ções analíticas, com base na idéia de Riemann, a totalidade dos elementos de função duma função analítica como uma superfície (veja [3]); dois teoremas, importantes tratam de curvas sôbre esta superfície: O teorema do integral de Cauchy que diz que o inte-

(Fig. 4)

gral ao longo de cada curva fechada é $=0$, no acso em que ela é fronteira, e o teorema da monodromia que supõe que a curva é redutível a um ponto. Em geral, as idéias fundamentais da teoria das funções de Riemann, a teoria das funções algébricas e dos integrais sôbre superfícies de Riemann são, em alta medida, de natureza topológica e por isso tão claros e intuitivos.

6. O carácter tão intuitivo de tais considerações, é muitas vezes, e precisamente por isso, perigoso; esquecemo-nos que qualquer coisa ficou para demonstrar, e se a intuição é seguramente, uma fonte inexgotável de descoberta, é porém, muitas vezes só uma ficção ou resultante do nosso hábito. Isto teve, inicialmente, como conseqüência, o olhar-se e tratar-se a topologia como uma disciplina um tanto imprecisa e, com efeito, a sua rigorosa formulacão apareceu pela primeira vez muito tarde. Ainda Gauss dizia que se não conhecia dela muito mais do que nada. Foi precisamente a teoria das funções (de Riemann) que pela primeira vez, não só deu o impulso à investigação das superfícies fechadas, mas também mostrou que raciocínios topológicos intervinham em teorias inteiras. Os fundamentos rigorosos, mais recentes, tiveram a sua origem com Cantor (à volta de 1880) e Poincaré (pouco antes de 1900) e conduziram nos últimos anos a um prodigioso desenvolvimento dêste capítulo da geometria. Mostrou-se, cada vez melhor, que o que oferecia maiores dificuldades não eram tanto as demonstrações mas muito mais a escôlha acertada das noções fundamentais — na nossa linguagem: a escôlha do esquema adequado.

A noção que aqui se fêz sobressair, tal como sucedeu na álgebra abstracta com as operações do cálculo foi a de proximidade ou *vizinhança*; ela liga cada ponto com pontos vizinhos, e esta é uma relação que não se poderá permitir que seja destruida (isto chama-se continuidade). Em rectas ou em curvas as vizinhanças são pequenos arcos. portanto limitadas por determinados pontos; nas superfícies são porções de superfície limitadas por curvas e no espaço porções de espaço limitadas por superfícies. Nestas noções, por mais claras e precisas que se deixem compreender, reside, em comparação com as algébricas, qualquer coisa de transcendente, impenetrável, que se liga às possibilidades ilimitadas de refinamento e subdivisão (e que matemàticamente leva às noções de convergência, ponto de acumulação, etc.).

Na edificação do esquema passa-se agora, outra vez, dum modo semelhante ao que permitiu na álgebra tomar um ponto de vista abstracto, à construção abstracta do espaço. Como figuras geométricas têm-se então não sòmente as do espaço ordinário: podem tomar-se como «pontos» objectos quaisquer, cuja natureza individual nos é indiferente, desde que êles estejam ligados por relações de proximidade, e por consequência, constituam um contínuo, uma variededa contínua, na qual haja passagens contínuas e diferenças tão finas quanto se queira. Poderá dizer-se ser a noção dum tal contínuo uma das idéias mais originais, não só da geometria mas também de tôdas as descrições da natureza. Em face dela encontra-se a algébrica onde só há objectos isolados e duns para os outros só passagens discontínuas, as operações de cálculo. Na noção de número real estão as duas noções ligadas e apresentam-se ambas como indispensáveis.

(Continua)

(Tradução de Maria do Pilar Ribeiro)

A noção de integral baseada na medida à Jordan

por ***Ruy Luís Gomes***

Conforme anunciado em nota ao artigo de A. Pereira Gomes — «Integrabilidade-R das funções contínuas» — publicado no n.º 28 da Gazeta de Matemática, vamos tratar agora da noção de integral a partir da medida-J.

