les qu'on déduit des relations (ρ) en faisant t constant et remplaçant les dq_α par les δq_α.

Si en outre les relations (ρ) n'existent pas, les δq_α sont arbitraires, et on obtient pour le mouvement les r équations dites «de Lagrange»:

$$L_\alpha - Q_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, r)$$

Transformations de Lagrange et d'Appell. Les expressions L_α sont susceptibles de prendre deux formes commodes. On a

$$\vec{V} = \sum_\alpha \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_\alpha} q'_\alpha + \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial t},$$

$$\vec{\Gamma} = \sum_\alpha \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_\alpha} q''_{\alpha^2} + \vec{g}\,(q_1, \cdots, q_r, q'_1, \cdots, q'_r, t, P) .$$

Les intégrales

$$T = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2} \vec{V}^2\, dm, \quad F = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2} \vec{\Gamma}^2\, dm,$$

dont la première est l'énergie cinétique, et dont la deuxième est appelée *«énergie d'accélération»* du corps, peuvent être considérées comme des fonctions des q'_α, q_α, t pour la première, $q''_{\alpha^2}, q'_\alpha, q_\alpha, t$ pour la deuxième.

Adoptant ce point de vue, on peut écrire

$$L_\alpha = \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{\Gamma}\, dm = \int_{\mathcal{C}} \vec{\Gamma} \cdot \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial q''_{\alpha^2}}\, dm = \frac{\partial F}{\partial q''_{\alpha^2}},$$

c'est la *transformation d'Appell.*

D'autre part, en remarquant que $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_\alpha} = \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial q'_\alpha}$, et en intervertissant les symbôles $\dfrac{d}{dt}$ et $\dfrac{\partial}{\partial q_\alpha}$, on a

$$\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{\Gamma} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{V}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial q_\alpha}\right) \cdot \vec{V} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial q'_\alpha} \cdot \vec{V}\right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right) \cdot \vec{V} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial q_\alpha},$$

d'où

$$L_\alpha = \int_{\mathcal{C}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial q'_\alpha}\right) dm - \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{V}^2}{\partial q_\alpha}\, dm = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}.$$

C'est la *transformation de Lagrange.*

(Continua)

Integrabilidade *R* das funções contínuas*

por ***A. Pereira Gomes***

Do mesmo modo que a construção do integral $\mathcal{L}$ (Lebesgue) tem por base a noção de medida $\mathcal{L}$, o integral $\mathcal{R}$ (Riemann) pode ser construído (segundo um processo perfeitamente análogo) a partir da medida $\mathcal{J}$ (Jordan) [1].

Um problema que se apresenta naturalmente é o de relacionar a família das funções integráveis com a família das funções contínuas. A êsse respeito, um resultado fundamental é que a integrabilidade duma função equivale à sua mensurabilidade.

No caso do integral $\mathcal{L}$, a integrabilidade das funções contínuas resulta, pois, imediatamente do facto destas funções serem mensuráveis $\mathcal{L}$, isto é, de o conjunto $M(\lambda)$, dos pontos x tais que $f(x) \geq \lambda$, ser mensurável $\mathcal{L}$ qualquer que seja λ; com efeito, sendo a função f contínua, êste conjunto é sempre fechado.

A mensurabilidade $\mathcal{J}$ duma função pode definir-se por uma condição análoga à da mensurabilidade $\mathcal{L}$, incidindo sôbre os mesmos conjuntos $M(\lambda)$, na qual a medida $\mathcal{J}$ vem ocupar o lugar da medida $\mathcal{L}$.

Vamos demonstrar um teorema que permite caracterizar a família das funções mensuráveis $\mathcal{J}$ por uma condição onde intervém a continuïdade.

Seja f uma função numérica finita, definida num espaço euclideano I, e seja A um subconjunto de I mensurável $\mathcal{J}$ [Nota 1]. Diz-se que f é *mensurável em* A, se os conjuntos $M_A(\lambda)$, dos pontos $x \in A$ tais que $f(x) \geq \lambda$, são mensuráveis, com excepção, quando muito, para uma infinidade numerável de valores de λ (isto é, se os conjuntos $M_A(\lambda)$ são *quási sempre* mensuráveis).

Teorema: *Para que* f *seja mensurável em* A *é necessário e suficiente que o conjunto dos seus pontos de descontinuïdade em* A, *relativamente a* A, *seja um conjunto de medida* $\mathcal{L}$ *nula.*

Condição necessária — Seja D o conjunto de todos os pontos de A onde a função f é descontínua relativamente a A e suponhamos que f é mensurável em A; mostremos que $m(D) = 0$.

---

* Inserimos a seguir uma série de *Notas*, com o fim de facilitar a leitura dêste artigo aos leitores da G. M. menos familiarizados com as noções e a terminologia aqui usadas.

