SOLUÇÕES RECEBIDAS

2266 — Dividem-se os lados de um triângulo equilátero T em n partes iguais e pelos pontos de divisão tiram-se paralelas aos lados, cobrindo-se assim T por meio de triângulos equiláteros iguais. T_i. Mostre que a área do círculo inscrito no triângulo T é igual á soma das áreas dos círculos inscritos nos triângulos T_i. R: *Dividindo os lados do triângulo equilátero em 4 partes iguais e procedendo de acôrdo com o enunciado, obter-se-ão* n^2 *triângulos iguais, designados por* T_i. *Por conseguinte basta demonstrar que a área* S *do círculo inscrito no triângulo* T *é igual a* n^2 *vezes a área* S' *de cada um dos círculos inscritos nos triângulos* T_i. *Tem-se* $S=\pi \cdot h^2/9$ *e* $S'=\pi \cdot h'^2/9$, *onde* h *é a altura correspondente a* T *e* h' *a altura correspondente a* T_i. *E como* $h=nh'$ *vem* $S=\pi \cdot h'^2 \cdot n^2/9 = n^2/S'$.

Solução de C. de Albuquerque Paixão (aluno do 2.° ano d I. S. A.).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

55 — GOMES, A. Pereira — **Introdução ao Estudo duma Noção de Funcional em Espaços sem Pontos.** «Port. Math., Vol. 5, Fasc. 1, 1946.

Quando se lança uma visão de conjunto sôbre o desenvolvimento da matemática nos últimos quarenta anos, o que ressalta como característica mais saliente, que se acentua de dia para dia, é a importância dominante assumida pela Álgebra, enquanto estudo sistemático dos espaços algébricos, quere dizer, dos conjuntos cujos elementos podem ser associados por uma ou mais leis operatórias de carácter geral e abstrato.

Esta maneira de conceber a Álgebra, cujo início podemos filiar no estudo, em separado, das relações lógicas que condicionam as regras de cálculo e de ordenação dos próprios números reais, atingiu uma tal relevância e repercutiu por tal forma para além do seu âmbito primitivo, que é hoje um dos temas preferidos dos investigadores, na Europa como na América, precisamente o de levar às suas últimas conseqüências, quere dizer, ao máximo de generalidade das noções de base de cada domínio particular, a *algebrização* de toda a matemática.

Quando René Baire afirmava, em 1904, com uma visão surpreendente: — «il est alors légitime de rechercher s'il n'est pas possible, en remontant aux définitions premières, d'en tirer des conséquences intéressantes tout en leur conservant autant que possible leur généralité. On peut aussi se proposer de constituer, à côté de l'analyse courante, une autre branche de l'Analyse» — mal podia imaginar o ponto em que hoje nos encontramos. Na verdade, a Álgebra Moderna e a Análise Geral, demonstram pelos resultados que encerram a viabilidade do programa anunciado por Baire e a fecundidade, o alcance do processo de algebrização a que há pouco aludimos.

E o trabalho do Dr. A. Pereira Gomes, de que pretendemos dar uma notícia nesta revista, enquadra-se nessa linha geral e vem confirmar que os investigadores portugueses se encontram no bom caminho, como de resto foi acentuado recentemente pelo matemático francês A. Denjoy, a propósito do último fascículo da «Portugaliae Mathematica».

Por êste lado, há pois que insistir na orientação já traçada e nada mais.

Vejamos agora o trabalho do Dr. A. Pereira Gomes.

O autor, situando-se na corrente a que acabamos de fazer referência propôs-se estudar em que medida é possível generalizar a espaços muito mais gerais do que a recta euclideana, a noção de funcional.

Ora, uma vez que em capítulos importantes da teoria das funções da variável real, nomeadamente na mensurabilidade à Lebesgue se utiliza como noção fundamental o conjunto $M(\lambda)$ — parte do espaço — em que uma função $f(x)$ é maior ou igual a λ, noção em que o ponto x só aparece de uma maneira subsidiária, logo se compreende a idéia, que o autor teve, de partir precisamente de $M(\lambda)$ para fazer o estudo — algébrico e topológico — das funcionais em espaços sem pontos ou, de um modo mais preciso, *em estruturas*.

Assim, completando um resultado de Carathéodory (1) conseguiu caracterizar as funções reais da variável real em termos de $M(\lambda)$ — teorema 2, pág. 5.

Depois, a circunstância de esta caracterização se fazer exclusivamente com as noções de conjunto, e de intersecção e união de uma infinidade numerável de conjuntos, noções que conservam o seu significado em qualquer σ-estrutura, abre o caminho para o problema fundamental — noção de funcional em estruturas.

Há, porém, que fixar o tipo de estrutura e surge

(1) Nota bibliográfica do autor, pág. 371.

naturalmente esta pergunta: ¿ onde ir buscar o critério da sua escôlha?