Comecemos, portanto, por fixar as hipóteses fundamentais com que devemos trabalhar, reportando-nos principalmente ao artigo de A. Pereira Gomes. É mesmo nossa preocupação que estes dois artigos venham a constituir um todo de utilidade para quem deseje abordar o problema da mensurabilidade e da integrabilidade em termos de medida à Jordan, que abrange, como caso particular, a integrabilidade-R habitual.

1. Hipóteses fundamentais:

Representamos por $f(x)$ uma função numérica, limitada e mensurável-J [1] num conjunto A (mensurável-J) de um espaço euclideano I de qualquer número de dimensões. Como $f(x)$ é mensurável-J, o conjunto

$$M(\lambda) = \underset{x}{E}\,[x \in A : f(x) \geq \lambda],$$

dos pontos $x \in$ A nos quais $f(x) \geq \lambda$, é mensurável-J para valores de λ que formam um conjunto denso [2] na recta euclideana $(-\infty < \lambda < +\infty)$. Em particular, se representarmos por (λ', λ'') um intervalo aberto que contém o intervalo fechado $[l, L]$ limitado pelo ínfimo l e o supremo L de $f(x)$ em A, isto é, tal que $[l, L] \subset (\lambda', \lambda'')$, tem-se $M(\lambda') = A$, $M(\lambda'') = 0$.

E não há dificuldade em intercalar entre $\lambda' = \lambda_0$ e $\lambda'' = \lambda_n$ novos pontos $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n-1}$, de modo que os conjuntos $M(\lambda_k)$, $k = 0, \cdots, n$, sejam todos mensuráveis-J e, além disso, o diâmetro da partição $[\lambda_k]$ seja arbitràriamente pequeno: $\lambda_k - \lambda_{k-1} < \delta$.

Daqui por diante chamaremos *admissível* a tôda a partição $[\lambda_k]$ de extremos fixos e em que $M(\lambda_k)$ são mensuráveis-J.

Ora, se assentarmos em dizer que uma partição admissível $[\lambda'_k]$ *segue* uma outra $[\lambda''_j]$ quando é um *refinamento* desta última, quere dizer, quando entre os pontos de divisão λ'_k se encontrem todos os pontos λ''_j e porventura novos pontos, então, a família das partições admissíveis constitue um sistema *parcialmente ordenado*, em que a relação de *ordem parcial* é precisamente a relação de *refinamento* ou de sub-divisão. É, no entanto, um sistema parcialmente ordenado especial, pois, dadas duas partições distintas, $[\lambda'_k]$ e $[\lambda''_j]$, basta reunir os pontos λ'_k e λ''_j e ordená-los por ordem de grandeza crescente para obter uma nova partição $[\lambda_i]$ que *segue cada uma das anteriores*, quere dizer, é um refinamento de cada uma delas.

Um sistema parcialmente ordenado com esta propriedade chama-se um *sistema dirigido* [3].

2. Definição de integral:

A cada partição admissível $[\lambda_k]$ façamos corresponder o número

$$\Phi[\lambda_k] = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot m\,[M(\lambda_k) - M(\lambda_{k+1})] = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \cdot m\,(A_k),$$

em que $\lambda_0 = \lambda'$, $\lambda_n = \lambda''$, $A_k = M(\lambda_k) - M(\lambda_{k+1})$ e m representa a medida-J.

Fica assim definida no sistema dirigido das partições admissíveis de extremos λ', λ'', uma função Φ, que é monòtonamente crescente.

Com efeito, se partirmos de duas partições $[\lambda'_k]$, $[\lambda''_j]$ tais que $[\lambda'_k] \leq [\lambda''_j]$, no sentido da ordem parcial do respectivo sistema dirigido, a aditividade de medida-J permite-nos escrever $\Phi[\lambda'_k] \leq \Phi[\lambda''_j]$, no sentido da ordem de grandeza dos números.

