possível conhecer o pêso exacto em gramas de corpos que não ultrapassem os 1.093. Apresente uma justificação dêste facto. R: *Os valores dos pêsos dados são potências sucessivas de* 3 *cuja soma é igual a* 1093. *Ora qualquer número inteiro* N *pode escrever-se* $N=a_0+$ $+a_1 3+a_2 3^2+\cdots+a_n 3^n$ *onde os coeficientes só podem tomar, como se sabe, os valores* 0, 1 ou 2. *Notando que* $2=3-1$, N *poderá então escrever-se* $N=b_0+b_1 3+$ $+b_2 3^2+\cdots+b_{n+1} 3^{n+1}$ *onde os coeficientes poderão agora tomar os valores* -1, 0 *e* 1 *o que justifica o facto apontado.*

2222 — Mostre que existe uma infinidade de números fraccionários entre 2/3 e 4/5. A propriedade será verdadeira para dois números fraccionários quaisquer?

R: *Como* $4/5-2/3=2/15$ *a infinidade de fraccionários da forma* $2/3+2/(15+k)$ *onde* k *é positivo demonstram a propriedade. Em geral ter-se-á, para dois números fraccionários* $a/b<c/d$, $c/d-a/b=(bc-ad)/bd$ *donde* $\frac{a}{b}+\frac{bc-ad}{bd+k}$ *como no caso particular.*

Observações:

1. É obrigatória a resposta a 4 pontos, nomeadamente ao primeiro.
2. As respostas que não forem convenientemente justificadas não serão consideradas na classificação.

Enunciados e soluções dos números 2218 a 2222 de J. Remy Teixeira Freire.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — Exame final — 1945.

2223 — Indicar a natureza da série

$$\sum \frac{1}{2n\,(2n-1)\,(2n-2)\cdots(n+2)\,(n+1)}$$

e caso seja convergente, um limite excedente para o êrro cometido tomando para soma da série a dos seus nove primeiros termos.

R: *Tem-se* $a_n=\dfrac{1}{2n\,(2n-1)\cdots(n+2)\,(n+1)}=\dfrac{n!}{(2n)!}$.

Aplicando o critério d'Alembert: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)!\,(2n)!}{(2n+2)!\,n!}=$ $=\dfrac{n+1}{(2n+2)\,(2n+1)}=\dfrac{1}{4n+2}$, *que tende para zero com* $1/n$. *A série é, portanto, convergente. A expressão de um limite excedente de* R_n *é* $\dfrac{a_n}{1-e_n}$, *sendo* e_n *o limite superior dos números*

$$\frac{a_{n+p+1}}{a_{n+p}} \quad para \quad p=0,1,2,\cdots$$

No nosso caso, êles formam a sucessão de termo geral $\dfrac{1}{4\,(n-p)+2}$ *constantemente decrescente com* $1/p$. *Por isso o seu limite superior é o primeiro termo que corresponde a* $p=0$, $\dfrac{1}{4n+2}=e_n$. *Então* $\dfrac{a_n}{1-e_n}=\dfrac{n!\,(4n+2)}{(2n)!\,(4n+1)}$ *e, para* $n=9$, *vem* $9!/18!\cdot 38/37$, *quantidade certamente inferior a* 10^{-9} *pois suprimindo no denominador os factores que figuram em* 9! *ainda ficam* 9 *factores, o menor dos quais é* 10. *Se não interessar maior precisão, podemos tomar* 10^{-9} *para limite pedido.*

2224 — Mostrar que se pode aplicar com segurança o método de Newton ao cálculo aproximado do zero do polinómio $2x^4+4x^3+3x^2-2x-2$ compreendido em $(1/2,1)$ e calcular duas aproximações. R: *Designando por* f(x) *o polinómio dado será*

$$f'(x)=8x^3+12x^2+6x-2$$
$$f''(x)=24x^2+24x+6=6\,(4x^2+4x+1)\,.$$

Como esta derivada é sempre positiva no intervalo dado, o método é seguramente aplicável ao extrêmo em que fôr também positiva f(x) *isto é, a* $x=1$. *Aplicando a fórmula conhecida* $b_{n+1}=b_n-f(b_n)/f'(b_n)$ *com* $b_0=1$, *vem* $f(b_0)=f(1)=5$, $f'(b_0)=f'(1)=24$ e $b_1=1-5/24=0{,}791\cdots$ *Tomando os dois primeiros algarismos e aproximando por defeito, vem*

$$f(b_1)=f(0{,}79)=0{,}8433\cdots$$
$$f'(b_1)=f'(0{,}79)=16{,}1732\cdots$$
$$e\ \ b_2=0{,}79-0{,}8433/16{,}1732=0{,}73785\cdots$$

2225 — Equação da superfície cilíndrica de geratrizes paralelas a $x=z$, $y=0$ e directriz $xz=1$, $x=y$. R: *As rectas paralelas à direcção dada são* $x=z+h$, $y=k$. *Eliminando* x, y *e* z *entre estas equações e as da directriz, obtém-se sucessivamente*

$$\begin{cases} yz=1 \\ x=z+h \\ y=k \end{cases} \quad \begin{cases} kz=1 \\ k=z+h \end{cases} \quad k=1/k+h$$

sendo esta última a relação procurada entre h *e* k.