(1) Veja-se a *Bibliografia*. No seu próximo número, a *Gazeta de Matemática* publicará um artigo do Prof. Ruy Luís Gomes sôbre a construção da noção de integral baseada na medida J.

Por hipótese, os valores de λ para os quais $M_A(\lambda)$ não é mensurável constituem, quando muito, um conjunto numerável $\{\lambda_n\}$. O complementar de $\{\lambda_n\}$ é, portanto, um conjunto denso no conjunto dos números reais. Como a recta euclideana R é um espaço separável, êste conjunto denso contém um subconjunto numerável $\{\mu_n\}$ também denso [NOTA 2]. Consideremos a família W dos intervalos semi-abertos $[\mu_m, \mu_n)$ cujos extremos pertencem a $\{\mu_n\}$; se a cada ponto de R associarmos os intervalos de W que contêm êsse ponto, obtêm-se um sistema de vizinhanças admissíveis para R [NOTA 3]. São estas as vizinhanças que utilizaremos ao analisar a continuïdade da função f [NOTA 4].

Seja $x \in D$; tratando-se dum ponto de descontinuïdade de f relativamente a A, existem μ_m e μ_n tais que (1) $\mu_m \leq f(x) < \mu_n$ e (2) cada vizinhança $V(x)$, do ponto x, contém pontos $y \in A$ para os quais $f(y) \notin [\mu_m, \mu_n)$, isto é, ou $f(y) \geq \mu_n$ ou $f(y) < \mu_m$; a relação (1) diz-nos que $x \in M_A(\mu_m) \cdot I - M_A(\mu_n)$; (2) diz-nos que $x \in \overline{M_A(\mu_n) + I - M_A(\mu_m)}$. Assim, tem-se

$$x \in \overline{M_A(\mu_m)} \cdot \overline{I - M_A(\mu_n)} \cdot [\overline{M_A(\mu_n)} + \overline{I - M_A(\mu_m)}] ;$$

designando a fronteira dum conjunto X por $f_r(X) = \overline{X} \cdot \overline{I - X}$, obtém-se

$$x \in f_r(M_A(\mu_n)) + f_r(I - M_A(\mu_m)) .$$

Donde

$$(3) \qquad D \subset \sum [f_r(M_A(\mu_n)) + f_r(I - M_A(\mu_m))] ,$$

sendo a soma $\sum$ estendida a todos os valores $\mu_m, \mu_n \in \{\mu_n\}$.

Atendendo a que $\{\mu_n\}$ e $\{\lambda_n\}$ não têm elementos comuns, é imediato que cada um dos têrmos desta soma tem medida $\mathcal{J}$ nula. A sua medida $\mathcal{L}$ é portanto nula [NOTA 1]. O segundo membro de (3), como soma duma infinidade numerável de conjuntos de medida $\mathcal{L}$ nula, é um conjunto de medida $\mathcal{L}$ nula. E como todo o subconjunto dum conjunto de medida $\mathcal{L}$ nula tem medida $\mathcal{L}$ nula, concluímos que $m(D) = 0$.

Condição suficiente — Suponhamos que $m(D) = 0$, e mostremos que, então, f é mensurável $\mathcal{J}$. Para isso basta mostrar que $f_r(M_A(\lambda))$ tem *quási sempre* medida $\mathcal{J}$ (ou $\mathcal{L}$ — NOTA 1) nula.

Seja $x \in f_r(M_A(\lambda))$. Se $x \in I - A$, como $f_r(M_A(\lambda)) \subset \subset \overline{M_A(\lambda)} \subset \overline{A}$, é $x \in \overline{A} \cdot I - A \subset f_r(A)$.

Se $x \in A$ e $f(x) \gtrless \lambda$, então $x \in D$; na verdade, se supuzermos $f(x) > \lambda$, tem-se $x \in M_A(\lambda)$; e como $x \in f_r(M_A(\lambda))$ será x um ponto de $\overline{I - M_A(\lambda)}$; quere dizer, cada vizinhança $V(x)$ tem pelo menos um ponto $y \in I - M_A(\lambda)$, sendo portanto $f(y) < \lambda$; então o intervalo $(\lambda, f(x) + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, contém $f(x)$, e qualquer vizinhança $V(x)$ tem pelo menos um ponto $y \in A$ tal que $f(y) \notin (\lambda, f(x) + \varepsilon)$, o que traduz a descontinuïdade de f no ponto x relativamente a A [NOTA 4]. Anàlogamente, se $f(x) < \lambda$.