Teorema: *a função Φ tem um limite segundo o sistema dirigido das partições admissíveis, que é precisamente o supremo dos seus valores.*

Na verdade, como $f(x)$ é limitada e A tem medida finita, resulta que

$$\Phi[\lambda_k] \leq \lambda_{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} m\,(A_k) \leq L \cdot m\,(A):$$

quere dizer, Φ tem um supremo finito: S. Por outro lado, dada uma vizinhança qualquer de $S - (S-\varepsilon, S+\varepsilon)$ — podemos sempre determinar uma partição $[\lambda'_k]$ de tal modo que $\Phi[\lambda'_k] \in (S-\varepsilon, S+\varepsilon)$ ou mais precisamente $S - \varepsilon < \Phi[\lambda'_k] \leq S$. Mas, então, é $S - \varepsilon < \Phi[\lambda_k] \leq S$, para toda partição $[\lambda_j]$ que segue $[\lambda'_k]: [\lambda_j] \leq [\lambda'_k]$.

Fica assim demonstrado que S é o limite de Φ segundo o *sistema dirigido das partições admissíveis*.

A êste número S dá-se o nome de integral de $f(x)$, em A, à base da medida à Jordan, e representa-se pelo símbolo bem conhecido $\int_A f(x)\,dm$.

Teorema: *O integral de* f(x) *em* A *é também o ínfimo,* I, *das somas* $\sum \lambda_{k+1} \cdot \mathrm{m}\,(\mathrm{A}_k)$, relativas a *tôdas as partições admissíveis.*

Com efeito, estas somas definem uma função monòtonamente decrescente,

$$\psi[\lambda_k] = \sum \lambda_{k+1} \cdot m\,(A_k), \quad \psi[\lambda''_j] \leq \psi[\lambda_k]$$

para

$$[\lambda'_k] \leq [\lambda''_j].$$

E como

$$\psi[\lambda_k] \geq l \cdot m\,(A),$$

o conjunto dos valores de ψ admite um ínfimo I. Resta-nos, pois, demonstrar que $I = S$. Ora, dadas duas partições admissíveis quaisquer $[\lambda'_j]$ e $[\lambda''_i]$, o seu supremo $[\lambda_k]$ (calculado segundo a ordem parcial do respectivo sistema dirigido, coincide com a partição definida pelos pontos λ'_j e λ''_i conjuntamente, o que nos permite escrever

$$\Phi[\lambda'_j] \leq \Phi[\lambda_k] \leq \psi[\lambda_k] \leq \psi[\lambda''_i],$$

donde

$$\Phi[\lambda'_j] \leq \psi[\lambda''_i],$$

e, em consequência,

$$S \leq I.$$

---

[1] Consultar artigo citado, de A. Pereira Gomes.

[2] Ver o mesmo artigo.

[3] G. Birkhoff — *Lattice Theory* — Amer. Math. Soc. Col. Publ. vol. XXV — § 38 pag. 31.

Finalmente, escolhendo uma partição admissível $[\lambda_k]$ de diâmetro arbitràriamente pequeno, δ, tem-se

$$0 \leq I - S \leq \sum (\lambda_{k+1} - \lambda_k)\, m(A_k) \leq \delta \cdot m(A),$$

donde

$$I = S.$$

Podemos enunciar êste resultado da seguinte maneira: *a função* Ψ *tende para* $\int_A f(x)\, dm$, *no sentido do sistema dirigido das partições admissíveis.*

Corolário: O integral de $f(x)$ é o limite, em têrmos de vizinhança, das somas

$$\sum \mu_k \cdot m(A_k),$$

nas quais μ_k está condicionado por

$$\lambda_k \leq \mu_k \leq \lambda_{k+1},$$

e se representa por $[\lambda_k]$ uma partição admissível.