Substituindo estes parâmetros pelos valores tirados da equação das directrizes, vem

$$y=1/y+x-z \quad \text{ou} \quad y^2-xy+yz-1=0,$$

que é a equação procurada.

2226 — Dados $a=90^\circ$, $C=23^\circ 19' 22''$ e $b=45^\circ 12' 0''$, calcular o elemento B do mesmo triângulo esférico.

Soluções dos n.os 2223 a 2226 de Renato Pereira Coelho.

F. C. C. — Álgebra Superior — Exame final — Outubro de 1945

2227 — Para que valores de x é absolutamente convergente a série de têrmo geral $e^n x^n/n$? Estude a natureza da série nos extremos do intervalo de convergência. R: *A série é absolutamente convergente no interior do intervalo* $(-1,1)$; *para* $x=-1$, *é simplesmente convergente, e para* $x=1$, *divergente.*

2228 — Determinar os máximos e mínimos da função $f(x)=(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$. R: *A função é mínima para* $x=\operatorname{arc\,sen} 1/e$ *e máxima para* $x=\pi/2$.

2229 — Determine a natureza da quádrica $x^2+y^2+z^2-4xy-1=0$. Qual é a equação referida aos eixos? R: *É um hiperboloide de uma fôlha de revolução. A sua equação referida aos eixos é* $x^2+y^2-3z^2=1$.

2230 — A função $f(x)=x-|x|$ tem derivada no ponto $x=0$? E derivadas laterais? Indique o valor de uma ou de outras, no caso de existirem. R: *A fun- tem derivadas laterais com os valores* $f'(-0)=2$ *e* $f'(+0)=0$.

Soluções dos n.os 2227 a 2230 de L. G. Mendonça de Albuquerque.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 5.° Exercício de revisão.

2231 — São dadas as rectas $r \equiv 2x=3y-1=z-1$ e $s \equiv x-1=y=2z-2$. *a)* Verifique que r e s não são complanas. *b)* Determine a equação cartesiana do plano π que passa por r e é paralelo a s. *c)* Determine as equações cartesianas da recta p que passa pela origem e é perpendicular a r e s. *d)* Calcule a distância de r a s. R: *Como* $r \equiv \frac{x}{3}=\frac{y-1/3}{2}=\frac{z-1}{6}$ *e* $s \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y}{2}=z-1$, *os vectores* $\mathbf{r}=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{s}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ *têm as direcções das rectas* r *e* s, *respectivamente; o ponto* $R \equiv (0,1/3,1)$ *pertence a* r *e o ponto* $S \equiv (1,0,1)$ *pertence a* s. a) *Em virtude de ser* $\mathbf{r} \,|\, \mathbf{s} \wedge (R-S)=-13 \neq 0$, r *e* s *não são complanas.* b) *Designando por* $P \equiv (x,y,z)$ *o ponto corrente de* π *ter-se-á* $\mathbf{r} \,|\, \mathbf{s} \wedge (P-R)=0$ *ou seja* $\pi \equiv 10x-9y-2z+5=0$. c) *A direcção de* p *é a do vector* $\mathbf{p}=10\mathbf{i}-9\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ *e então* $p \equiv \frac{x}{10}=\frac{y}{-9}=\frac{z}{-2}$.

d) *Tem-se* $d(r,s)=d(S,\pi)-13/\sqrt{185}$.

2232 — Dados os pontos $A(1,0,2)$, $B(0,-1,1)$ e a recta $r \equiv x=y/2=z/m$, determine as coordenadas do ponto C da recta r tal que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em C. Discuta o problema. R: *Seja* $C \equiv (\alpha, \beta=2\alpha, \gamma=m\alpha)$. *Como o triângulo* [ABC] *é rectângulo em* C, $(C-A) \,|\, (C-B)=0$, *ou* $(m^2+5)\alpha^2+(1-3m)\alpha+2=0$, *ou* $\alpha=(3m-1 \pm \sqrt{m^2-6m-39})/2(m^3+5)$. *Para* $m>3+4\sqrt{3}$ *ou* $m<3-4\sqrt{3}$ *o problema tem duas soluções reais; para* $m=3+4\sqrt{3}$ *ou* $m=3-4\sqrt{3}$ *o problema tem uma solução real; para* $3-4\sqrt{3}<m<3+4\sqrt{3}$ *o problema não tem soluções reais.*

2233 — Representação cartesiana do lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que passam pelos pontos $O \equiv (0,0,0)$, $P \equiv (1,2,1)$ e são tangentes ao plano $\pi \equiv 2x+y-2z-3=0$. R: *Sendo* $M \equiv (x,y,z)$ *o ponto corrente do lugar pedido, tem-se* $d(M,O)=d(M,P)-d(M,\pi)$, *isto é,*

$$\begin{cases} x+2y+z-3=0 \\ 5x^2+8y^2+5z^2-4xy+8xz+4yz+12x+6y-12z-9=0 \end{cases}$$

Enunciados e soluções dos n.os 2231 a 2233 de José Morgado.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 2.° Exame de frequência—Maio 1946.

