Tem-se:* $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$

*e é 2 a característica do sistema das 3 equações. Equações da recta charneira:* $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$ *ou* $x=y=z$.

Soluções dos n.os 2302 a 2305 de Jorge Cândido da Silva.

# CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

**I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — 1.º exame de frequência — 8-3-1946.**

**2306** — Dadas as três funções: $y_1 = x^2 + \alpha x + \alpha$, $y_2 = x^2 - 3\alpha x + 1$ e $y_3 = x - \alpha + 2$, será possível determinar $\alpha$ de modo tal que elas sejam linearmente dependentes? R: *Pelo teorema de Peano, o wronskiano do sistema é* $W(y_1, y_2, y_3) \equiv 0$ *e pelo menos um dos complementos algébricos dos elementos da 3.ª linha de* W, *diferente de zero.* $W(y_1, y_2, y_3) = -8\alpha^2 + 14\alpha + 2$, $W \equiv \equiv 0 \rightarrow \alpha = (7 \pm \sqrt{65})/8$. *Verifica-se, fàcilmente, que o complemento algébrico do elemento da 3.ª linha, 1.ª coluna de* W, *é* $\neq 0$ *qualquer que seja* $\alpha$.

**2307** — Calcular as derivadas $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ das funções implícitas $u$ e $v$ de $x$ e $y$ definidas pelo sistema

$$\begin{cases} x+y+u+v=0 \\ xyuv = e^2 \qquad (e \text{ base neperiana}). \end{cases}$$

**2308** — Determinar $a$, $b$ e $c$ de maneira tal que o integral $I = \int \frac{ax^2+bx+c}{(x-1)^2 (x+2)} dx$ seja algébrico.
R: *Como se sabe e*

$$I = \frac{A}{x-1} + B \log(x-1) + C \log(x+2) + D .$$

*Como se pretende que* I *seja algébrico, terá que ser* $B=C=0$, logo $I = \frac{A}{(x-1)} + D$. *Utilizando a regra de Fubini obter-se-ia* $a=0, 2b=c$.

**I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — 1.º exame de frequência extraordinàrio — 15-3-1946.**

**2309** — As equações $xy + zu = 1$ e $-\frac{x+y}{z+1} = 1$ definem $x$ e $u$ como funções de $y$ e $z$. Calcular $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

**2310** — Calcular o integral

$$I = \int 2^{1/3} (1-\cos x)^{5/3} . (\operatorname{sen} x)^{-3} dx .$$

R: *Fazendo* $1-\cos x = t^3$ *obtem-se* $I = 3\sqrt[3]{2} \int \frac{t dt}{(2-t^3)^2}$ *que é um integral duma função racional.*

**2311** — Calcular a derivada da função $F(y)$ definida pelo integral $F(y) = \int_y^{\cos y} [x^2 y + \cos(y^2)] dx$.

Soluções dos n.os 2306 a 2311 de O. Morbey Rodrigues.

**F. C. L. — Análise Superior — 1.º exame de frequência — 1945-1946.**

**2312** — Determine a constante $k$ por forma tal que as linhas trajectórias ortogonais das curvas integrais da equação $2kx^2 y'^2 + kx^3 y' - 1 = 0$ tenham por envolvente (não lugar de pontos singulares) a curva $2y = x^4$. Equação finita dessas trajectórias. (Sugestão: na integração, tome $x^2$ para nova variável independente). Curvas integrais contendo o ponto $M(1, 1/2)$. Relação entre $a$ e $b$ para que nenhuma curva trajectória passe por $P(a, b)$. R: *Eq. dif. das trajectórias:* $F(x, y, y') \equiv kx^3 y' + y'^2 - 2kx^2 y = 0$. *Ela deve ter por solução singular* $2y = x^4$. $\frac{\partial F}{\partial y'} = kx^3 + 2y' = 0 \rightarrow y' = -\frac{k}{2} x^3$. *Com esta expressão de* $y'$, *a equação* $F=0$ *dá* $y = -kx^4/8$, *o que exige que seja* $k = -4$. *Para este valor de* k, *a eq. dif. das trajectórias é* $y'^2 - 4x^3 y' + 8x^2 y = 0$. *Pondo* $x^2 = t$: $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 2t \frac{dy}{dt} + 2y = 0$ *ou* $y = t \frac{dy}{dt} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ (Clairaut), *donde o integral geral* $y = ct - c^2/2$, *ou* $y = = cx^2 - c^2/2$. *Em* $M(1, 1/2) \rightarrow c_1 = c_2 = 1 \rightarrow y = x^2 - 1/2$. *A igualdade dos dois valores de* c *é sinal de que* M *pertence à curva singular. São, pois, curvas trajectórias passando em* M: $y = x^2 - 1/2$, $y = x^4/2$. *Em* $P(a, b)$: $c^2 - 2a^2 c + 2b = 0$ *e esta eq. deve ter raízes imaginárias:* $a^4 - 2b < 0$. *Tal é a condição pedida.*