Se $x \in A$ e $f(x) = \lambda$, consideremos o conjunto $A \cdot f^{-1}(\lambda)$. Tem-se $Af^{-1}(\lambda) = (A - D) f^{-1}(\lambda) + + Df^{-1}(\lambda)$. Como por hipótese $m(D) = 0$, é $m(Df^{-1}(\lambda)) = 0$; por outro lado, visto que f é contínua em $A - D$ relativamente a A, o conjunto $(A - D) f^{-1}(\lambda)$ é fechado relativamente a $A - D$, portanto igual à intersecção de $A - D$ com um conjunto fechado [NOTA 4]; ora $A - D$ é mensurável $\mathcal{L}$ e todo o conjunto fechado é mensurável $\mathcal{L}$; logo $(A - D) f^{-1}(\lambda)$ é mensurável $\mathcal{L}$. Assim, $Af^{-1}(\lambda)$ é é a soma de conjuntos mensuráveis $\mathcal{L}$ e portanto é mensurável $\mathcal{L}$.

Mostremos que êste conjunto tem *quási sempre* medida nula, isto é, que o conjunto $E_\lambda[m(Af^{-1}(\lambda)) > 0]$, dos valores de λ para os quais $m(Af^{-1}(\lambda)) > 0$, é quando muito numerável.

Na verdade,

$$(4) \qquad E_\lambda[m(Af^{-1}(\lambda)) > 0] = \sum_n E_\lambda\left[m(Af^{-1}(\lambda)) > \frac{1}{n}\right] ;$$

e como $m(A) = J(A)$ é finita, $E_\lambda\left[m(Af^{-1}(\lambda)) > \frac{1}{n}\right]$ é, para cada inteiro n, um conjunto finito; pois que se existisse um inteiro n e um conjunto infinito $\{\lambda_i\}$ tal que, para cada λ_i, $m(Af^{-1}(\lambda_i)) > \frac{1}{n}$, teríamos

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(Af^{-1}(\lambda_i)) = +\infty ;$$

ora, como $\lambda_i \neq \lambda_j$ implica $f^{-1}(\lambda_i) \cdot f^{-1}(\lambda_j) = O$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{p} m(Af^{-1}(\lambda_i)) = m\left(\sum_{i=1}^{p} Af^{-1}(\lambda_i)\right) \leq m(A) ,$$

donde

$$\sum_{1}^{\infty} m(Af^{-1}(\lambda_i)) = \lim_{p=\infty} \sum_{1}^{p} m(Af^{-1}(\lambda_i)) \leq m(A) < +\infty .$$

O primeiro membro de (4), sendo uma soma numerável de conjuntos finitos, é numerável.

Em resumo: se $x \in f_r(M_A(\lambda))$, ou $x \in f_r(A)$, ou $x \in D$, ou $x \in A \cdot f^{-1}(\lambda)$; quere dizer,

$$f_r(M_A(\lambda)) \subset f_r(A) + D + Af^{-1}(\lambda) ;$$

e vimos que o segundo membro desta relação é quási sempre um conjunto de medida $\mathcal{L}$ nula.

O Teorema está portanto demonstrado.

OBSERVAÇÕES

1.ª] Limitamo-nos a considerar o caso de ser f uma função finita, por ser êsse caso que nos interessa, em última análise, para o problema da integração.

Na realidade essa restrição pode ser levantada. Deixamos ao cuidado do leitor verificar que o mesmo teorema relativo a funções numéricas quaisquer se pode estabelecer com ligeiras adaptações na demonstração que acima desenvolvemos.

2.ª] O teorema demonstrado fornece um critério de mensurabilidade $\mathcal{J}$ duma função à custa da medida $\mathcal{L}$. Um problema que se apresenta naturalmente é o de estabelecer um critério de mensurabilidade $\mathcal{J}$ duma função em têrmos de medida $\mathcal{J}$.

A êste respeito sugerimos ao leitor a demonstração do

TEOREMA: *Para que* f *seja mensurável* $\mathcal{J}$ *sôbre um conjunto* A *mensurável é necessário e suficiente que a medida* $\mathcal{J}$ *do conjunto dos pontos interiores a* A *onde a oscilação de* f *é* >0 *seja nula.*

BIBLIOGRAFIA

O. Frink Jr. — *Jordan measure and Riemann integration,* Annals of Maths., vol. 34 (1933).

O. Haupt und G. Aumann — *Differential und Integralrechnung,* III Band: *Integralrechnung* (Berlin, 1938).

Alexandroff und Hopf — *Topologie.* I (Berlin, 1935).

Ver também: Cadernos de Análise Geral (J. I. M.): *Teoria Geral da Medida* — 2: *Medida à Jordan,* por Laureano Barros; — 5: *Medida à Lebesgue e medida a Carathéodory,* por L. Neves Real.

Topologia Geral — 3: *Funções contínuas,* por A. Pereira Gomes; 5 — *Bases e Vizinhanças,* por A. Pereira Gomes.