Na verdade, é fácil demonstrar que a tôda vizinhança, $V_\delta(I)$, corresponde uma partição admissível $[\lambda'_j]$ de modo que

$$\sum \mu_k \cdot m(A_k) \in V_\delta(I),$$

para tôda partição admissível $[\lambda_k]$ tal que

$$[\lambda'_j] \leq [\lambda_k].$$

Nota: Em tudo que se disse até agora, consideraram-se sempre partições admissíveis de extremos fixos λ', λ''. O leitor pode, porém, demonstrar, como exercício, que nos podemos libertar dessa restrição desde que $[l, L] \subset (\lambda', \lambda'')$.

3. Principais propriedades:

a) No corpo dos conjuntos mensuráveis-J, $B \subset A$, a função de conjunto

$$\theta(B) = \int_B f(x)\, dm$$

verifica a dupla desigualdade

$$l(B) \cdot m(B) \leq \theta(B) \leq L(B) \cdot m(B)$$

sendo $l(B)$ e $L(B)$ respectivamente o ínfimo e o supremo de $f(x)$ em B.

Pela própria definição de integral é

$$\lambda_0 \cdot m(B) \leq \int_B f(x)\, dm \leq \lambda_n \cdot m(B).$$

E como (λ_0) tem como supremo $l(B)$ e $L(B)$ é o ínfimo de (λ_n), resulta

$$l(B)\, m(B) \leq \int_B f(x)\, dm \leq L(B)\, m(B).$$

b) *Aditividade:* se

$$B = C_1 + \cdots + C_p, \quad C_i - mens - J \quad \text{e} \quad C_i\, C_j = 0$$

tem-se

$$\int_B f(x)\, dm = \int_{C_1} f(x)\, dm + \cdots + \int_{C_p} f(x)\, dm.$$

Na verdade, o integral de $f(x)$ em B é o limite das somas $\sum \lambda_k \cdot m(B_k)$ e o integral em C_j é o limite das somas $\sum \lambda_k \cdot m(B_k \cdot C_j)$. Ora,

$$\sum_k \lambda_k \cdot m(B_k) = \sum_k \lambda_k \sum_j m(B_k \cdot C_j)$$
$$= \sum_j \sum_k \lambda_k\, m(B_k \cdot C_j),$$

donde a aditividade de $\int_B f(x)\, dm$.

Teorema: *As duas propriedades* a) *e* b) *caracterizam completamente o integral de* f (x) *em* A.

Com efeito, se designarmos por $\theta(B)$ uma função definida no corpo dos conjuntos mensuráveis-J, $B \subset A$, que satisfaça a *a)* e *b)*, sendo $l(B)$ e $L(B)$ o ínfimo e supremo de $f(x)$ em B, teremos

$$\sum \lambda_k \cdot m(A_n) \leq \sum l(A_k) \cdot m(A_k) \leq \sum \theta(A_n) = \theta(A)$$

e

$$\theta(A) = \sum \theta(A_k) \leq \sum L(A_k) \cdot m(A_k) \leq \lambda_{k+1} \cdot m(A_k)$$

donde

$$\theta(A) = \int_A f(x)\, dm.$$

c) *Linearidade:*

$$\int_A [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dm = \alpha \int_A f(x)\, dm + \beta \int_A g(x)\, dm,$$

sendo f, g duas funções limitadas e mensuráveis-J em A e representando por α, β dois números quaisquer.