Em primeiro lugar, ao que já está condicionado pelo próprio teorema 2, isto é, a que se deve tratar de uma σ-estrutura; em segundo lugar, aos objectivos finais de todo o trabalho, isto é, aos de chegar a uma noção de funcional que não seja uma construção artificial, sem quaisquer ligações com o caso ordinário das funções $f(x)$, definidas na recta euclideana, mas sim um conjunto significativo de propriedades algébricas e topológicas, que lhe deem verdadeiro interêsse e utilidade.

Ora, foi exactamente com base nesse critério que o autor se fixou numa σ-Algebra de Boole topológica.

σ-Álgebra de Boole significa—consultar todo o § 2.º — uma σ-estrutura distributiva e complementada. Como exemplos podemos citar o próprio espaço de pontos, a álgebra dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue (ou à Borel), módulo conjuntos de medida nula (pags. 14).

Quanto às características topológicas, são analisadas com um cuidado especial no § 3, à base da noção geral de *estrutura topológica*.

O autor, que iniciou os seus estudos com o Prof. António Monteiro, actualmente na Universidade do Rio de Janeiro, foi particularmente feliz na redacção dêste parágrafo. A originalidade dos resultados ou da exposição dos assuntos, aparece valorizada pela maneira como estão ordenados.

Assim, partindo da noção de estrutura topológica, tomada como estrutura em que está definido um operador de *fecho* — $\overline{A}\supset A$, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$ — ou de *interior* — $\underline{A}\subset A$, $\underline{A\cap B}=\underline{A}\cap\underline{A}$, $\underline{\underline{A}}=\underline{A}$, e estudando as suas propriedades consegue dar (pags. 24 e 25) as noções de compacidade, propriedade de Cantor, etc., generalizando a estruturas dêste tipo geral, algumas das mais importantes proposições do espaço ordinário.

Entrando depois no caso particular das Álgebras de Boole topológicas, as duas topologias — superior à base do *fecho* e inferior, à base do *interior* — fundem-se numa só por intermédio do *complemento* e o similé com o espaço ordinário é mais perfeito ainda.

Através do *axioma de semi-regularidade*—para cada elemento aberto $G\neq 0$ existe um elemento aberto $H\neq 0$ tal que $\overline{H}\subset G$ consegue dar nas estruturas o equivalente a um axioma de separação[1] dos espaços de pontos e termina êste capítulo com a demonstração do teorema de densidade de Baire: «numa Álgebra de Boole topológica, semi-regular e com a propriedade de Cantor, todo o residual[1] é denso».

Confrontando êste enunciado com o primitivo, do próprio Baire «Je dis que si K est un ensemble de première catégorie par rapport à l'ensemble parfait H, il y a, dans tout intervale contenant à son intérieur des points de H, des points que n'appartiennent pas à K», tem-se uma medida da fecundidade dos métodos da matemática moderna e do seu desenvolvimento nos últimos 40 anos.

Caracterizada no capítulo I, como acabamos de ver, a estrutura fundamental, é nos dois capítulos seguintes que o autor desenvolve pròpriamente o estudo das funcionais, tratando sucessivamente da *definição, propriedades algébricas* e *propriedades topológicas*.

Definição — é dada a partir da transposição completa para uma σ-Álgebra de Boole do teorema 2, já citado. Diz-se[2] *que se define uma funcional* f *baseada na estrutura* E (*ou, simplesmente, na estrutura* E) *quando a cada número* λ_n *se faz corresponder univocamente um elemento* $M(\lambda_n)\in E$ *de tal forma que seja verificada a condição* $M(\lambda_n)=\bigcap_{\lambda_i<\lambda_n} M(\lambda_i)$, e ao número $-\infty$ *se faz corresponder o elemento* $M(-\infty)=I$.

Interpretando $M(\lambda_n)$ como o conjunto dos pontos da recta euclidiana em que uma dada função $f(x)$ *e maior* ou igual a λ_n, temos o teorema 2, válido para qualquer função $f(x)$. E sem ter presente êste facto a definição parece um tanto forçada.

De resto, o autor mais adiante — pags. 39-40 — acrescenta algumas considerações com o fim de dizer pròpriamente *o que é uma funcional.* Mas com os elementos aí fornecidos não nos parece que se avance efectivamente nesse esclarecimento. A essência do que seja uma funcional deve encontrar-se muito mais fàcilmente, como deduzo de uma sugestão do Dr. Hugo Ribeiro, na *análise da aplicação da recta euclidiana, onde varia* λ, *sôbre a estrutura* E, *por intermédio de* $M(\lambda)$.

Mas deixamos para outro lugar, a «Portugaliae Mathematica», o estudo dêsse problema e das suas relações com alguns outros sugeridos pelo trabalho de A. Pereira Gomes.

Muito curiosa é depois a definição de valor de uma funcional, e a distinção que é necessário fazer entre funcional com um número finito de valores e funcional em que $M(\lambda)$ é que tem um número finito de valores, distinção inoperante no espaço ordinário, o que torna

[1] Consultar: *Topologie* — Alexandroff und Hopf.

[1] Um elemento duma Álgebra de Boole topológica $[E,(-)]$ diz-se um *residual* se o seu complementar fôr de 1.ª categoria.