2234 — Dado o sistema
$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x+(a^2-6)\,y-z-at=0 \\ 4x+(a^2-6)^2\,y+z+a^2t=0 \\ 8x+(a^2-6)^3\,y+z+a^3t=0, \end{cases}$$
determine os valores de a para os quais admite solução não nula. R: *Os valores de* a *pedidos são os que satisfazem à condição* $\Delta=0$, *onde* Δ *é o determinante dos coeficientes das incógnitas. Como* Δ *é um determinante de Vandermonde, de base* $(2, a^2-6, -1, -a)$, *é nulo se, e só se, é verificada uma das seguintes igualdades;* $2=a^2-6$, $2=-a$, $a^2-6=-1$, $a^2-6=-a$, $-1=-a$. *Tem-se, portanto,* $a=\pm 2\sqrt{2}$, $a=\pm 2$, $a=\pm\sqrt{5}$, $a=-3$, $a=1$.

2235 — A e B jogam alternadamente um dado. Cada um deles faz dois lançamentos e A inicia o jôgo. A ganha se tirar o ponto 6 antes de B tirar o ponto 5; B ganha se tirar o ponto 5 antes de A tirar o ponto 6. Calcule as probabilidades de A e B ganharem o jôgo. R: *Probalidade de* A *ganhar:* $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{61}{216}$

Probalidade de B *ganhar:* $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{305}{1296}$.

2236 — Seja α uma raiz primitiva de índice n da unidade. Mostre que α^2 é ainda uma raiz primitiva de índice n da unidade se, e só se, n é ímpar. R: *Se* n *é ímpar,* α^2 *é uma raiz primitiva de índice* n *da unidade, visto* 2 *ser primo com* n*; se* n *é par* $(n=2k)$ *então:* $(\alpha^2)^k=\alpha^{2k}=1$, *o que mostra não ser* n *o grau de primitividade de* α^2, *pois* $k<n$.

2237 — Dados uma circunferência γ e um ponto P exterior, do mesmo plano, prove qne a potência p de P em relação a γ é $p=(A-P)\mid(B-P)$, designando A e B as extremídades de um diâmetro qualquer. R: *Designando por* B' *a projecção de* B *sôbre* PA *e por* T *o ponto de contacto da tangente tirada por* P *à circunferência, tem-se* $(A-P)\mid(B-P)=\overline{PA}\cdot\overline{PB'}=\overline{PT}^2$, c. q. d.

2238 — Dado um triângulo $[A,B,C]$, designando por G o ponto de encontro das medianas, prove que $(A-G)+(B-G)=G-C$. R: *Consideremos o ponto* D *tal que* $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{GB}$; D *está sôbre a recta* CG, *o quadrilátero* $[A,B,C,D]$ *e um paralelogramo e* $\overline{CG}=\overline{GD}$. *então* $(A-G)+(B-G)=D-G=G-C$, c. q. d.

Soluções dos n.os 2234 a 2238, de José Morgado.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 2.º exame de frequência, ordinário — 16-6-945.

2239 — Dada a função $y=\log[a\log bx]$ determinar a e b de modo que ela admita uma inflexão no ponto de coordenadas $(1,0)$. Estudá-la e representá-la geomètricamente nessa hipótese. Calcular $y(e^{-1/2})$, utilizando o desenvolvimento em série da função $\log(1+x)$ com um êrro inferior a $1/10^2$. R: *Terá que ser* $y''(1)=0$ *e* $y(1)=0$ *sistema que resolvido dá* $a=-1$, $b=e^{-1}$; *a função dada reduz-se a* $y=\log[1-\log x]$ *que é apenas definida para valores de* x *tais que* $1-\log x>0$ *ou seja no intervalo aberto* $(0,e)$ *onde é contínua, monotónica decrescente, com a concavidade voltada no sentido positivo do eixo das ordenadas no intervalo* $(0,1)$ *e em sentido oposto no intervalo* $(1,e)$. *O ponto* $(1,0)$ *é de inflexão e* $\lim_{x\to+0} y=+\infty$ *e* $\lim_{x\to e-0} y=-\infty$; $y'=-1/x(1-\log x)$ *e* $y''=-\log x/x^2(1-\log x)^2$; $y(e^{-1/2})=\log(1+1/2)=1/2-1/8+1/48-1/384+\cdots$ *Basta tomar os três primeiros termos dêste desenvolvimento para assegurar o resultado,* $y(e^{-1/2})=0{,}40$, *com um êrro inferior a* $1/10^2$.

