demonstração, um «test» suficiente para a convergência das séries alternas. Prove que a série seguinte é convergente $\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+\frac{(1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\cdots$.

2329 — Determine os valores de x para os quais é convergente a série:

$$\frac{x}{1.3}-\frac{x^2}{3.5}+\frac{x^3}{5.7}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots.$$

2330 — Em coordenadas cartesianas uma curva é representada paramètricamente pelas equações $x=x(t)$, $y=y(t)$. Se (α,β) é o centro de curvatura prove que

$$\alpha=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'}, \quad \beta=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},$$

onde as derivadas são tomadas em relação ao parâmetro t.

Mostre que o centro de curvatura no ponto θ da curva $x=a\cos^3\theta$, $y=a\,\text{sen}^3\theta$ tem por coordenadas: $a\cos\theta.(1+2\,\text{sen}^2\theta)$, $a\,\text{sen}\,\theta.(1+2\cos^2\theta)$. Deduza daqui que a equação da evoluta é

$$(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}=2a^{2/3}.$$

2331 — Sendo φ o ângulo do raio vector e da tangente à curva, mostre que $\text{tg}\,\varphi=r\frac{d\theta}{dr}$.

Seja P um ponto da parábola $2a/r=1+\cos\theta$ e S o foco. Seja Q um ponto sôbre SP, entre S e P e a uma distância a de P. Se designarmos por φ o ângulo de SQ com a tangente ao logar geométrico de Q, prove que $\text{tg}\,\varphi=1/2.\text{sen}\,\theta$.

2332 — *a)* Defina $\cosh x$ e mostre que nunca é inferior a 1; *b)* Mostre que $\text{arg}\cosh x=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$; *c)* Prove que $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}=\log\frac{5+2\sqrt{6}}{3+2\sqrt{2}}$.

2333 — Calcule $\int(x-1)^{-3}(x+1)^{-1}dx$.

Mostre que $\int_0^{\pi/4}\sec^3x\,dx=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$.

2334 — Integre as equações diferenciais seguintes:

1) $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=xe^x$

2) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=2\,\text{sen}\,x+3\cos x$.

2335 — Integre as seguintes equações diferenciais:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+xy+y^2}{xy}$ 2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-3y+7}{4x-6y}$.

2336 — Represente gràficamente a curva $x=a\,\text{sen}^2\theta$, $y=a\,\text{sen}^2\theta\,\text{tg}\,\theta$. Mostre que a área compreendida entre a curva e a sua assíntota é $3\pi a^2/4$. Calcule as coordenadas do centro de gravidade desta área.

2337 — Mostre que é uma recta o logar dos centros da família de circunferências que cortam ortogonalmente duas circunferências dadas.

Sejam A e B dois pontos fixos. Mostre que o logar dos pontos de intersecção de duas circunferências de centros A e B e cortando-se ortogonalmente é a circunferência tendo $\overline{AB}$ por diâmetro.

O exame incluía outra prova de matemáticas puras e duas de matemáticas aplicadas. Duração desta prova 3 h.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemetica». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2338—Se os comprimentos dos lados a, b e c de um triângulo plano estão em progressão aritmética, os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ (opostos respectivamente a a e b) satisfazem à relação $\cos\widehat{A}+\text{sen}\,\widehat{A}\,\text{cotg}\,B/2=2$.

2339 — Dados quatro pontos, construir um tetraedro que admita êsses pontos para centros de gravidade das faces. Discussão.

2340 — Dadas duas circunferências C_1 e C_2 e uma recta r, determinar o ponto P da recta r, tal que as tangentes por êle tiradas a C_1 e C_2 tenham o mesmo comprimento. Discussão.

2341 — Circunscrever a uma circunferência dada um triângulo rectângulo cujos comprimentos dos lados estejam em progressão geométrica.

2342 — Determinar todos os pares de inteiros cujo produto é igual ao quádruplo da sua soma.

Problemas n.os 2338 a 2342 propostos por José Morgado J.or.

