Multiplicando estas desigualdades por $m(B_k)$ e somando, vem

$$\sum l(B_k)\,m(B_k) \leq \sum l_1(B_k)\,m(B_k) + \\ + \sum \lambda_k\,m(B_k) + \delta m(A)$$

e

$$\sum L(B_k)\,m(B_k) \geq \sum L_1(B_k)\,m(B_k) + \\ + \sum \lambda_{k+1}\,m(B_k) - \delta m(A)\,,$$

donde

$$-\delta m(A) + l(B)\cdot m(B) \leq \int_A f(x)\,dm + \\ + \int g(x)\,dm \leq L(B)\cdot m(B) + \delta\cdot m(A)$$

ou no limite para $\delta \to 0$ a propriedade que pretendíamos demonstrar.

Como a aditividade de $\int_A f(x)\,dm + \int_A g(x)\,dm$ é evidente, temos finalmente

$$\int_A [f(x)+g(x)]\,dm = \int_A f(x)\,dm + \int_A g(x)\,dm\,, \quad \text{q. e. d.}$$

Nota I: Aproximando a definição de integral num conjunto mensurável-J, que acabamos de desenvolver, do teorema demonstrado por A. Pereira Gomes no artigo *Integrabilidade*-R *das funções continuas,* publicado no número anterior da «Gazeta de Matemática», vê-se que as funções contínuas limitadas são integráveis. E são-no também as funções limitadas cujos pontos de descontinuidade formam um conjunto de medida L-nula.

Se o conjunto A se reduzir a um intervalo fechado $\int_A f(x)\,dm$ coincide com o integral-Riemann ordinário.

Nota II: Era interessante estender a definição de integral, das funções numéricas de ponto de um espaço euclideano a funcionais definidas em espaços mais gerais, inclusivé em espaços sem pontos — σ-álgebras de Boole, para o que o leitor pode consultar a *Tese de A. Pereira Gomes — Introdução ao Estudo duma Noção de Funcional em Espaços sem Pontos* (vol. 18 da Col. do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto).

Resumo da Bibliografia que utilizámos:

C. Carathéodory — *Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs* [Sitz. Bay. Akad. Wiss. 1938].

O. Haupt und G. Aumann — *Differential und Integralrechnung* — Band. III *Integralrechnung* (Berlin, 1938), pags. 36-49.

O. Frink Jr. — *Jordan Measure and Riemann Integration* — Annals of Math. vol. 34 (1933), pag. 618.

Ruy Luís Gomes — *Sôbre uma Construção Algébrica da Noção de Integral* [Publ. n.º 12 da Col. do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto—1945].

Les principes mathématiques de la mécanique classique

(suite)

par ***René de Possel*** (Université d'Alger)

IV. Essai d'interprétation physique.

Interprétation directe de la force absolue et de la masse. Chacune des forces absolues que nous avons introduites correspond à une cause ou à un phénomène physique, ou plus généralement à une modification des conditions physiques susceptible de modifier le mouvement du corps. C'est là l'interprétation classique. Le corps étant en mouvement sous l'action d'un certain nombre de forces, si, à un instant donné, nous introduisons une nouvelle cause physique de mouvement, l'accélération de chaque point s'accroît d'un certain vecteur $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, et, si nous imaginons une masse répartie arbitraire pour l'instant, la quantité d'accélération du corps subit un accroissement $\int_c \overrightarrow{\Delta\Gamma}\,dm$, qui, *par définition, représente la force répartie correspondante.* Cette force est indépendante du repère utilisé, puisque les forces d'inertie d'entrainement et complémentaire qui correspondent à un changement de repère sont les mêmes immédiatement avant et après l'introduction de la nouvelle cause physique.

On voit que la force correspondant à une cause physique isolable est un torseur pur. *Nous supposerons toujours à partir de maintenant qu'il en est ainsi,* les forces qui ne sont pas des torseurs purs donnant lieu à certaines difficultés d'interprétation (1).