2240 — Determinar o maior valor inteiro de a para o qual a equação $x^3-a(x+1)=0$ tem uma só raiz real no intervalo $(1,2)$. Nessa hipótese, resolvê-la determinando as raízes irracionais com um êrro inferior a $1/10$ e utilizando o método gráfico para a separação. R; *Representando por* $f(x)$ *o primeiro membro da equação dada, têm que ser de sinais contrários* $f(1)$ *e* $f(2)$ *ou o que é o mesmo*

$$f(1)\cdot f(2)<0\to(1-2a)(8-3a)<0 \text{ ou } 1/2<a<8/3.$$

O maior valor de a *inteiro neste intervalo é* $a=2$. *A equação* $x^3-2(x+1)=0$ *sem raízes racionais tem uma irracional no intervalo* $(1,2)$ *e duas raízes complexas. Essa raiz real, a menos de uma décima é* $x=1{,}7$.

Soluções dos n.os 2239 e 2240 de Orlando Morbey Rodrigues.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — Julho de 1945.

2241 — Resolver a equação $x^8-2x^4+2=0$. Representação gráfica das raízes. R: *Fazendo* $x^4=y$, *vem* $y^2-2y+2=0$ *e* $y_1=1-i$, $y_2=1-i$. *Tem-se, pois, que resolver a equação* $x^4=1+i$ *e* $x^4=1-i$ *ou calcular os valores de* $\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\pi/4}{4}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi+\pi/4}{4}\right)$ *e de* $\sqrt[4]{1-i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{2k\pi+7\pi/4}{4}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi+7\pi/4}{4}\right)$ *que são complexos de módulo* $\sqrt[8]{2}$ *e de argumentos* $\pi/16$, $9\pi/16$, $17\pi/16$, $25\pi/16$ *e* $7\pi/16$, $15\pi/16$, $23\pi/16$, $31\pi/16$, *respectivamente.*

2242 — Calcular a área do triângulo formado pela bissectriz do ângulo XOY com as assíntotas da cónica $x^2+2xy-y^2+2x-7y+1=0$. R: *Tem-se* $A=1$, $B=1$, $C=-1$, $D=1$, $E=-7/2$, $F=1$; *a cónica é uma hipérbole não degenerescente como se deduz do cálculo dos valores de* B^2-AC *e de* $\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$.

O centro é um dos vértices e as suas coordenadas são a solução de $\begin{cases} 2x+2y+2=0 \\ 2x-2y-7=0 \end{cases}$ *ou* $x_1=5/4$, $y_1=-9/4$. *As assíntotas têm por equações* $y+9/4=(1\pm\sqrt{2})(x-5/4)$ [*as 2 direcções assintóticas são as raízes da equação* $Cm^2+2Bm+A=0$]. *Os outros 2 vértices do triângulo são os pontos de intersecção das assíntotas com* $y=x$, *e as suas coordenadas* $x_2=y_2=(7\sqrt{2}+10)/4$ *e* $x_3=y_3=(10-7\sqrt{2})/4$. *A área do triângulo e*

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=49\sqrt{2}/8\ (L^2).$$

2243 — Um plano π é definido pelos pontos $A(3,0,0)$, $B(0,2,0)$ e $C(0,0,1)$ e a recta r pelos pontos $P(1,2,3)$ e $Q(-4,3,0)$. Determinar sôbre r um ponto M tal que o volume do tetraedro $MABC$, seja igual a 20. R: *Equações da recta* r: $\frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-3}$ *Sejam* (x,y,z) *as coordenadas do ponto* M. *Para as determinar necessito de* 3 *equações, duas das quais são as equações de* r. *A 3.ª equação é* $V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=20$ *ou* $2x+3y+6z-126=0$.

O sistema $\begin{cases} 2x+3y+6z-126=0 \\ \frac{x-1}{-5}=\frac{y-2}{1} \\ \frac{x-1}{-5}=\frac{z-3}{-3} \end{cases}$ *admite a solução:* $M(21,-2,15)$.

Soluções dos n.os 2241 a 2243, de Jorge Cândido da Silva.

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **Exame final — Outubro de 1945**

2244 — Quando é mínima a distância da origem das coordenadas ao hiperboloide de uma fôlha $x^2-yz=1$? R: *A distância é mínima para os pontos do hiperboloide de coordenadas:* $(0,0,1)$ *e* $(0,0,-1)$.

2245 — Determinar as trajectórias ortogonais da família de curvas dada pela equação $C(x+y)=xy+1$. R: *A equação da família de trajectórias ortogonais é* $y^3-x^3-3(y-x)=3K$.

