ANO VII - N.º 29 GAZETA DE MATEMÁTICA AGÔSTO - 1946

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ■ ADMINISTRADOR: *J. O. Campos*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c LISBOA-N.

TOPOLOGIA E ÁLGEBRA

por **B. Eckmann** (Lausanne e Zürich)

Lição inaugural proferida em 22 de Maio de 1943 na Escola Politécnica Federal de Zürich e publicada na revista *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, LXXXIX, 1944 (1)

1. Seja-me permitido tomar para ponto de partida duas verdades simples. Uma é o célebre teorema dos poliedros de Euler: No cubo a soma do número dos vértices e do número das faces supera de dois o número das arestas. E isto é assim, não só para o cubo mas para qualquer sólido, quer êle seja regular ou irregular, simples ou não, desde que, grosso modo, tenha a forma duma esfera deformada. O segundo exemplo: se numa recta se marcam, nos dois sentidos, pontos a distâncias iguais, e se depois se enrola a recta sôbre uma circunferência, os pontos marcados ficam densos e uniformemente repartidos, sôbre tôda a circunferência — desde que a distância entre os pontos não seja precisamente uma fracção racional do perímetro da circunferência; neste caso os pontos marcados ficariam repartidos em pontos isolados e uniformemente distribuídos sôbre a circunferência.

Por agora, só quero indicar com êstes exemplos que há relações notáveis entre os mais simples objectos da intuïção espacial e os números, o cálculo. Tais relações encontram-se em tôdas as partes da Matemática, tanto nas teorias mais abstractas como nas aplicações à Física e à Técnica.

Espaço e Número — Embora apareçam quási sempre simultâneamente é-se inclinado a encará-los, à primeira vista, como coisas de natureza muito diferente, que têm dado lugar a métodos e modos de pensar, igualmente de natureza diferente; separam-se expressamente os raciocínios algébricos dos geométricos, isto é, aquêles que se referem ao cálculo daquêles que se referem ao conceito de espaço. Porém, cêdo se mostra, por uma observação mais atenta, que os dois modos de pensar estão estreitamente ligados e tão bem entrelaçados que não seria fácil traçar uma fronteira entre êles. A sua análise aprofundada e o seguimento das suas relações recíprocas são de grande valor para a compreensão de muitas partes da matemática e têm contribuído decisivamente, nos tempos modernos, para o seu desenvolvimento.

Ao procurar, no que segue, fazer notar tais conexões com algumas indicações e socorrendo-me dos mais simples exemplos, sei bem que só muito imperfeitamente posso transmitir o conhecimento da questão, que sem a efectiva caminhada das idéias na teoria e na prática a imagem fica sempre desfigurada. Assim empenhar-me-ei, em primeiro lugar, em tornar palpável a atmosfera de idéias na qual tais relações se põem em jôgo. Desculpar-me-ão quando eu no quadro desta conferência, formule muitas coisas imperfeitamente, fuja às dificuldades com aplicações demasiado gerais e, aqui ou ali, simplifique ou exagere um pouco; e, por outro lado, não se me levará a mal se, eventualmente, fôr levado a domínios científicos mais afastados e não possa evitar o uso da linguagem ali comum.

2. Quando se quer esclarecer algum traço especialmente importante dum objecto algo complicado e incompreensível, separamo-lo do resto e investigamo-lo em si mesmo; faz-se uma imagem simplificadora, do objecto, um *esquema* (ou mesmo vários) procurando esclarecê-lo sob diferentes aspectos. Nêste sentido se obtiveram e individualizaram, como esquema do cálculo a álgebra abstracta, e como esquema da descrição do espaço a geometria abstracta.