Demonstração: Comecemos por mostrar que

$$\int_A \mu f(x)\, dm = \mu \int_A f(x)\, dm.$$

Como $\mu f(x)$ é limitada e mensurável-J ao mesmo tempo que $f(x)$, existe $\int_A \mu f(x)\, dm$. Por outro lado, $\mu \int_A f(x)\, dm$ tem as duas propriedades que são características de $\int_A \mu f(x)\, dm$. Logo,

$$\int_A \mu f(x)\, dm = \mu \int_A f(x)\, dm.$$

Passemos agora à demonstração de que

$$\int_A [f(x) + g(x)]\, dm = \int_A f(x)\, dm + \int_A g(x)\, dm.$$

Para isso, vamos começar por deduzir dois lemas:

Lema I: [1] Tôda função limitada e mensurável-J, $f(x)$, é o limite de uma sucessão uniformemente convergente de funções mensuráveis-J, limitadas, com um número finito de valores distintos (funções simples) $f_n(x)$.

Na verdade, se tomarmos uma sucessão $[\lambda_k^{(n)}]$ de

(1) Ver artigo do O. Frink Jr., na Bibliografia.

partições admissíveis de diâmetro $d^{(n)} \to 0$ e se definirmos $f_n(x)$ de maneira que

$$f_n(x) = \lambda_k^{(n)} \quad \text{para} \quad \lambda_k^{(n)} \leq f(x) < \lambda_{k+1}^{(n)},$$

teremos em $\{ f_n(x) \}$ uma sucessão nas condições do enunciado que converge uniformemente para $f(x)$, pois

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < d^{(n)} \to 0 .$$

Lema II: O limite, em A, de uma sucessão uniformemente convergente de funções mensuráveis-J, limitadas em A, é ainda uma função mensurável-J e limitada em A.

Com efeito, a circunstância de $\{ f_n(x) \}$ convergir uniformemente para $f(x)$ em A, permite-nos escrever

$$f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon ,$$

para $n > N(\varepsilon)$ e $x \in A$, donde

$$M_n(\lambda) \subset M(\lambda - \varepsilon) \subset M_n(\lambda - 2\varepsilon) ,$$

a partir da ordem N.

Escolhamos agora para $[\lambda_k]$ uma partição admissível com relação a tôdas [1] as funções $f_n(x)$, de diâmetro inferior a δ.

Fixando ε por maneira que

$$\lambda_{k+1} - \varepsilon \geq \lambda_{k+1} - 2\varepsilon \geq \lambda_k ,$$

podemos escrever sucessivamente

$$M_n(\lambda_{k+1}) \subset M(\lambda_{k+1} - \varepsilon) \subset M_n(\lambda_k)$$

$$m[M_n(\lambda_{k+1})] \leq m_0[M(\lambda_{k+1} - \varepsilon)] \leq m^0[M(\lambda_{k+1} - \varepsilon)] \leq \\ \leq m[M_n^-(\lambda_k)]$$

e

$$0 \leq \sum \left(m^0[M(\lambda_{k+1} - \varepsilon)] - m_0 M[(\lambda_{k+1} - \varepsilon)] \right) \delta_k < \delta \cdot m(A),$$

com $\lambda_{k+1} - \lambda_k = \delta_k$.

Pondo ainda

$$\varphi(\lambda) = m_0[M(\lambda)]$$
$$\Phi(\lambda) = m^0[M(\lambda)] ,$$

temos

$$0 \leq \sum [\Phi(\lambda_{k+1} - \varepsilon) - \varphi(\lambda_{k+1} - \varepsilon)] \delta_k < \delta \cdot m(A) .$$

Ora, se λ' fôr um ponto de continuidade das duas funções φ e Φ, é-o também da função não negativa $\Phi - \varphi$ e é fácil demonstrar que nesse ponto $\Phi - \varphi$ tem de se anular.