**2313** — Considere duas variáveis complexas, $z = x + + iy$ e $z' = x' + iy'$, ligadas pela relação $z' = z + 1/z$; e designe por $A$ e $B$ as imagens dos afixos de $z$ e $z'$ respectivamente, num mesmo diagrama de Argand. Como deve mover-se $A$ para que se mantenha constante, e igual a $1/2$, o comprimento $\overline{AB}$? Equação do lugar que, em tal hipótese, é descrito por $B$. É conforme a representação, feita por $z'$, da região limitada pelo lugar descrito por $A$? R: *De* $z' = z + 1/z$ *vem* $|z' - z| = \frac{1}{|z|}$, *devendo, pois, ter-se* $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{2}$ *ou* $|z| = 2$. *O ponto* A *move-se, portanto, sobre a circunferência de centro na origem e raio* 2. *Quanto ao ponto* B, *feita a transformação desta circunferência, logo se acha* $\frac{4}{25} x'^2 + \frac{4}{9} y'^2 = 1$. *A função transformadora* $z' = f(z) = z + 1/z$ *tem o polo* $z = 0$; *a sua derivada* $f'(z) = 1 - 1/z^2$ *anula-se para* $z = \pm 1$. *São os pontos* $0$, $+1$ *e* $-1$ *que impedem a representação de ser conforme.*

Soluções dos n.os 2312 e 2313 de H. de Menezes.

**F. C. P. — Análise Superior — 1.º Exercício de revisão — 1945-1946.**

**2314** — Determinar a solução da equação $\log x \cdot p = y^2 z/x$ que se reduz a $x=e$, quando $z=1$. R: *Formando o sistema:* $\frac{dx}{\log x} = \frac{dz}{y^2 z/x}$, $dy=0$ *encontram-se imediatamente os integrais primeiros* $y=c_1$, $y^{-2} \cdot \log z - \log\log x = c_2$. *A solução mais geral e portanto* $y^{-2} \log z - \log\log x = \varphi(y)$. *A solução que se reduz a* $x=e$, *quando* $z=1$, *é a superfície integral que passa pela linha de equações:* $x=e$, $z=1$. *Encontra-se* $x^{-y^2} = \log x$.

**2315** — Determinar a solução da equação $xp + yq = x^2+y^2$, que satisfaz à equação $yp - xq = 0$. R: *Integrando a 2.ª equação, encontra-se para solução geral* $z=\varphi(x^2+y^2)$. *Seguidamente, determina-se* $\varphi$ *de modo que a 1.ª equação seja satisfeita. Encontra-se* $z=(x^2+y^2)/2$.

**2316** — Integrar a equação $(z-1/x)\,dx + 2y\,dy + x\,dz = 0$ e determinar a superfície integral que passa pelo ponto $(1,1,1)$. R: *Encontra-se fàcilmente (sendo conveniente notar-se que a expressão dada é uma diferencial exacta)* $xz - \log x + y^2 = k$. *A superfície integral que passa pelo ponto* $(1,1,1)$ *é* $xz - \log x + y^2 = 2$.

**2317** — Determinar a equação geral das superfícies tais que a distância de qualquer dos seus pontos $M$ ao eixo $OZ$ é igual à distância da origem $O$ ao ponto $P$ em que a normal corta o plano $xoy$. R: *A equação de derivadas parciais que traduz o problema é* $p^2 z + q^2 z + 2xp + 2yq = 0$. *O método de Charpit conduz fàcilmente ao integral completo* $\frac{z^2}{2} + \frac{(xc_1+y)^2}{c_1^2+1} = c_2$.

[*Acidentalmente, encontra-se a solução* $p=0$ *e* $q=0$, *à qual correspondem os planos* $z=c$, *onde a propriedade anunciada é evidente*].

Soluções dos n.os 2314 a 2317 de Laureano Barros.

# MECÂNICA RACIONAL

**I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de freqüência, 1945.**

**2318** — É dado um sistema qualquer de vectores axiais. Determiner o lugar geométrico dos pontos do espaço, em relação aos quais o momento resultante do sistema existe sôbre uma recta que passa pela origem dos eixos coordenados.

**2319** — Achar as curvas de estacionaridade do integral $I=\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ que satisfazem à condição $\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx = 3$, sendo $y(0)=1$, $y(1)=1$.

**2320** — Num cone de revolução, a densidade, em cada ponto $P$, é proporcional a $e^x$, sendo $x$ a distância do vértice ao plano da secção recta que passa por $P$. Achar o centro de gravidade do cone.

**2321** — Resolver a equação integral

$$x = \varphi(x) - \lambda \int_0^1 xy^2 \varphi(y)\,dy .$$

**I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência, 1945.**

**2322** — É dado um círculo de centro $O$, e um ponto $P$ no interior do círculo. São dadas duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, perpendiculares entre si e passando pelo ponto $P$. Mostrar que o vector único, equivalente ao sistema $P-A$, $P-B$, $P-C$, $P-D$, passa pelo centro e é igual a $2(P-O)$.

**2323** — Achar as curvas de estacionaridade do integral $I=\int_0^1 y'^2\,dx$ que satisfazem à condição $\int_0^1 (y-y'^2)\,dx = 1/6$, sendo $y(0)=0$, $y(1)=1/4$.