La *masse* répartie dans le corps est définie par le fait qu' «*une même force*», de vecteur principal $\vec{A}(e)$ appliquée à des corps différents, doit produire toujours un accroissement d'accélération $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ tel que

$$\vec{A}(e) = \int_e \overrightarrow{\Delta\Gamma}\,dm\,.$$

La difficulté consiste à définir ce qu'on entend par «*une même force*» quand on l'applique à des corps différents, et que les conditions physiques sont par suite différentes. Il est des cas où l'expression a un sens

(1) Voir note (1), pg. 7, *Gazeta de Matemática* n.º 28.

physique précis: forces de contact produisant de petites déformations identiques, par exemple. Ce sont ces cas qui seront utilisés pour définir la masse. On s'aidera de l'additivité de la masse, et de considérations telles que celle-ci: si un corps est physiquement homogène, sa masse est proportionnelle au volume; ou encore, si, pour une petite portion c du corps, l'accélération est sensiblement constante, la force est $\overrightarrow{\Delta\Gamma} m(c)$. C'est bien en s'appuyant sur ces principes que la masse est pratiquement déterminée tantôt par la balance, tantôt en faisant agir des forces connues de nature électrique ou élastique, dans des cas où l'expression «une même force» a précisément un sens clair, tantôt en appliquant la loi de l'attraction universelle.

Forme énergétique du principe de d'Alembert. Cependant, des trois notions de force, masse et énergie, seulla dernière a résisté aux assauts des mécaniques nouvelles, relativiste et ondulatoire, si l'on excepte les difficultés qui se présentent encore dans les noyaux atomiques et qui ont nécessité l'hypothèse du «neutrino». Il est donc désirable, comme l'avait déjà tenté *Hertz* au siècle dernier, de bâtir la mécanique rationnelle sur la seule notion d'énergie. Voici un essai dans ce sens, qui présente encore des difficultés d'interprétation.

Nous supposons que le corps est en présence de plusieurs *sources* ou réservoirs d'énergie $\mathcal{S}_i$, dont certains peuvent faire entièrement partie du corps lui-même; ce seront les *sources intérieures*. Le mouvement réel du corps donne lieu à des échanges entre ces sources et son énergie cinétique.

Considérons un mouvement virtuel du corps à partir de sa configuration C_t à l'instant t, mouvement défini comme plus haut par une fonction $M(P, \theta)$, $(0 < \theta < \theta_1)$, et rapporté à un repère fixe par rapport à la configuration C_t. On peut imaginer ce mouvement communiqué au corps par un système auxiliaire.

Nous admettons que, pour certains de ces mouvements virtuels, chaque source fournit entre les instants 0 *et* θ *une énergie* (positive ou négative) *déterminée* $\mathcal{S}_i(\theta)$. On peut constater que dans tous les problèmes qu'on considère habituellement en mécanique, cette énergie est bien déterminée pour un certain ensemble de mouvements virtuels.

Soit $\mathcal{P}_i = \left(\frac{d\mathcal{S}_i}{d\theta}\right)_{\theta=0}$ la puissance fournie par la source $\mathcal{S}_i$ à l'instant $\theta=0$, $\vec{W} = \left(\frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \theta}\right)_{\theta=0}$ le champ des vitesses virtuelles correspondant. Le principe fondamental de la mécanique peut s'énoncer sous la forme suivante, qui n'est qu'un autre énoncé du principe de d'Alembert:

Il existe un repère R *dit «galiléen», et une masse répartie* m (e) *ne dépendant que du corps et non de la nature des sources d'énergie, tels que la puissance virtuelle totale des sources soit égale à la puissance virtuelle de la quantité d'accélération évaluée dans le repère* R. *Ceci s'écrit:*

$$\sum \mathcal{P}_i = \int_C \vec{W} \cdot \vec{\Gamma}\, dm. \tag{5}$$

L'égalité a lieu pour tous les mouvements virtuels pour lesquels la puissance des sources est définie. Elle peut être utilisée pour étudier le mouvement du corps pour tous les mouvements virtuels pour lesquels cette puissance est connue.

