* * *

Em Wiesbaden (Alemanha) sob a direcção do físico A. Sommerfeld, o químico K. Clusius e o biólogo A. Kühn, apareceu a revista mensal *Zeitschrift für Naturforschung,* que substituirá a publicação mensal de antes da guerra *Der Naturwissenchaften.*

[*Ciencia e Investigación* — Julio 1946]

* * *

Durante a semana de 15-19 de Julho, teve lugar na Universidade de Chicago, um colóquio geral sôbre Álgebra em que foram especialmente analisados os recentes progressos da álgebra nas suas relações com outros ramos da matemática como topologia, teoria das funções e geometria.

* * *

A Royal Society celebrou em 15 de Julho o tricentenário do nascimento de Newton.

* * *

O ano passado fundou-se em S. Paulo, Brasil, uma Sociedade Matemática, a que preside, por eleição, o professor Omar Catunda, da Universidade daquela mesma cidade.

* * *

A Academia das Ciências, em França, anunciou a concessão dos seguintes prémios para 1945:

Prémio Carrière — A. Lichnerowicz, da Universidade de Estrasburgo, pelos seus trabalhos matemáticos;

Prémio Montyon — Robert Fortet, da Universidade de Caen, pelos seus tradalhos de Cálculo das Probabilidades;

Prémio d'Ormoy — Izdem Mandelbrojt, do Colégio de França, pelos seus trabalhos matemáticos;

Prémio Saintour — Marcel Brelot, da Universidade de Grenoble, pelos seus trabalhos matemáticos e especialmente pelas suas publicações sôbre as funções sub-harmónicas.

Prémio Charles Dupin — Paul Vincensini, da Universidade de Besançon, pelos seus trabalhos de geometria superior.

O Prof. Elie Cartan foi eleito presidente da Academia das Ciências de Paris.

(do *Bull. Amer. Math. Soc.,* Vol. 52, n.º 5, Part. 1, May, 1946).

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

I. S. C. E. F. — Exame de Aptidão — **3 de Agôsto de 1946.**

2218 — Defina e enuncie as principais propriedades da simetria em relação a um ponto e a um eixo e justifique a sua aplicação como métodos de demonstração. Exemplifique, provando que «de todos os triângulos com a mesma base e a mesma altura, o isósceles tem perímetro mínimo». R: *Sejam* $\overline{AB}$ *e* h *respectivamente a base e altura comuns. Então qualquer triângulo nas condições do enunciado poderá ter o seu terceiro vértice sôbre a recta* r) *paralela a* AB *à distância* h. *Tome-se* $\overline{A'B'}$ *simétrico de* $\overline{AB}$ *em relação a* r) *e considerem-se os triângulos* [ABC] *isósceles e* [ABC'] *não isósceles. Da simetria* $\overline{CB}=\overline{CB'}$ *e* $\overline{C'B}=\overline{C'B'}$ *e como* $\overline{AC'}+\overline{C'B'}>\overline{AC}+\overline{CB'}$ *ter-se-á sempre* $\overline{AB}+\overline{AC'}+\overline{C'B}>\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{CB}$.

2219 — Sabendo que as medidas dos catetos dum triângulo rectângulo são as raízes da equação $2x(x+a)+b^2=0$ determine a medida da altura correspondente à hipotenusa do mesmo triângulo. Discuta o problema e examine, em particular, o caso de ser $a=\operatorname{sen} t$ e $b=\cos t$, com t compreendido entre 0 e 2π. R: *Sendo* c_1 *e* c_2 *os catetos,* d *a hipotenusa e* h *a altura tem-se:* $c_1+c_2=-a$, $c_1c_2=b^2/2$ *donde* $d^2=c_1^2+c_2^2=(c_1+c_2)^2-2c_1c_2=a^2-b^2$ *e* $h=c_1c_2/d=$ $=\dfrac{b^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}$. *A possibilidade do problema resultará dos dados* a *e* b *satisfazerem a* $a<0$, $b\neq0$, *e* $a^2>b^2$ *e em particular* $5\pi/4<\alpha<3\pi/2$ *e* $3\pi/2<\alpha<7\pi/4$.

2220 — Diga de quantas maneiras distintas é possível extrair, duma só vez, um número par de esferas dum saco que contém n, tôdas diferentes. Resolva o mesmo problema no caso duma tiragem em número ímpar e mostre que o cociente dos dois resultados tende para a unidade quando n aumenta. R: *No primeiro caso tem-se:* $\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=2^{n-1}-1$ *e no segundo* $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots=2^{n-1}$. *O cociente será* $\dfrac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}=1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$ *e a fracção tende para zero quando* n *aumenta.*