SOLUÇÕES RECEBIDAS

2266 — Dividem-se os lados de um triângulo equilátero T em n partes iguais e pelos pontos de divisão tiram-se paralelas aos lados, cobrindo-se assim T por meio de triângulos equiláteros iguais. T_i. Mostre que a área do círculo inscrito no triângulo T é igual á soma das áreas dos círculos inscritos nos triângulos T_i. R: *Dividindo os lados do triângulo equilátero em 4 partes iguais e procedendo de acôrdo com o enunciado, obter-se-ão* n^2 *triângulos iguais, designados por* T_i. *Por conseguinte basta demonstrar que a área* S *do círculo inscrito no triângulo* T *é igual a* n^2 *vezes a área* S' *de cada um dos círculos inscritos nos triângulos* T_i. *Tem-se* $S=\pi . h^2/9$ *e* $S'=\pi . h'^2/9$, *onde* h *é a altura correspondente a* T *e* h' *a altura correspondente a* T_i. *E como* $h=nh'$ *vem* $S=\pi . h'^2 . n^2/9 = n^2/S'$.

Solução de C. de Albuquerque Paixão (aluno do 2.º ano d I. S. A.).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

55 — GOMES, A. Pereira — **Introdução ao Estudo duma Noção de Funcional em Espaços sem Pontos.** «Port. Math., Vol. 5, Fasc. 1, 1946.

Quando se lança uma visão de conjunto sôbre o desenvolvimento da matemática nos últimos quarenta anos, o que ressalta como característica mais saliente, que se acentua de dia para dia, é a importância dominante assumida pela Álgebra, enquanto estudo sistemático dos espaços algébricos, quere dizer, dos conjuntos cujos elementos podem ser associados por uma ou mais leis operatórias de carácter geral e abstrato.

Esta maneira de conceber a Álgebra, cujo início podemos filiar no estudo, em separado, das relações lógicas que condicionam as regras de cálculo e de ordenação dos próprios números reais, atingiu uma tal relevância e repercutiu por tal forma para além do seu âmbito primitivo, que é hoje um dos temas preferidos dos investigadores, na Europa como na América, precisamente o de levar às suas últimas conseqüências, quere dizer, ao máximo de generalidade das noções de base de cada domínio particular, a *algebrização* de toda a matemática.

Quando René Baire afirmava, em 1904, com uma visão surpreendente: — «il est alors légitime de rechercher s'il n'est pas possible, en remontant aux définitions premières, d'en tirer des conséquences intéressantes tout en leur conservant autant que possible leur généralité. On peut aussi se proposer de constituer, à côté de l'analyse courante, une autre branche de l'Analyse» — mal podia imaginar o ponto em que hoje nos encontramos. Na verdade, a Álgebra Moderna e a Análise Geral, demonstram pelos resultados que encerram a viabilidade do programa anunciado por Baire e a fecundidade, o alcance do processo de algebrização a que há pouco aludimos.

E o trabalho do Dr. A. Pereira Gomes, de que pretendemos dar uma notícia nesta revista, enquadra-se nessa linha geral e vem confirmar que os investigadores portugueses se encontram no bom caminho, como de resto foi acentuado recentemente pelo matemático francês A. Denjoy, a propósito do último fascículo da «Portugaliae Mathematica».

Por êste lado, há pois que insistir na orientação já traçada e nada mais.

Vejamos agora o trabalho do Dr. A. Pereira Gomes.

O autor, situando-se na corrente a que acabamos de fazer referência propôs-se estudar em que medida é possível generalizar a espaços muito mais gerais do que a recta euclideana, a noção de funcional.

Ora, uma vez que em capítulos importantes da teoria das funções da variável real, nomeadamente na mensurabilidade à Lebesgue se utiliza como noção fundamental o conjunto $M(\lambda)$ — parte do espaço — em que uma função $f(x)$ é maior ou igual a λ, noção em que o ponto x só aparece de uma maneira subsidiária, logo se compreende a idéia, que o autor teve, de partir precisamente de $M(\lambda)$ para fazer o estudo — algébrico e topológico — das funcionais em espaços sem pontos ou, de um modo mais preciso, *em estruturas*.

Assim, completando um resultado de Carathéodory (1) conseguiu caracterizar as funções reais da variável real em termos de $M(\lambda)$ — teorema 2, pág. 5.

Depois, a circunstância de esta caracterização se fazer exclusivamente com as noções de conjunto, e de intersecção e união de uma infinidade numerável de conjuntos, noções que conservam o seu significado em qualquer σ-estrutura, abre o caminho para o problema fundamental — noção de funcional em estruturas.

Há, porém, que fixar o tipo de estrutura e surge

(1) Nota bibliográfica do autor, pág. 371.