demonstração, um «test» suficiente para a convergência das séries alternas. Prove que a série seguinte é convergente $\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+\frac{(1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\cdots$.

2329 — Determine os valores de x para os quais é convergente a série:

$$\frac{x}{1.3}-\frac{x^2}{3.5}+\frac{x^3}{5.7}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots.$$

2330 — Em coordenadas cartesianas uma curva é representada paramètricamente pelas equações $x=x(t)$, $y=y(t)$. Se (α,β) é o centro de curvatura prove que

$$\alpha=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},\quad \beta=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},$$

onde as derivadas são tomadas em relação ao parâmetro t.

Mostre que o centro de curvatura no ponto θ da curva $x=a\cos^3\theta$, $y=a\operatorname{sen}^3\theta$ tem por coordenadas: $a\cos\theta.(1+2\operatorname{sen}^2\theta)$, $a\operatorname{sen}\theta.(1+2\cos^2\theta)$. Deduza daqui que a equação da evoluta é

$$(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}=2a^{2/3}.$$

2331 — Sendo φ o ângulo do raio vector e da tangente à curva, mostre que $\operatorname{tg}\varphi=r\frac{d\theta}{dr}$.

Seja P um ponto da parábola $2a/r=1+\cos\theta$ e S o foco. Seja Q um ponto sôbre SP, entre S e P e a uma distância a de P. Se designarmos por φ o ângulo de SQ com a tangente ao logar geométrico de Q, prove que $\operatorname{tg}\varphi=1/2.\operatorname{sen}\theta$.

2332 — *a)* Defina $\cosh x$ e mostre que nunca é inferior a 1; *b)* Mostre que $\operatorname{arg}\cosh x=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$; *c)* Prove que $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}=\log\frac{5+2\sqrt{6}}{3+2\sqrt{2}}$.

2333 — Calcule $\int(x-1)^{-3}(x+1)^{-1}dx$.

Mostre que $\int_0^{\pi/4}\sec^3x\,dx=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$.

2334 — Integre as equações diferenciais seguintes:

1) $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=xe^x$

2) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=2\operatorname{sen}x+3\cos x$.

2335 — Integre as seguintes equações diferenciais:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+xy+y^2}{xy}$ 2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-3y+7}{4x-6y}$.

2336 — Represente gràficamente a curva $x=a\operatorname{sen}^2\theta$, $y=a\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{tg}\theta$. Mostre que a área compreendida entre a curva e a sua assíntota é $3\pi a^2/4$. Calcule as coordenadas do centro de gravidade desta área.

2337 — Mostre que é uma recta o logar dos centros da família de circunferências que cortam ortogonalmente duas circunferências dadas.

Sejam A e B dois pontos fixos. Mostre que o logar dos pontos de intersecção de duas circunferências de centros A e B e cortando-se ortogonalmente é a circunferência tendo $\overline{AB}$ por diâmetro.

O exame incluía outra prova de matemáticas puras e duas de matemáticas aplicadas. Duração desta prova 3 h.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemetica». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2338 — Se os comprimentos dos lados a, b e c de um triângulo plano estão em progressão aritmética, os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ (opostos respectivamente a a e b) satisfazem à relação $\cos\widehat{A}+\operatorname{sen}\widehat{A}\operatorname{cotg}B/2=2$.

2339 — Dados quatro pontos, construir um tetraedro que admita êsses pontos para centros de gravidade das faces. Discussão.

2340 — Dadas duas circunferências C_1 e C_2 e uma recta r, determinar o ponto P da recta r, tal que as tangentes por êle tiradas a C_1 e C_2 tenham o mesmo comprimento. Discussão.

2341 — Circunscrever a uma circunferência dada um triângulo rectângulo cujos comprimentos dos lados estejam em progressão geométrica.

2342 — Determinar todos os pares de inteiros cujo produto é igual ao quádruplo da sua soma.

Problemas n.os 2338 a 2342 propostos por José Morgado J.or.