Na verdade, se assim não fôsse, existiria um intervalo $[\lambda' - \eta_1, \lambda' + \eta_2]$, de extremos $\lambda' - \eta_1, \lambda' + \eta_2$ admissíveis para tôdas as funções $f_n(x)$, tal que

$$\Phi - \varphi \geq \alpha^2 \neq 0 , \quad x \in [\lambda' - \eta_1, \lambda' + \eta_2] ,$$

Mas, então, tôda partição admissível que contenha $\lambda' - \eta_1$ e $\lambda' + \eta_2$ como pontos de divisão, satisfará à desigualdade

$$\sum [\Phi(\lambda_{k+} - \varepsilon) - \varphi(\lambda_{k+1} - \varepsilon)] \delta_k > \alpha^2 (\eta_2 - \eta_1) ,$$

por menor que seja o seu diâmetro, o que é incompatível com uma limitação do tipo

$$\sum [\Phi(\lambda_{k+1} - \varepsilon) - \varphi(\lambda_{k+1} - \varepsilon] \delta_k < \delta \cdot m(A) .$$

Logo, $\Phi(\lambda) - \varphi(\lambda) = 0$, em todos os pontos de continuidade de φ e de Φ.

Ora, como φ e Φ são duas funções monòtonamente crescentes que, portanto, não admitem mais do que uma infinidade numerável de pontos de descontinuidade, temos

$$m_0[M(\lambda)] = m_0[M(\lambda)] ,$$

quere dizer, $M(\lambda)$ é mensurável-J, com excepção, no máximo, de uma infinidade numerável de valores de λ, q. e. d.

Demonstrados êstes dois lemas retomemos a igualdade em causa:

$$\int_A [f(x) + g(x)]\, dm = \int_A f(x)\, dm + \int_A g(x)\, dm .$$

Como $f(x)$ e $g(x)$ são limitadas e mensuráveis-J, o lema I, diz-nos que

$$f(x) = \lim_n f_n(x) , \quad g(x) = \lim_n g_n(x) ,$$

donde resulta que

$$f(x) + g(x) = \lim_n [f_n(x) + g_n(x)] .$$

Mas pelo lema II, $f(x) + g(x)$, como limite de uma sucessão $\{ f_n(x) + g_n(x) \}$, uniformemente convergente de funções limitadas e mensuráveis-J, é uma função limitada e mensurável-J.

Em segundo lugar, demonstremos [1] que a soma

$$\int_A f(x)\, dm + \int_A g(x)\, dm$$

tem as duas propriedades características do integral de $f(x) + g(x)$. Para isso, consideremos o conjunto

$$B_k = \underset{x}{E}\, [x \in B ;\ \lambda_k \leq g(x) < \lambda_{k+1}]$$

e representemos por $l_1(B_k)$ e $L_1(B_k)$ o ínfimo e o supremo de $f(x)$ em B_k. O ínfimo e o supremo correspondentes de $f(x) + g(x)$ serão $l(B_k)$ e $L(B_k)$.

Nestas condiçõos, tem-se

$$l(B_k) \leq l_1(B_k) + \lambda_{k+1} \leq l_1(B_k) + \lambda_k + \delta$$
$$L(B_k) \geq L_1(B_k) + \lambda_k \geq L_1(B_k) + \lambda_{k+1} - \delta ,$$

sendo δ o diâmetro da partição admissível $[\lambda_k]$.

---

(1) Basta atender a que, para cada função mensurável-J, só há, no máximo, uma infinidade numerável de valores de λ para os quais $\underset{x}{E}\,[x \in A ;\, f_n(x) \geq \lambda]$ pode deixar de ser mensurável-J.

(1) Seguimos a demontração de C. Carathéodory em *Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs*, München, 1938, pág. 67-68.

Multiplicando estas desigualdades por $m(B_k)$ e somando, vem

$$\sum l(B_k)\, m(B_k) \le \sum l_1(B_k)\, m(B_k) + \\ + \sum \lambda_k\, m(B_k) + \delta m(A)$$

e

$$\sum L(B_k)\, m(B_k) \ge \sum L_1(B_k)\, m(B_k) + \\ + \sum \lambda_{k+1}\, m(B_k) - \delta m(A)\,,$$

donde

$$-\delta m(A) + l(B) \cdot m(B) \le \int_A f(x)\, dm + \\ + \int g(x)\, dm \le L(B) \cdot m(B) + \delta \cdot m(A)$$

ou no limite para $\delta \to 0$ a propriedade que pretendíamos demonstrar.