Um esquema — pense-se, por exemplo no duma máquina complicada — não é uma imagem fiel da realidade mas antes uma imagem muito incompleta e, na maior parte das vezes, deformada. Porém, o que se obtém pode aparecer-nos, mais nítido, do que a própria realidade: o esquema põe de parte o supérfluo e faz realçar, o melhor possível, o essencial; não tem a pretensão de revelar as coisas exactamente, mas só determinadas relações entre elas. Dêste modo êle compreende, muitas vezes, simultâneamente diferentes

(1) Agradecemos ao Autor e à Revista as facilidades concedidas para a publicação desta tradução.

casos análogos e facilita a compreensão das idéias fundamentais, as quais ordinàriamente estão escondidas não só atrás duma multidão de detalhes técnicos, mas também atrás duma forma exterior agradável. E não se passam as coisas muito diferentemente na matemática: precisamente quando se tem compreendido os detalhes mais ou menos complicados de cálculos automáticos ou de construções não evidentes, se sente muitas vezes, a necessidade de abranger dum golpe de vista o fio das idéias, como um todo, ordená-lo em conexões gerais, conhecer o «fundamento do método» ou a «idéia da demonstração». Desejariamos abranger tôdas as possibilidades para além das aplicações especiais e procurar dominar problemas singulares por meio de conclusões gerais; não nos satisfazemos com resultados «casuais», mas pelo contrário preguntamos pelas suas bases «profundas».

Assim, mostrou-se como particularmente vantajoso escolher da multidão de possibilidades os dois pontos de vista mais importantes, o do esquema do cálculo e o da descrição do espaço.

3. Permito-me, seguidamente, fazer sôbre o primeiro, algumas referências muito curtas e gerais, em relação com a *Álgebra.*

Na álgebra abstracta toma-se da noção de número só uma coisa, o cálculo, e abstrai-se, por completo da própria natureza dos números; êstes substituem-se por letras, e com estas se executam todas as operações, adição, multiplicação e suas inversas. Aqui copiam-se, mais ou menos perfeitamente, as regras de cálculo numérico; assim, por exemplo, porque $3+5=5+3$ também $a+b=b+a$ (lei comutativa). E isto tem êste sentido: fórmulas e resultados ficam certos quando se substituem as letras por números quaisquer. Naturalmente, ficam dêste modo, sem utilização muitas características dos números reais: por exemplo, a de representados na recta numérica constituirem um conjunto sem lacunas. Então pode-se calcular também com os números inteiros, que, contudo, sob muitos aspectos, têm outras características. Geralmente há ainda muitos outros objectos, além dos números reais ou dos inteiros, que também se podem adicionar (ou multiplicar ou adicionar e multiplicar) e para êstes tem-se precisamente o mesmo formalismo. Assim pode-se, por exemplo, adicionar ângulos com o mesmo vértice ou as rotações à volta dêste ponto; e se aqui valem as mesmas regras formais que valiam, por exemplo, para a adição dos números reais, no entanto êste sistema é completamente diferente; por repetidas adições volta-se ao zéro. Sistemas de objectos com os quais se pode efectuar uma operação, chamam-se *grupos* (mais precisamente comutativos, quando, como em todos os nossos exemplos, é válida a lei comutativa). Há também grupos que contêm só um número finito de objectos; por exemplo, tomem-se em vez de todos os ângulos ou rotações, só as rotações do octógono e seus múltiplos e numerem-se de 0 a 7; então é $1+2=3$, $2+4=6$, mas $3+5=0$, $4+7=3$, etc., e fala-se dum grupo de ordem finita (aqui 8). O grupo de ordem 2 contém só dois objectos, sejam 0 e 1 e é $1+1=0$.

A teoria dos grupos procura encontrar as relações que são comuns a todos os sistemas com uma operação e determinar todos êstes possiveis sistemas em geral. Visto que se tropeça com tais sistemas nos mais diferentes domínios, esta teoria reune idéias que aparecem na teoria dos números, na solução das equações, na teoria das funções, na física atómica, no estudo dos cristais, etc. — ela constitue para êles todos, um mesmo esquema, que é naturalmente mais complicado do que deixam prever os meus exemplos despretenciosos.