Dans le cas où $\vec{W}$ et $\vec{\Gamma}$ ne varient pas sensiblement dans le corps, nous retrouvons bien la constance du produit $m\vec{\Gamma}$ lorsque le corps change, les sources restant les mêmes.

Définition de la force. Pour la source $\mathcal{S}_i$, supposons que $\mathcal{P}_i(c)$ soit défini pour tout corps partiel c, et qu'il existe un torseur réparti pur de vecteur principal $\vec{A}_i(c)$, tel que, quel que soit le mouvement virtuel pour lequel $\mathcal{P}_i(c)$ est défini, on ait

$$\mathcal{P}_i(c) = \int_c \vec{W} \cdot \overrightarrow{dA_i}.$$

Ce torseur réparti est alors la «*force absolue provenant de la source* $\mathcal{S}_i$». L'indétermination de cette force est souvent très grande.

Si toutes les sources peuvent ainsi être représentées par une force répartie, et si on pose $\vec{S} = \Sigma \vec{A}_i$, on peut écrire (5) sous la forme déjà donnée plus haut

$$\int_C \vec{W} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_C \vec{W} \cdot \vec{\Gamma}\, dm,$$

qui équivaut à la loi fondamentale $\vec{S}(c) = \int_c \vec{\Gamma}\, dm$, mais cette loi est souvent inutilisable, car les $\vec{A}_i$ sont inconnus ou indéterminés en grande partie.

Variation de la puissance développée par une source ou une force quand on change de repère. Interprétation physique des forces intérieures. L'énergie fournie au corps par l'une des sources lors d'un mouvement virtuel ne dépend pas du repère, puisque nous avons supposé ce dernier lié à la configuration du corps à l'instant t. Par contre, l'énergie par la même source lors du mouvement réel peut dépendre du repère: par exemple la réaction d'une table sur un corps posé sur celle-ci fournit un travail nul pour une repère lié à la table, et un travail non nul pour un repère en translation verticale.

Cherchons la condition pour qu'une force répartie fournisse pour le corps tout entier uu travail indépendant du repère. Limitons-nous toujours au cas où la force se réduit à un torseur pur. Si on change de repère, l'accroissement de puissance est égal à la puissance qui correspond au champ des vitesses d'entraînement, lesquelles sont réparties comme les vitesses d'un solide. Le calcul de la puissance fait plus haut pour un solide s'applique. L'accroissement de puissance est

$$\vec{V}_0 \cdot \vec{A}(c) + \vec{\omega} \cdot \vec{G}_0(c) \, ,$$

et doit être nul quels que soient $\vec{V}_0$ et $\vec{\omega}$; il faut et il suffit que la somme géométrique $\vec{A}(C)$ et le moment $\vec{G}_0(C)$ pour le corps tout entier soient nuls. *C'est précisément la définition mathématique que nous avons donnée d'un force intérieure.*

Physiquement, une force intérieure peut être définie comme étant *produite par une source intérieure au corps;* l'énergie qu'elle fournit lors du mouvement réel *ne doit pas dépendre du repère,* ce qui nous ramène à la définition mathématique, en utilisant le résultat qui vient d'être obtenu.

Dans le cas d'un corps constitué de deux points matériels, admettons que la force répartie intérieure est formée de deux vecteurs-force appliqués aux points. Leur somme géométrique et leur moment doivent être nuls, et elles vérifient le principe de l'action et de la réaction qui se trouve ainsi démontré en partant du fait que le travail des deux vecteurs-force est indépendant du repère.

Quand à l'énergie totale fournie par une source intérieure au corps, elle est bien déterminée, mais sa répartition entre énergie cinétique fournie au corps luimême et au système extérieur dépend du repère. Si on envisage un corps assez grand englobant toute la source, elle deviendra intérieure, et l'énergie cinétique qu'elle fournira au nouveau corps sera bien indépendante du repère.