2221 — Verifica-se que, utilizando de modo conveniente 7 pêsos respectivamente de 1, 3, 9, 27, 81, 243, e 729 gramas nos dois pratos duma balança, é possível conhecer o pêso exacto em gramas de corpos que não ultrapassem os 1.093. Apresente uma justificação dêste facto. R: *Os valores dos pêsos dados são potências sucessivas de* 3 *cuja soma é igual a* 1093. *Ora qualquer número inteiro* N *pode escrever-se* $N=a_0+a_1 3+a_2 3^2+\cdots+a_n 3^n$ *onde os coeficientes só podem tomar, como se sabe, os valores* 0, 1 ou 2. *Notando que* $2=3-1$, N *poderá então escrever-se* $N=b_0+b_1 3+b_2 3^2+\cdots+b_{n+1} 3^{n+1}$ *onde os coeficientes poderão agora tomar os valores* -1, 0 *e* 1 *o que justifica o facto apontado.*

2222 — Mostre que existe uma infinidade de números fraccionários entre 2/3 e 4/5. A propriedade será verdadeira para dois números fraccionários quaisquer? R: *Como* $4/5-2/3=2/15$ *a infinidade de fraccionários da forma* $2/3+2/(15+k)$ *onde* k *é positivo demonstram a propriedade. Em geral ter-se-á, para dois números fraccionários* $a/b<c/d$, $c/d-a/b=(bc-ad)/bd$ *donde* $\frac{a}{b}+\frac{bc-ad}{bd+k}$ *como no caso particular.*

Observações:

1. É obrigatória a resposta a 4 pontos, nomeadamente ao primeiro.
2. As respostas que não forem convenientemente justificadas não serão consideradas na classificação.

Enunciados e soluções dos números 2218 a 2222 de J. Remy Teixeira Freire.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — Exame final — 1945.

2223 — Indicar a natureza da série

$$\sum \frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)(n+1)}$$

e caso seja convergente, um limite excedente para o êrro cometido tomando para soma da série a dos seus nove primeiros termos.

R: *Tem-se* $a_n=\frac{1}{2n(2n-1)\cdots(n+2)(n+1)}=\frac{n!}{(2n)!}$.

Aplicando o critério d'Alembert: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!n!}=$ $=\frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4n+2}$, *que tende para zero com* $1/n$. *A série é, portanto, convergente. A expressão de um limite excedente de* R_n *é* $\frac{a_n}{1-e_n}$, *sendo* e_n *o limite superior dos números*

$$\frac{a_{n+p+1}}{a_{n+p}} \quad para \quad p=0,1,2,\cdots$$

No nosso caso, êles formam a sucessão de termo geral $\frac{1}{4(n-p)+2}$ *constantemente decrescente com* $1/p$. *Por isso o seu limite superior é o primeiro termo que corresponde a* $p=0$, $\frac{1}{4n+2}=e_n$. *Então* $\frac{a_n}{1-e_n}=\frac{n!(4n+2)}{(2n)!(4n+1)}$ *e, para* $n=9$, *vem* $9!/18!\cdot 38/37$, *quantidade certamente inferior a* 10^{-9} *pois suprimindo no denominador os factores que figuram em* 9! *ainda ficam* 9 *factores, o menor dos quais é* 10. *Se não interessar maior precisão, podemos tomar* 10^{-9} *para limite pedido.*

2224 — Mostrar que se pode aplicar com segurança o método de Newton ao cálculo aproximado do zero do polinómio $2x^4+4x^3+3x^2-2x-2$ compreendido em $(1/2,1)$ e calcular duas aproximações. R: *Designando por* f(x) *o polinómio dado será*

$$f'(x)=8x^3+12x^2+6x-2$$
$$f''(x)=24x^2+24x+6=6(4x^2+4x+1).$$

Como esta derivada é sempre positiva no intervalo dado, o método é seguramente aplicável ao extrêmo em que fôr também positiva f(x) *isto é, a* $x=1$. *Aplicando a fórmula conhecida* $b_{n+1}=b_n-f(b_n)/f'(b_n)$ *com* $b_0=1$, *vem* $f(b_0)=f(1)=5$, $f'(b_0)=f'(1)=24$ e $b_1=1-5/24=0{,}791\cdots$ *Tomando os dois primeiros algarismos e aproximando por defeito, vem*

$$f(b_1)=f(0{,}79)=0{,}8433\cdots$$
$$f'(b_1)=f'(0{,}79)=16{,}1732\cdots$$
$$e \quad b_2=0{,}79-0{,}8433/16{,}1732=0{,}73785\cdots$$

2225 — Equação da superfície cilíndrica de geratrizes paralelas a $x=z$, $y=0$ e directriz $xz=1$, $x=y$. R: *As rectas paralelas à direcção dada são* $x=z+h$, $y=k$. *Eliminando* x, y *e* z *entre estas equações e as da directriz, obtém-se sucessivamente*

$$\begin{cases} yz=1 \\ x=z+h \\ y=k \end{cases} \quad \begin{cases} kz=1 \\ k=z+h \end{cases} \quad k=1/k+h$$

sendo esta última a relação procurada entre h *e* k.