Soluções dos n.os 2244 e 2245 de L. G. M. de Albuquerque.

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — **Exame final — Julho de 1945.**

2246 — Integrar a equação

$$\frac{d\rho}{d\theta}+\frac{\rho}{\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\theta}-\operatorname{sen}2\theta,$$

e determinar a assíntota da linha integral que passa pelo ponto $(\pi/2,1)$. R: *Integrando a equação sem 2.º membro vem* $\rho=C_1/\theta$ *e, variando a constante, obtém-se*

$$C_1=\int\cos^2\theta\,d\theta-\int\theta\operatorname{sen}2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\theta\cos2\theta+\frac{1}{2}\theta+C_2=\theta\cos^2\theta+C_2.$$

Logo $\rho=\frac{C_2}{\theta}+\cos^2\theta$. *Portanto* $1=\frac{2}{\pi}C_2$, $C_2=\frac{\pi}{2}$, $\rho=\frac{\pi}{2\theta}+\cos^2\theta$. *Para* $\theta=0$ *vem* $\rho=\infty$. *A subtangente polar é* $S_t=\rho^2\frac{d\theta}{d\rho}=-\frac{(\pi+2\theta\cos^2\theta)^2}{2(\pi+2\theta^2\operatorname{sen}2\theta)}\to-\frac{\pi}{2}$.

Temos pois para equação polar da assíntota $\rho=\frac{\pi}{2\operatorname{sen}\theta}$.

2247 — Considerar a linha representada pela equação $y=\log(1+\cos x)$ no intervalo $-\pi\lesseqgtr x\lesseqgtr\pi$. Determinar os máximos e mínimos de y e o comprimento do arco situado no 1.º quadrante. R:

$$y=\log(1+\cos x)$$

$$y'=-\frac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0\to x=0$$

$$\varphi'=-\cos x\ \begin{cases}\varphi'(0)<0\\ \psi(0)>0\end{cases}\ \textit{logo}\ y''_0<0\ \textit{máximo}.$$

Para $x=\pi$ *e* $x=-\pi$ *vem* $y'=\infty$.

$y'(\pi-h)<0$, $y'(\pi+h)>0$, *logo trata-se dum mínimo*.

Do mesmo modo $y'(-\pi-h)<0$, $y'(-\pi+h)>0$, *mínimo. Temos*

$$ds=\sqrt{1+\frac{\operatorname{sen}^2x}{(1+\cos x)^2}}\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{1+\cos x}}dx=\frac{dx}{\cos x/2}=\frac{dx}{\operatorname{sen}(\pi/2-x/2)}.$$

$$s=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\operatorname{sen}(\pi/2-x/2)}=-2\log\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}.$$

2248 — Dada a parábola $y^2=2x$ exprimir y e x em função do ângulo t que a tangente em $M(x,y)$ faz com o eixo dos xx. Sôbre a normal em M, marcar um segmento $\overline{MP}=a$ e calcular em função de t o comprimento do arco descrito pelo ponto P, a partir do ponto de ordenada nula. R: *Temos* $\begin{cases}x=1/2\cdot\operatorname{cotg}^2t\\ y=\operatorname{cotg}t.\end{cases}$

Sendo (X,Y) *as coordenadas de* P *temos*

$$\begin{cases}X=\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2t+a\operatorname{sen}t\\ Y=\operatorname{cotg}t-a\cos t\end{cases}\quad\text{e}\quad ds=\frac{a\operatorname{sen}^3t-1}{\operatorname{sen}^3t}dt$$

$$s=\int_{\pi/2}^{t}\frac{a\operatorname{sen}^3t-1}{\operatorname{sen}^3t}dt=$$

$$=a(t-\pi/2)+\frac{1}{4}\log\frac{1+\cos t}{1-\cos t}+\frac{\cos t}{2\operatorname{sen}^2t}.$$

Soluções dos n.os 2246 e 2248 de Jayme Rios de Souza.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **1.º exame de frequência — 22-3-1946.**

2249 — Seja I o conjunto de todos os triângulos possíveis. Definamos em I um operador *fecho* da seguinte maneira: $\overline{O}=O$; se $X\neq O$, $\overline{X}$ é o conjunto de todos os triângulos semelhantes aos de X. *a)* Mostre que $\overline{X+Y}=\overline{X}+\overline{Y}$ e $\overline{\overline{X}}=\overline{X}$, quaisquer que sejam os subconjuntos X e Y de I. *b)* Prove que neste espaço, todo o conjunto fechado é também aberto e todo o conjunto não fechado é também não aberto.

2250 — Mostre que as transformações $\theta(x)=1/(1-x)$, $\theta_2(x)=\theta(\theta(x))$, $\theta_3(x)=\theta(\theta_2(x))$ constituem um grupo relativamente ao produto de transformações.