Quelques difficultés se présentent pour concilier la démonstration ci-dessus du principe de l'action et de la réaction avec les cas où ce principe ne parait pas verifié. Prenons deux exemples:

1°. Considérons un corps formé de deux points matériels réunis par un fil sans masse tendu passant sur une petite poulie. Le travail des vecteurs-torce exercés par le fil sur les points n'est pas en genéral indépendant du repére. Mais les sources d'énergie qui fournissent ce travail ne peuvent pas être considérées comme intérieures au corps, puisqu'elles font intervenir la poulie.

Si on considère le corps constitué par les deux points matériels et la poulie, il faut ajouter les forces qu'exerce cette dernière sur le fil pour avoir une véritable «force intérieure répartie».

2°. Considérons deux masses électrisées M et M' en mouvement, dont chacune est soumise au champ électromagnétique produit par l'autre. Les deux forces qui s'exercent sur M et M' ne vérifient pas le principe de l'action et de la réaction. Ici l'introduction d'une vitessse finie de propagation du champ et de la relativité restreinte permettrait de lever la contradiction apparente.

Etude des forces intérieures. Forces mutuelles. Supposons qu'à tout couple de corps partiels c, c' sans point commun d'un corps C soit associé un torseur $\mathcal{U}(c, c')$, que nous désignons par une seule lettre, fonction additive de c pour c' fixe et de c' pour c fixe, et représentant une force appliquée à c, que nous nommerons *force mutuelle.* (le torseur n'a pas besoin d'être pur).

Prenons pour c' la partie de C extérieure à c, que nous noterons $C-c$. Nous obtenons un torseur $\mathcal{T}(c) = \mathcal{U}(c, C-c)$. Cherchons à quelle condition il est additif: on a

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(c_1+c_2, C-c_1-c_2) &= \mathcal{U}(c_1, C-c_1-c_2) + \\ &+ \mathcal{U}(c_2, C-c_1-c_2) = \mathcal{U}(c_1, C-c_1) - \mathcal{U}(c_1, c_2) + \\ &+ \mathcal{U}(c_2, C-c_2) - \mathcal{U}(c_2, c_1) \, . \end{aligned}$$

Par suite, pour que C soit additif, il faut et il suffit que l'on ait

$$\mathcal{U}(c_1, c_2) = \mathcal{U}(c_2, c_1) \, .$$

En ce cas, on a aussi $\mathcal{T}(C) = \mathcal{U}(C, C-C) = 0$, et par suite $\mathcal{T}$ constitue une force intérieure répartie.

Physiquement, une force intérieure répartie doit pouvoir toujours être considérée comme provenant ainsi d'une force mutuelle. Mais une force mutuelle devient souvent négligeable dés que les distances entre c et c' sont appréciables; ceci conduit, pour schématiser simplement de tels cas, à admettre que la force est nulle des que c et c' ne se touchent plus. On rencontre alors des difficultés signalées par M. Brelot (fascicule cité). Par exemple les forces de contact de la théorie des milieux continus ne peuvent pas être considérées comme des forces mutuelles (voir cours de mécanique polycopié de l'auteur, Alger 1945.)

Extension du principe de l'action et de la réaction. Considérons une force mutuelle se réduisant à un torseur pur. Exprimons que la puissance quelle développe entre deux corps c_0 et c'_0 pour un champ de vitesses quelconque ne dépend pas du repère. Il suffit d'après ce que, nous avons déjà vu d'exprimer que la somme géométrique et le moment sont nuls quels que soient c_0 et c'_0, ce qui équivaut à la condition trouvée ci-dessus $\mathcal{U}(c, c') + \mathcal{U}(c', c) = 0$.