**2324** — Achar o centro de gravidade dum hemisfério, sendo a densidade, em cada ponto, proporcional ao quadrado da distância dêsse ponto ao centro do hemisfério.

**2325** — Achar o desenvolvimento de $x^2$ em série trigonométrica, no intervalo $(0, 2\pi)$.

## II — ESCOLAS ESTRANGEIRAS

**Univ. Manchester — Ordinary Degree of B. Sc. — Exame final — 15 Dez. 1944.**

### Matemáticas Puras

**2326** — Determine $\frac{dy}{dx}$ sendo $y=x^{x+y}$.

**2327** — Dado $y=\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$, prove que $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x\sqrt{1-x^4}}$.

**2328** — Estabeleça por uma forma clara, mas sem demonstração, um «test» suficiente para a convergência das séries alternas. Prove que a série seguinte é convergente $\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+\frac{(1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\cdots$.

**2329** — Determine os valores de $x$ para os quais é convergente a série:

$$\frac{x}{1.3}-\frac{x^2}{3.5}+\frac{x^3}{5.7}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots.$$

**2330** — Em coordenadas cartesianas uma curva é representada paramètricamente pelas equações $x=x(t)$, $y=y(t)$. Se $(\alpha,\beta)$ é o centro de curvatura prove que

$$\alpha=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},\quad \beta=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},$$

onde as derivadas são tomadas em relação ao parâmetro $t$.

Mostre que o centro de curvatura no ponto $\theta$ da curva $x=a\cos^3\theta$, $y=a\,\mathrm{sen}^3\theta$ tem por coordenadas: $a\cos\theta.(1+2\,\mathrm{sen}^2\theta)$, $a\,\mathrm{sen}\,\theta.(1+2\cos^2\theta)$. Deduza daqui que a equação da evoluta é

$$(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}=2a^{2/3}.$$

**2331** — Sendo $\varphi$ o ângulo do raio vector e da tangente à curva, mostre que $\mathrm{tg}\,\varphi=r\frac{d\theta}{dr}$.

Seja $P$ um ponto da parábola $2a/r=1+\cos\theta$ e $S$ o foco. Seja $Q$ um ponto sôbre $SP$, entre $S$ e $P$ e a uma distância $a$ de $P$. Se designarmos por $\varphi$ o ângulo de $SQ$ com a tangente ao logar geométrico de $Q$, prove que $\mathrm{tg}\,\varphi=1/2\,.\,\mathrm{sen}\,\theta$.

**2332** — *a)* Defina $\cosh x$ e mostre que nunca é inferior a 1; *b)* Mostre que $\mathrm{arg}\cosh x=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$; *c)* Prove que $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}=\log\frac{5+2\sqrt{6}}{3+2\sqrt{2}}$.

**2333** — Calcule $\int(x-1)^{-3}(x+1)^{-1}dx$.

Mostre que $\int_0^{\pi/4}\sec^3 x\,dx=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$.

**2334** — Integre as equações diferenciais seguintes:

1) $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=xe^x$

2) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=2\,\mathrm{sen}\,x+3\cos x$.

**2335** — Integre as seguintes equações diferenciais:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+xy+y^2}{xy}$ 2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-3y+7}{4x-6y}$.

**2336** — Represente gràficamente a curva $x=a\,\mathrm{sen}^2\theta$, $y=a\,\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{tg}\,\theta$. Mostre que a área compreendida entre a curva e a sua assíntota é $3\pi a^2/4$. Calcule as coordenadas do centro de gravidade desta área.

**2337** — Mostre que é uma recta o logar dos centros da família de circunferências que cortam ortogonalmente duas circunferências dadas.

Sejam $A$ e $B$ dois pontos fixos. Mostre que o logar dos pontos de intersecção de duas circunferências de centros $A$ e $B$ e cortando-se ortogonalmente é a circunferência tendo $\overline{AB}$ por diâmetro.

O exame incluía outra prova de matemáticas puras e duas de matemáticas aplicadas. Duração desta prova 3 h.

# PROBLEMAS

*As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemetica». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.*

*Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.*

## PROBLEMAS PROPOSTOS

**2338** — Se os comprimentos dos lados $a$, $b$ e $c$ de um triângulo plano estão em progressão aritmética, os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ (opostos respectivamente a $a$ e $b$) satisfazem à relação $\cos\widehat{A}+\mathrm{sen}\,\widehat{A}\,\mathrm{cotg}\,B/2=2$.

**2339** — Dados quatro pontos, construir um tetraedro que admita êsses pontos para centros de gravidade das faces. Discussão.

**2340** — Dadas duas circunferências $C_1$ e $C_2$ e uma recta $r$, determinar o ponto $P$ da recta $r$, tal que as tangentes por êle tiradas a $C_1$ e $C_2$ tenham o mesmo comprimento. Discussão.

**2341** — Circunscrever a uma circunferência dada um triângulo rectângulo cujos comprimentos dos lados estejam em progressão geométrica.

**2342** — Determinar todos os pares de inteiros cujo produto é igual ao quádruplo da sua soma.

Problemas n.os 2338 a 2342 propostos por José Morgado J.or.