2251 — Se as raízes da equação $f(x)=0$, onde $f(x)$ é derivável, forem tôdas reais, que poderá concluir àcêrca da realidade das raízes da equação $f'(x)-2xf(x)=0$? Justifique. R: *São tôdas reais, como se conclui aplicando um corolário do teorema de Rolle à equação* $e^{-x^2}f(x)=0$.

2252 — Calcule: $\displaystyle\int \frac{\text{arc sen}\log x}{x\sqrt{1-\log^2 x}}dx$,

$$\int x^3(1-x^2)^{1/3}dx,\quad \int\frac{\text{sen}\,2x\,dx}{1+\text{sen}^4 x},\quad \int\frac{dx}{x(1+x)^{3/4}}.$$

R: $\frac{1}{2}(\text{arc sen}\log x)^2+C$, $\frac{3}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{7/3}}{7}-\frac{(1-x^2)^{4/3}}{4}\right]+C$

$\text{arctg}\,\text{sen}^2 x+C$, $\log\left(C\,\frac{(1+x)^{1/4}-1}{(1+x)^{1/4}+1}\right)-\text{arctg}(1+x)^{1/4}$

2253 — Considere a função

$$f(x)\,g(x)-f(a)\,g(x)-g(b)\,f(x)$$

e suponha que $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis no intervalo $[a,b]$. Mostre que para um valor conveniente de x do referido intervalo se tem $f'(x)[g(x)-g(b)]=g'(x)[f(a)-f(x)]$. R: *Como a função dada toma valores iguais para* $x=a$ *e* $x=b$, *está, em virtude das hipóteses feitas, nas condições de aplicabilidade do teorema de Rolle e, por consequência, existe um valor de* x *do intervalo* $[a,b]$ *para o qual se tem* $f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)-f(a)\,g'(x)-g(b)\,f'(x)=0$, *igualdade equivalente à igualdade a demonstrar.*

Soluções dos n.os 2251 a 2253 de José Morgado.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — **2.º exame de frequência, 7-6-946.**

2254 — Dada a curva C de equações paramétricas $x=e^{1-t}\cos t$, $y=e^{1-t}\,\text{sen}\,t$, seja M um ponto qualquer de C, T o ponto de encontro da tangente a C em M com o eixo Oy e N o ponto de encontro da normal a C em M com o eixo Ox. Mostre que TN é paralela à bissectriz dos quadrantes pares.

2255 — Mostre que a série $\text{sen}\,x+\text{sen}\frac{x}{2}+\text{sen}\frac{x}{2^2}+\cdots+\text{sen}\frac{x}{2^{n+1}}+\cdots$ é uniformemente convergente qualquer que seja x. Dêste facto que pode concluir acêrca da série $\cos x-2\cos\frac{x}{2}+\cdots+2^{n-1}\cos\frac{2^{n-1}}{x}+\cdots$? R: *A primeira parte é evidente; quanto à segunda, nada se pode concluir.*

2256 — Calcule o volume, gerado pela revolução, em tôrno da recta $x=4$, da área delimitada pelas curvas $y=x^2$ $y=0$, $x=4$ e $y+x-6=0$. R: $80\pi/3$.

2257 — Mostre que o comprimento de arco da curva $x=a\cos t-1/3\cdot(a-b)\cos^3 t$, $y=b\,\text{sen}\,t+1/3\cdot(a-b)\,\text{sen}^3 t$, medido a partir do ponto $t=0$ é

$$1/2\cdot(a+b)\,t-1/2\cdot(a-b)\cos t\,\text{sen}\,t.$$

Enunciados e soluções dos n.os 2255 a 2257 de F. Carvalho Araújo.

I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.ª Cadeira — Exame final — **Outubro, 1945.**

2258 — Calcular o laplaciano $\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ da função implícita z de x e y definida pela equação $z^3+3zx^2=axy$.

2259 — Determinar os máximos e mínimos da função $z=5x+3y$ condicionados pela equação $4\,\text{sen}\,x=3\cos y$ R: *As condições de estacionaridade são:*

$$\begin{cases}\varphi\equiv 4\,\text{sen}\,x-3\cos y=0\\ \dfrac{\partial(z,\varphi)}{\partial(x,y)}=5\,\text{sen}\,y-4\cos x=0,\end{cases}$$

donde $x=\text{arctg}(\pm 9/5\sqrt{7})$, $y=\text{arctg}(\pm\sqrt{7}/3)$.

2260 — Integrar a equação

$\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0$. R: *A equação proposta pode escrever-se* $d\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right)+\frac{y^2}{x^2+y^2}\,d\left(\frac{x}{y}\right)=0$

ou $d\left(\sqrt{1+x^2+y^2}\right)+\frac{1}{1+(x/y)^2}\,d(x/y)=0$,

donde $\sqrt{1+x^2+y^2}+\text{arctg}\,x/y=C$.