Explicitons cette condition: si $\vec{A}(c, c')$ désigne le vecteur principal de la force mutuelle exercée par c' sur c, on doit avoir d'abord

$$\vec{A}(c, c') + \vec{A}(c', c) = 0 .$$

Le moment en O de la force exercée par c'_0 sur c_0 est, en posant $\vec{\lambda}(c) = \vec{A}(c, c'_0)$,

$$\int_{c_0} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{d\lambda} .$$

De même, en posant $\vec{\lambda'}(c') = -\vec{A}(c_0, c')$, le moment en O de la force exercée par c sur c' est

$$\int_{c'_0} \overrightarrow{OM'} \wedge \overrightarrow{d\lambda'} .$$

La somme de ces deux moments doit être nulle. Pour la mettre sous une forme simple, considérons l'ensemble de dimension 6 où un point est un couple formé d'un point M de c_0 et d'un point M' de c'_0, ensemble qu'on peut noter $c_0 \times c'_0$. $\vec{A}(c, c')$ constitue une mesure dans cet espace, et l'on a

$$\int_{c_0} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{d_M \lambda} = \int_{c_0 \times c'_0} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{d_{MM'} A} ,$$

$$\int_{c'_0} \overrightarrow{OM'} \wedge \overrightarrow{d_{M'} \lambda} = \int_{c_0 \times c'_0} -\overrightarrow{OM'} \wedge \overrightarrow{d_{MM'} A} ,$$

d'où la condition

$$\int_{c_0 \times c'_0} \overrightarrow{MM'} \wedge \overrightarrow{d_{MM'} A} = 0 ,$$

qui généralise le fait que dans le principe de l'action et de la réaction entre deux points, les forces sont portées par la droite qui les joint.

Terminons par une remarque au sujet des repères galiléens. On sait que pour les expériences courantes effectuées à la surface de la terre, on peut prendre cette dernière comme repère galiléen, que pour des expériences plus précises comme celle du pendule de Foucault ou du compas gyroscopique, ainsi que pour étudier le mouvement des planètes, il faut utiliser un repère lié au soleil et aux étoiles. Les forces d'inertie correspondant à un repère en mouvement qui peuvent être aussi grandes qu'on le veut doivent donc être attribuées à l'influence d'astres situés à d'aussi grandes distances.

Toutes les masses de l'univers se déplaçant les unes par rapport aux autres, il semble que la notion de repère galiléen ne puisse être qu'une approximation et que seule une théorie de la mécanique indépendante de tout repère soit exempte de contradition. A ce type appartient la relativité générale, qui a en outre l'avantage de réunir sous un même phénomène l'attraction universelle et les forces d'inertie.

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA

BIOLOGIA MATEMATICA

UNA NUEVA TEORIA MATEMÁTICA DE LA DIVISION DE LAS CÉLULAS

por ***J. Gallego Diaz***

Intentamos dar en este ensayo un esquema matemático de la division celular. Pretendemos reducir el complejo proceso de la mitosis a las mismas leyes que regulan el movimiento de los astros, es decir, a la ley de la atraccion de Newton. No ignoramos que en la division de las células hay que tener en cuenta muchos fenómenos y fuerzas tales como la tension superficial, la viscosidad, la elasticidad y crecimiento de la membrana, etc. En una primera aproximacion y como *hipótesis de trabajo,* admitiremos que el efecto resultante de todas esas fuerzas es proporcional a la distancia entre el elemento infinitesimal de la membrana celular y el centro de atraccion, es decir, el *centrosoma.*

Por lo tanto, y teniendo en cuenta la ley de Newton ello equivale a escribir

$$F_1 = \frac{k}{\rho}$$

en donde F_1 es la fuerza de atraccion, k una constante y ρ la distancia antes mencionada.

Por otro lado, y como es bien conocido [1], la trajectória de una particula que se mueve sometida a una cierta fueza, es, al mismo tiempo, la figura de equilíbrio de un hilo sometido a la accion de una fuerza

$$F'_1 = -\frac{F_1}{\gamma V}$$

donde γ representa la densidad del hilo y V la velocidad de la particula con tal de que en un punto comun a ambas curvas, la tension del hilo sea igual en magnitud y direction a la velocidad de la particula

[1] Schell: *Theorie der Brewegung und der Kräfte,* II Band, S. 148 *(Analogie zwischen Problemen des Gleichgewichts und Problemen der Bewegung),* Berlin, 1919.