Anàlogamente se investigam os sistemas com ambas as operações (adição e multiplicação e suas inversas); chamam-se *corpos.* Abstrai-se muitas vezes, da lei comutativa da multiplicação ($a\cdot b=b\cdot a$), visto que há muitos sistemas de números onde ela não é válida e que são importantes sob muitos aspectos mesmo para aplicações na Física e na Técnica. Renunciarei aqui, a fazer mesmo só simples alusões à multidão de problemas e possibilidades que se escondem nesta noção de corpo.

A étapa essencial da Álgebra abstracta consiste em individualizar o esquema, considerar, por assim dizer cada grupo e cada corpo como um mundo no qual entre os objectos não há outras relações do que as puras operações de cálculo. O que aí nos ocupa são portanto, acontecimentos a analizar por meio de algumas étapas. Resulta assim um edifício abstracto de raro acabamento e de rara harmonia, cheio de valor em tôdas as aplicações — na matemática ou no mundo que nos rodeia.

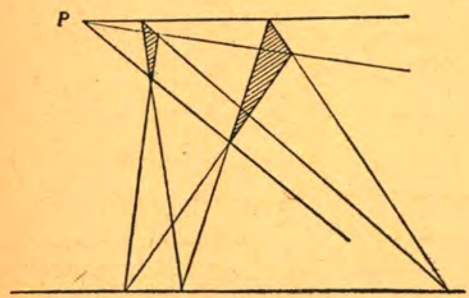
A Álgebra Abstracta não é uma velha disciplina; teve origem na segunda metade do século XIX com Dedekind e Kronecker, e foi pela primeira vez, em época mais recente, reanimada por Emmy Noether e pelo seu grupo.

4. Agora quanto à *Geometria,* quanto ao esquema do espaço. Como propriedades e relações mais simples que se poderiam extrair da noção extremamente complexa de espaço, aparecem, seguramente, em primeiro lugar, aquelas que tratam de ligação de pontos, de intersecção de rectas, de geração de planos, etc., portanto mais ou menos o que se designa por *Geometria projectiva.* Abstrair-se-á aqui outra vez, da natureza dos objectos, pontos, rectas, planos e atender-se-à só às suas relações mútuas; obtém-se assim uma teoria, que na sua simplicidade e generalidade se pode confrontar muito bem com a álgebra abstracta. Mas

se se julga agora que desta maneira se podem distinguir, rigorosamente, os raciocínios algébricos dos geométricos, que se pode separar dum modo preciso o que se enraíza ou se pode demonstrar num e no outro esquema — então cai-se num êrro.

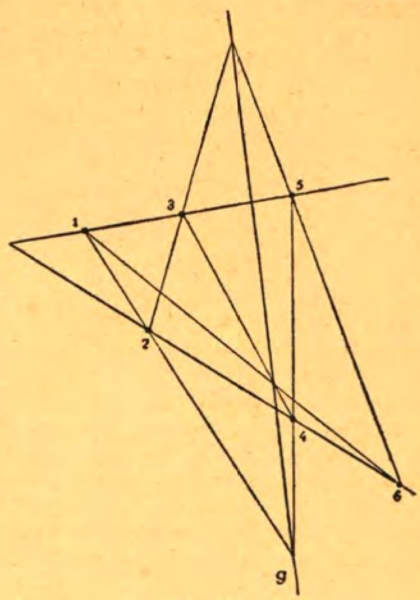
Trata-se bem duma diferença de método, mas não duma diferença de conteúdo. Mostrou-se, e isto é um dos resultados das célebres investigações de Hilbert [1] [(1)] sôbre os «Fundamentos da Geometria», que ambas as teorias, por mais diferentes que as suas origens intuitivas possam ser, exprimem precisamente o mesmo (caso se tome a geometria projectiva do espaço, a plana não basta !). Isto pouco espantará, talvez, a quem estiver familiarizado com a «geometria analítica» ; nesta, é um ponto do plano substituído por dois números, as suas coordenadas (como é familiar a todos nas cartas topográficas), um ponto do espaço substituído por três números, e as construções geométricas substituem-se pelo cálculo com êstes números e reciprocamente. Assim pode por exemplo, apontar-se um canhão com o auxílio de coordenadas e de cálculos — e, também, atingir efectivamente o alvo !