Soluções dos n.os 2259 e 2260 de Orlando Morbey Rodrigues.

F. C. P. — Análise Superior — **2.º exame de frequência — Maio de 1946.**

2261 — Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ pela teoria dos resíduos. R: *Integrando a função* $\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ *ao* *longo do contôrno constituido pelo segmento* $(-R, +R)$ *do eixo* OX *e pela semi-circunferência de centro* O *e raio* R (*situada, por ex., na parte superior do eixo* OX) *e, seguidamente, fazendo crescer* R *além de todo limite, obtem-se, fàcilmente, para valor do integral* $\pi/6$.

2262 — Calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx$ empregando a função $\Gamma(x)$. R: *Efectuando a mudança de variável* $\operatorname{sen}^2 x = t$, *encontra-se o integral euleriano* $B(2,3)$. *O valor do integral é portanto* $\frac{\Gamma(2)\,\Gamma(3)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{6}$.

2263 — Consideremos o integral $\int_0^2 \frac{dz}{2z+i}$. Calcular a diferença dos seus valores correspondentes aos dois caminhos seguintes: 1.º A espiral $\rho = \theta/\pi$, 2.º O eixo dos xx. R: *Uma aplicação imediata do teorema dos resíduos conduz ao resultado* $i\pi$.

Soluções dos n.os 2261 a 2263 de Laureano Barros

MECÂNICA RACIONAL

ALGER — Faculté des Sciences — MÉCANIQUE RATIONELLE — **Epreuve Théorique — Mai 1946**

2264 — On considère un disque D circulaire homogène de masse m de rayon a dont le plan est toujours horizontal. Une bille creuse de rayon b réduite à sa surface supposée infiniment mince et homogène, de même masse m, roule sans glisser sur le disque, qu'elle touche en un point I.

I — Le disque est assujetti à tourner avec une vitesse angulaire constante α autour de son centre qui est fixe. Introduisant les coordonnées du vecteur rotation de la bille sur des axes de direction fixe, écrire des équations définissant le mouvement de la bille. En déduire le mouvement du point I. Cas où la vitesse du centre de la bille est nulle à l'instant initial.

II — Le centre du disque étant toujours fixe, celui-ci tourne librement. Etablir un système d'équations définissant le mouvement du système. Démontrer que la trajectoire de I est située en général sur une conique dont un axe passe par O. Cette trajectoire peut-elle être rectiligne?

III — Mêmes questions en supposant que le disque glisse sans frottement sur un plan horizontal P, et que le centre de gravité du système a une vitesse nulle à l'instant initial. Quelle est alors la courbe base du mouvement du disque par rapport au plan P?

Note. On ne se préocupera pas des cas où I atteindrait la circonférence du disque. R: Notation: *Trièdre issu du centre* 0 *du disque. Centre de la bille* $C(x, y, b)$, *rotation* $\vec{\Omega}(p, q, r)$, *composante horizontale de la reaction du disque sur la bille* $\vec{R}_1(X, Y, 0)$, *angle de rotation du disque* θ.

Les théorèmes du centre de gravité et du moment cinétique s'écrivent

$$m\frac{\overrightarrow{d^2 I}}{dt^2} = \vec{R}_1, \quad \frac{2}{3} m b^2 \frac{\overrightarrow{d\Omega}}{dt} = \overrightarrow{CI} \wedge \vec{R}_1.$$

On en déduit $p = \frac{3}{2b} y' + B_1$, $q = -\frac{3}{2b} x' + C_1$.

I — La condition de non-glissement s'écrit ($\vec{k}$ *vecteur unitaire vertical*) $\theta' \vec{k} \wedge \overrightarrow{OI} = \vec{V}_C + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{CI}$, *ou* $-\theta' y = x' - bq$, $\theta' x = y' + bp$, *d'où les équations*

(1) $\quad x' = -2/5 \cdot \theta' y + C, \quad y' = 2/5 \cdot \theta' x - B,$

qui, pour $\theta' = \alpha$ *constant, définissent un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire* $2\alpha/5$. *La vitesse initiale étant arbitraire, le centre et le rayon le sont aussi.*

II — Il faut adjoindre à (1) *l'équation du moment cinétique du disque* $\frac{ma^2}{2}\theta'' = yX - xY = m(yx'' - xy'')$, *ou* $\frac{a^2}{2}\theta' = yx' - xy' + D$, *ou en coordonnées polaires* r, φ

$$\frac{a^2}{2}\theta' = -r^2\varphi' + D.$$

(1) *donne alors les deux équations du mouvement de* I, *en choisissant la direction des axes pour que l'on ait* $B = 0$, *et en posant* $K^2 = \frac{5a^2}{4}$:

(2) $\quad r' = C\cos\varphi, \quad r(K^2 + r^2)\varphi' = Dr - CK^2 \sin\varphi.$