Como a aditividade de $\int_A f(x)\, dm + \int_A g(x)\, dm$ é evidente, temos finalmente

$$\int_A [f(x) + g(x)]\, dm = \int_A f(x)\, dm + \int_A g(x)\, dm\,, \quad \text{q. e. d.}$$

Nota I: Aproximando a definição de integral num conjunto mensurável-J, que acabamos de desenvolver, do teorema demonstrado por A. Pereira Gomes no artigo *Integrabilidade*-R *das funções contínuas,* publicado no número anterior da «Gazeta de Matemática», vê-se que as funções contínuas limitadas são integráveis. E são-no também as funções limitadas cujos pontos de descontinuidade formam um conjunto de medida L-nula.

Se o conjunto A se reduzir a um intervalo fechado $\int_A f(x)\, dm$ coincide com o integral-Riemann ordinário.

Nota II: Era interessante estender a definição de integral, das funções numéricas de ponto de um espaço euclideano a funcionais definidas em espaços mais gerais, inclusivé em espaços sem pontos — σ-álgebras de Boole, para o que o leitor pode consultar a *Tese de A. Pereira Gomes — Introdução ao Estudo duma Noção de Funcional em Espaços sem Pontos* (vol. 18 da Col. do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto).

Resumo da Bibliografia que utilizámos:

C. Carathéodory — *Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs* [Sitz. Bay. Akad. Wiss. 1938].

O. Haupt und G. Aumann — *Differential und Integralrechnung* — Band. III *Integralrechnung* (Berlin, 1938), pags. 36-49.

O. Frink Jr. — *Jordan Measure and Riemann Integration* — Annals of Math. vol. 34 (1933), pag. 618.

Ruy Luís Gomes — *Sôbre uma Construção Algébrica da Noção de Integral* [Publ. n.º 12 da Col. do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto—1945].

Les principes mathématiques de la mécanique classique

(suite)

par ***René de Possel*** (Université d'Alger)

IV. Essai d'interprétation physique.

Interprétation directe de la force absolue et de la masse. Chacune des forces absolues que nous avons introduites correspond à une cause ou à un phénomène physique, ou plus généralement à une modification des conditions physiques susceptible de modifier le mouvement du corps. C'est là l'interprétation classique. Le corps étant en mouvement sous l'action d'un certain nombre de forces, si, à un instant donné, nous introduisons une nouvelle cause physique de mouvement, l'accélération de chaque point s'accroît d'un certain vecteur $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, et, si nous imaginons une masse répartie arbitraire pour l'instant, la quantité d'accélération du corps subit un accroissement $\int_c \overrightarrow{\Delta\Gamma}\, dm$, qui, *par définition, représente la force répartie correspondante.* Cette force est indépendante du repère utilisé, puisque les forces d'inertie d'entrainement et complémentaire qui correspondent à un changement de repère sont les mêmes immédiatement avant et après l'introduction de la nouvelle cause physique.

On voit que la force correspondant à une cause physique isolable est un torseur pur. *Nous supposerons toujours à partir de maintenant qu'il en est ainsi,* les forces qui ne sont pas des torseurs purs donnant lieu à certaines difficultés d'interprétation [1].

La *masse* répartie dans le corps est définie par le fait qu' «*une même force*», de vecteur principal $\vec{A}(e)$ appliquée à des corps différents, doit produire toujours un accroissement d'accélération $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ tel que

$$\vec{A}(e) = \int_e \overrightarrow{\Delta\Gamma}\, dm\,.$$

La difficulté consiste à définir ce qu'on entend par «*une même force*» quand on l'applique à des corps différents, et que les conditions physiques sont par suite différentes. Il est des cas où l'expression a un sens

[1] Voir note (1), pg. 7, *Gazeta de Matemática* n.º 28.