Mas a coincidência é mais profunda ; isto resulta de que as noções fundamentais da geometria projectiva (isto é, projecção, secção, geração) correspondem analiticamente às mais simples operações do cálculo, tais como as podemos efectuar não só com os números reais mas em cada corpo. Assim a intersecção de rectas no plano ou de planos no espaço,por exemplo, não significa senão a solubilidade de equações lineares. A analogia prolonga-se até às regras fundamentais : à regra $a\,(bc) = (ab)\,c$, que é indispensável em cada sistema de números, corresponde a figura de incidência no plano conhecida por«teorema de Desargues» (fig 1;



(Fig. 1)

quando os vértices de dois triângulos ficam nos três raios que partem de P, os prolongamentos dos seus lados devem intersectar-se em pontos duma recta g — caso nos encontremos num plano que seja parte da geometria do espaço ; nêste caso reconhece-se imediatamente a justeza, se a figura se considera como fotografia duma figura do espaço). E a regra de cálculo $a \cdot b = b \cdot a$ corresponde ao «teorema de Pascal» (fig. 2; considerem-se os ângulos dum hexágono 123456



(Fig. 2)

e verifica-se então que os três pontos de incidência (12) (45), (23) (56), (34) (61) ficam sôbre uma recta g).

Do ponto de vista abstrato chamar-se-há espaço projectivo a cada sistema de objectos no qual se podem efectuar as operações projectivas de incidência de rectas, etc. mesmo quando êste sistema não tenha muito que ver com o nosso espaço empírico. Então há — anàlogamente ao que é possível com o cálculo nos diferentes sistemas de números da álgebra abstracta — diferentes geometrias projectivas ; mas pode tratar-se cada uma delas como geometria analítica desde que se escôlha para coordenadas um sistema de números apropriado. A geometria determina as propriedades, do seu próprio sistema de números (corpo), mais adequado (por exemplo — ao contrário do teorema de Desargues — o teorema de Pascal nem sempre é válido, donde resulta que, neste caso, no corpo correspondente não é válida a lei comutativa $a \cdot b = b \cdot a$) . A cada geometria projectiva corresponde um sistema de números e recìprocamente : justifica-se assim bem que se fale com, Hermann Weyl, duma «harmonia preestabelecida entre a geometria e a álgebra». Vêmo-nos reconduzidos à concepção dos gregos, segundo a

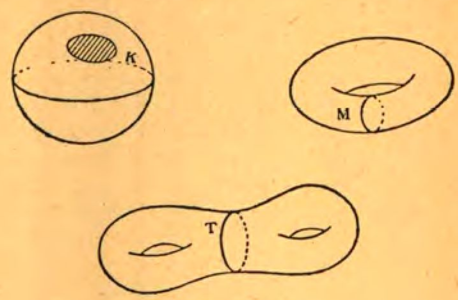
(1) Êstes números [1], etc. referem-se à literatura indicada no fim desta exposição.

qual um domínio de coisas determina uma noção de número a êle adequada. Esta concepção teve que ceder, durante muito tempo, a uma bem explicável situação de primasia dos números (reais), mas nos últimos anos, sobressaíu outra vez na Física duma maneira particularmente impressionante. Mostrou-se ali que os números reais são bem apropriados para a descrição de acontecimentos macroscópios e medidas experimentais, mas não para a descrição dos sistemas de dimensões atómicas; em lugar dêles aparecem, aqui, outros sistemas de números nos quais, antes do mais, não é válida a lei comutativa $a \cdot b = b \cdot a$ e percebe-se bem, como às suas propriedades algébricas correspondem certas propriedades físicas (carga, velocidade de rotação própria, etc.).