Posant $\sin\varphi = u$, *on en déduit, si* $C \neq 0$,

$$r(K^2 + r^2)\frac{du}{dr} = \frac{D}{C} r - K^2 u$$

d'où les coniques $\left(y + \frac{D}{C}\right)^2 = h^2(r^2 + K^2)$, h^2 *étant* *arbitraire. Si* $C=0$, (2) *donne* r *constant, cercle de centre* O. *Pour* $h=0$ *on obtient une droite.*

Le mouvement du disque (non demandé) est defini par

$$(3)\qquad \frac{a^2}{2}\theta' = \frac{-r^2\,(Dr - CK^2 \sin\varphi)}{r\,(K^2+r^2)} + D =$$

$$= \frac{K^2\,(D+Cy)}{r^2+K^2} = \frac{K^2\,h^2\,C^2}{Cy+D}.$$

On voit que θ *varie toujours dans le même sens.*

III. Prenons comme origine la projection fixe y *du centre de gravité sur le plan du disque. Le non-glissement s'écrit* $\vec{V}_0 + \theta'\,\vec{k}\wedge\vec{OI} = \vec{V}_I + \vec{\Omega}\wedge\vec{CI}$, *ou* $2\theta'\,\vec{k}\wedge\vec{gI} = 2\vec{V}_I + \vec{\Omega}\wedge\vec{CI}$, *et les équations* (1) *sont valables en remplaçant* 2/5 *par* 4/7. *L'équation du moment cinétique du disque s'écrit*

$$\frac{ma^2}{2}\theta'' = -\vec{OI}\wedge\vec{R}_1 = 2\,(yX - xY).$$

On obtient encore les équations (2) *mais avec* $K^2 = 7a^2/16$, *et l'équation* (3) *avec* $\frac{a^2}{4}\theta'$ *au premier membre.*

Le centre instantané du disque est le point $P\,(x_1, y_1)$ *tel que* $\vec{V}_0 + \theta'\,\vec{k}\wedge\vec{OP} = 0$ *ou* $-x' - \theta'\,(y_1+y) = 0$, $-y' + \theta'\,(x_1+x) = 0$. D' *après* (1) *et* (3) *modifiée, on obtient*

$$x_1 = \frac{y'}{\theta'} - x = \frac{4}{7}x - x = -\frac{3}{7}x,$$

$$y_1 = -\frac{x'}{\theta'} - y = -\frac{3}{7}y - \frac{C}{\theta'} + \alpha y + \beta,$$

α *et* β *etant deux constantes. La base est donc une conique qui se déduit simplement du lieu de* I.

ALGER — Faculté des Sciences — MÉCANIQUE RATIONNELLE — **Epreuve Pratique — Mai 1946**

2265 — Une plaque carrée de coté $2b$ située dans un plan vertical fixe s'appuie sans frottement sur une droite horizontale fixe D. Son centre de gravité G est au centre du carré. La plaque est animée d'une rotation ω autour de son sommet A situé sur D au moment où il y a choc entre le côté AB et la droite D. Déterminer l'état des vitesses de la plaque après le choc. Le moment d'inertie de la plaque par raport à son centre doit-il vérifier une condition pour que les hypothèses suivantes n'entraînent pas contradiction? On admettra sucessivement:

1° que le contact subsiste entre le côté AB et la droite.

2° qu'il n'y a pas de perte d'energie cinétique au cours du choc et que l'un des points A ou B quitte la droite. On examinera les deux cas.

Ennoncés et solutions des n.os 2264 et 2265 de René de Possel.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemática». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2266 — Dividem-se os lados de um triângulo equilátero T em n partes iguais e pelos pontos de divisão tiram-se paralelas aos lados, cobrindo-se assim T por meio de triângulos equiláteros iguais, T_i. Mostre que a área do círculo inscrito no triângulo T é igual à soma das áreas dos círculos inscritos nos triângulos T_i.

2267 — Dados um ponto A, uma recta b, uma circunferência γ e um triângulo $[A'\,B'\,C']$, construa o triângulo $[A\,B\,C]$ semelhante a $[A', B', C']$ e tal que B pertença a b e C a γ.

2268 — Mostre que é condição necessária e suficiente para que um anel seja idempotente que se tenha $ab+ba=0$ para quaisquer a e b do anel.

2269 — Baseando-se no enunciado anterior prove que todo o anel idempotente é comutativo.

[Consultar o livro *Elementos da Teoria dos Aneis*, de A. Costa — C. E. M. P.].

2270 — Se um domínio D é limitado por um contôrno simples C e $\omega = f(z)$ é regular em D e sôbre C, mostre que, se $f(z)$ não toma valores iguais em dois pontos distintos de C, o mesmo acontecerá em D.

[Proposto em «*Functions of a complex variable*», E. G. Phillips, University Mathematical Texts].