[2] — Pag. 33 § 4.

de facto interessante investigar qual a categoria mais geral de estrutura onde qualquer funcional toma pelo menos um valor e relacionar esta questão com a recíproca da propriedade (2.4)[1].

No § 7, ainda do Cap. II, ocupa-se das operações algébricas entre funcionais: adição, subtracção, multiplicação, potenciação, dando o respectivo $M(\lambda)$ ou $N(\lambda)$.

Vai mesmo mais longe do que Olensted[2], pois procura sujeitar às regras do cálculo, não só as funcionais finitas, as únicas por aquêle consideradas, mas também as funcionais infinitas.

E embora o problema não fique completamente resolvido, a verdade é que o autor consegue esclarecer diferentes pontos através de uma análise muito cuidadosa de cada caso.

A dificuldade parece andar toda à volta da inclusão inversa de (1,13)[3], que o autor não conseguiu demonstrar, no caso geral, conforme esclarece na nota de páginas 53.

No § 8 define supremo e ínfimo de uma funcional, estuda as suas propriedades e, depois, por relativização, obtem as noções homólogas sôbre um elemento A e E.

Demonstra, também, a equivalência entre a sua noção de funcional e a de Ortsfunktion, dada por Carathéodory[4], em termos do supremo e ínfimo em cada elemento $A \neq 0$ de uma estrutura.

No § 9, finalmente, utiliza a noção de *reduzida* para obter alguns novos resultados sôbre sucessões convergentes de funcionais.

O capítulo III — o último — é dedicado às propriedades topológicas das funcionais: noção de limite superior[5] e limite inferior, semi-continuidade, continuidade, descontinuidade, classes de Borel, classes de Baire.

Aí encontramos os homólogos dos mais importantes teoremas das funções da variável real, como por exemplo o teorema de Weierstrass sôbre as funções contínuas, que o autor enuncia nestes termos. «Se a σ-álgebra de Boole topológica $[E, (^{-})]$ possui a propriedade de Cantor, tôda a funcional contínua baseada nessa estrutura atinge o seu supremo e o seu ínfimo» — pág. 99.

Se acrescentarmos a definição de funcional-oscilação ω_f, a classificação das funcionais contínuas e descontínuas, quadro de páginas 107, as classes de Borel e de Baire, temos a prova real de que a estrutura fundamental e a definição de funcional foram bem escolhidas. Êste capítulo, só por si, honra o autor e demonstra as largas possibilidades que se abrem à nossa juventude, no campo da matemática moderna, se não lhe faltarem os meios de acesso aos bons Centros de Estudo e o convívio com verdadeiros Mestres. A «Gazeta de Matemática» aproveita esta oportunidade para mais uma vez proclamar a necessidade de subordinar inteiramente as nossas Escolas Superiores a êsse alto objectivo!

Ruy Luís Gomes

(1) Uma funcional simples toma um número finito de valores distintos.

(2) Lebesgue theory on a boolean algebra.

(3) $M(\lambda) \subset \bigcap_{\lambda_n} M_1(\lambda_n) \cup M_2(\lambda - \lambda_n)$.

(4) — [2] — Nota bibliográfica do autor.

(5) No espaço de pontos diríamos função limite superior de uma função dada $f(x)$ em cada ponto x. Consultar qualquer tratado de funções da variável real, por ex., o de Carathéodory.

56 — BELL, A. H. — A Pratical course of Mathematics. Blachie & Son Limited — London and Glasgow, 1946 (oferta do British Council).

Êste livro, escrito de acôrdo com sugestões emanadas do Ministério da Educação Inglês, contém matéria de geometria, álgebra, os fundamentos da trigonometria plana e esférica, elementos de cálculo infinitesimal e uma pequena introdução ao estudo das cónicas, e pretende servir uma vasta camada de técnicos tais como engenheiros, navegadores, membros das fôrças armadas, etc. Os assuntos são tratados ordenadamente, formando um todo em que, de um modo geral, cada capítulo é uma introdução, uma preparação, dos seguintes. Assim, por exemplo, o estudo das razões e proporções antecede imediatamente o estudo da semelhança, na geometria, e o das razões trigonométricas, seguindo-se imediatamente a resolução dos triângulos rectângulos. A trigonometria é retomada mais tarde após o estudo dos logaritmos. Muitos outros exemplos desta natureza poderiam ser dados. As demonstrações não são esquecidas apesar da feição caracterizadamente prática que lhe imprimiu o autor, servindo-se de exemplos e de esquemas geométricos, onde os gráficos abundam, esclarecendo os diversos problemas estudados, para o que concorre também uma bôa recôlha de exercícios no final de cada capítulo.

Trata-se de um excelente livro para aquêles que necessitam de rapidamente e sem desvios, estudando simplesmente o essencial, se pôr a par da técnica de cálculo hoje indispensavel a tantas profissões.

Resumidamente poderemos dizer que é um bom compêndio de matemáticas gerais elementares.

J. da Silva Paulo