5. Deve, portanto, assentar-se em que a parte considerada como particularmente simples da descrição de espaço, a geometria projectiva, nos reconduz precisamente à álgebra abstracta; chega a vez de procurar outras idéias saídas da pura noção de espaço, que sendo geométricas tenhamos o direito de comparar com as algébricas. E isto também porque, com o que dissemos até agora, não foram tomadas em linha de conta muitas propriedades do espaço e do número. E o que se esclarece já com o exemplo simples dos *números reais*.

Quando nós só os adicionamos e multiplicamos, como o faz o algebrista puro, consideramo-los como objectos isolados, com os quais se passa, de certa maneira, duns para os outros discontìnuamente, visto que se tratam tal como os números inteiros ou os grupos finitos. Não se pensa então no facto de que êles constituem ao mesmo tempo uma variedade contínua, sem lacunas — a recta numérica, a escala — na qual se pode passar, contínuamente dum número para outro e se pode subdividir ilimitadamente qualquer intervalo tão finamente quanto se queira. Em oposição à concepção algébrica, na qual se encaram os objectos isolados, sem consideração pela sua proximidade, coloca-se uma outra que os liga, com utilidade, com as suas vizinhanças e para a qual é decisiva a conexão de continuidade do todo; a concepção topológica.

Na *Topologia* ou análise situs, como anteriormente ela se chamou, estudam-se aquelas propriedades de figuras geométricas que se referem precisamente às suas conexões de continuidade, mas não à grandeza, forma, comprimento; isto é, aquelas propriedades que não mudam por deformações contínuas, por qualquer passagem que nada separe do que esteja unido e nada una do que esteja separado. Pense-se, por exemplo, numa circunferência e depois numa outra que foi mal desenhada à mão: sem dúvida que houve grande perturbação nas propriedades (simetria, comprimento, forma), mas ficou uma linha simples fechada; não seria êste o caso se lhe tivessemos feito um laço ou a tivessemos partido. No teorema de Euler dos poliedros, recordado no início desta exposição trata-se de qualquer coisa que sucede a tôdas as superfícies e poliedros que «são da mesma espécie da superfície esférica», isto é, que se deixam deformar nela; podem ser encurvadas, diferentes na forma e grandeza, mas é sempre o número vértices + o das faces — o das arestas igual a 2. Assim como na geometria elementar não é necessário distinguir entre duas figuras congruentes, também não há topològicamente nenhuma diferença entre as superfícies esférica, do cubo, do oval, etc., mas já há entre a esférica e a anelar e a dupla superfície anelar (veja fig 3). Que



(Fig. 3)

não é possível deformar, contìnuamente, qualquer delas noutra resulta já da consideração de linhas fechadas sôbre tais superfícies; há aqui diferentes possibilidades: curvas que se podem reduzir a um ponto, aquelas que limitam qualquer coisa e aquelas para as quais isto se não dá (na fig. 3 estão representados diferentes casos; uma circunferência K na surpefície esférica limita — o interior desaparece quando se corta ao longo da circunferência — e é ainda redutivel a um ponto; o «circulo de gola» T, na dupla superfície anelar limita — por exemplo a metade esquerda — mas não se deixa reduzir a um ponto; ao «meridiano» M sôbre a superfície anelar não sucede nem uma nem outra coisa.

Das diferenças entre estas superfícies ressaltam propriedades topológicas da *forma*. Há também as da *situação:* dois anéis entrelaçados não se deixam separar sem quebra; um nó não se deixa transformar numa circunferência por uma deformação topológica do espaço (fig. 4). Trata-se em cada caso da mesma figura que porém, pode estar de diferentes maneiras.

Um núcleo topológico reside nas mais diferentes teorias matemáticas e é, freqüentemente muito vantajoso pô-lo em evidência nos teoremas e fórmulas. Assim, em particular, considerar na teoria das funções analíticas, com base na idéia de Riemann, a totalidade dos elementos de função duma função analítica como uma superfície (veja [3]); dois teoremas, importantes tratam de curvas sôbre esta superfície: O teorema do integral de Cauchy que diz que o inte-

(Fig. 4)

gral ao longo de cada curva fechada é $=0$, no acso em que ela é fronteira, e o teorema da monodromia que supõe que a curva é redutível a um ponto. Em geral, as idéias fundamentais da teoria das funções de Riemann, a teoria das funções algébricas e dos integrais sôbre superfícies de Riemann são, em alta medida, de natureza topológica e por isso tão claros e intuitivos.

6. O carácter tão intuitivo de tais considerações, é muitas vezes, e precisamente por isso, perigoso; esquecemo-nos que qualquer coisa ficou para demonstrar, e se a intuição é seguramente, uma fonte inexgotável de descoberta, é porém, muitas vezes só uma ficção ou resultante do nosso hábito. Isto teve, inicialmente, como conseqüência, o olhar-se e tratar-se a topologia como uma disciplina um tanto imprecisa e, com efeito, a sua rigorosa formulacão apareceu pela primeira vez muito tarde. Ainda Gauss dizia que se não conhecia dela muito mais do que nada. Foi precisamente a teoria das funções (de Riemann) que pela primeira vez, não só deu o impulso à investigação das superfícies fechadas, mas também mostrou que raciocínios topológicos intervinham em teorias inteiras. Os fundamentos rigorosos, mais recentes, tiveram a sua origem com Cantor (à volta de 1880) e Poincaré (pouco antes de 1900) e conduziram nos últimos anos a um prodigioso desenvolvimento dêste capítulo da geometria. Mostrou-se, cada vez melhor, que o que oferecia maiores dificuldades não eram tanto as demonstrações mas muito mais a escôlha acertada das noções fundamentais — na nossa linguagem: a escôlha do esquema adequado.

A noção que aqui se fêz sobressair, tal como sucedeu na álgebra abstracta com as operações do cálculo foi a de proximidade ou *vizinhança*; ela liga cada ponto com pontos vizinhos, e esta é uma relação que não se poderá permitir que seja destruida (isto chama-se continuidade). Em rectas ou em curvas as vizinhanças são pequenos arcos. portanto limitadas por determinados pontos; nas superfícies são porções de superfície limitadas por curvas e no espaço porções de espaço limitadas por superfícies. Nestas noções, por mais claras e precisas que se deixem compreender, reside, em comparação com as algébricas, qualquer coisa de transcendente, impenetrável, que se liga às possibilidades ilimitadas de refinamento e subdivisão (e que matemàticamente leva às noções de convergência, ponto de acumulação, etc.).

Na edificação do esquema passa-se agora, outra vez, dum modo semelhante ao que permitiu na álgebra tomar um ponto de vista abstracto, à construção abstracta do espaço. Como figuras geométricas têm-se então não sòmente as do espaço ordinário: podem tomar-se como «pontos» objectos quaisquer, cuja natureza individual nos é indiferente, desde que êles estejam ligados por relações de proximidade, e por consequência, constituam um contínuo, uma variededa contínua, na qual haja passagens contínuas e diferenças tão finas quanto se queira. Poderá dizer-se ser a noção dum tal contínuo uma das idéias mais originais, não só da geometria mas também de tôdas as descrições da natureza. Em face dela encontra-se a algébrica onde só há objectos isolados e duns para os outros só passagens discontínuas, as operações de cálculo. Na noção de número real estão as duas noções ligadas e apresentam-se ambas como indispensáveis.

(Continua)

(Tradução de Maria do Pilar Ribeiro)

A noção de integral baseada na medida à Jordan

por ***Ruy Luís Gomes***

Conforme anunciado em nota ao artigo de A. Pereira Gomes — «Integrabilidade-R das funções contínuas» — publicado no n.º 28 da Gazeta de Matemática, vamos tratar agora da noção de integral a partir da medida-J.

Comecemos, portanto, por fixar as hipóteses fundamentais com que devemos trabalhar, reportando-nos principalmente ao artigo de A. Pereira Gomes. É mesmo nossa preocupação que estes dois artigos venham a constituir um todo de utilidade para quem deseje abordar o problema da mensurabilidade e da integrabilidade em termos de medida à Jordan, que abrange, como caso particular, a integrabilidade-R habitual.