NOTAS

NOTA 1: Partindo do corpo dos agregados, a *medida exterior* $\mathcal{J}$ dum conjunto limitado X define-se como sendo o ínfimo das áreas dos agregados que contêm X; e chama-se *medida interior* $\mathcal{J}$ dum conjunto X ao supremo das áreas dos agregados que estão contidos em X.

Se o conjunto limitado X tem uma medida exterior igual à medida interior, X diz-se *mensurável* $\mathcal{J}$; e o valor comum daquelas medidas chama-se *medida* $\mathcal{J}$ de X e representa-se por $J(X)$.

Uma condição necessária e suficiente para que um conjunto limitado seja mensurável $\mathcal{J}$ é que a medida exterior da sua fronteira seja nula: $J(f_r(X))=0$.

Como é sabido, todo o conjunto mensurável $\mathcal{J}$ é mensurável $\mathcal{L}$, e a sua medida $\mathcal{L}$ é igual à medida $\mathcal{J}$: $m(X)=J(X)$.

Destaquemos a seguinte propriedade da medida $\mathcal{L}$, importante na demonstração do teorema que temos em vista: a medida exterior $\mathcal{J}$ dum conjunto X é igual à medida $\mathcal{L}$ do fecho $\overline{X}$ dêsse conjunto; donde se conclui: se X é um conjunto fechado (tal é o caso da fronteira dum conjunto), $m(X)=0$ arrasta $J(X)=0$.

No que segue, por «mensurável» deverá entender-se «mensurável $\mathcal{J}$», sempre que não fôr feita menção expressa do contrário.

NOTA 2: Diz-se que um espaço topológico é *separável* se possui uma *base* numerável para os conjuntos abertos, isto é, uma família numerável de conjuntos abertos tal que cada conjunto aberto é igual à soma de conjuntos desta família. Na recta euclideana todo o conjunto aberto se pode considerar como soma de intervalos de extremos racionais; a família dêstes intervalos, que é numerável, constitui assim uma *base.* A recta euclideana é portanto um espaço topológico separável.

Estes espaços topológicos gozam duma propriedade importante: *todo o conjunto denso no espaço (em particular o próprio espaço) contém um subconjunto numerável também denso no espaço.* Para obter êste subconjunto basta tomar um ponto do conjunto dado em cada elemento da base numerável.

NOTA 3: Na recta euclideana consideram-se geralmente como vizinhanças associadas a cada ponto os intervalos abertos que contêm êsse ponto; a topologia da recta euclideana pode ser definida, usando estas vizinhanças, do modo seguinte: *um ponto* x *pertence ao fecho* $\overline{\mathrm{X}}$ *dum conjunto* X *se cada uma das suas vizinhanças* V (x) *tem pelo menos um ponto que pertence ao conjunto* X.

Uma família de conjuntos associados a um ponto x é *admissível* como família de vizinhanças dêsse ponto se a circunstância de x pertencer ou não ao fecho de um conjunto (arbitrário) não é alterada quando substituirmos as vizinhanças do ponto x por essa família de conjuntos. As duas famílias de *vizinhanças* dizem-se, então, *topològicamente equivalentes.* É uma condição necessária e suficiente para que isto se verifique é que, dada uma vizinhança de qualquer dessas famílias, exista na outra família uma vizinhança contida naquela.

Esta condição é realizada no nosso caso; com efeito, dado um número λ e um intervalo aberto (α,β) que o contenha, isto é, tal que $\alpha<\lambda<\beta$, em virtude da densidade de $\{\mu_n\}$, existem μ_m e μ_n tais que $\alpha<\mu_m<$ $<\lambda<\mu_n<\beta$; donde $(\mu_m,\mu_n)\subset[\mu_m,\mu_n)\subset(\alpha,\beta)$.

NOTA 4: Se I e I^* são espaços topológicos onde a topologia está definida por meio de vizinhanças, a continuïdade de uma transformação de I em I^* costuma definir-se em termos de vizinhanças por uma condição que generaliza a definição clássica de Cauchy. A continuïdade duma transformação dum espaço topológico noutro é, porém, uma propriedade topológica, independente da família de vizinhanças utilizada; por outras palavras, a continuïdade duma transformação num ponto não é alterada quando se substitui a família de vizinhanças do ponto por outra topològicamente equivalente.

Êste resultado é ainda válido se se trata da continuïdade duma transformação num ponto dum conjunto A relativamente a êsse conjunto: *uma transformação* f *diz-se contínua num ponto* x e A *relativamente a* A, *quando para cada vizinhança* W (f (x)), *do ponto* f (x) e I*, *existe uma vizinhança* V (x), *do ponto* x, *tal que todos os pontos* y *de* V (x) *que pertencem a* A *têm um transformado* f (y) *que pertence a* W (f (x)).

Em espaços topológicos cuja topologia pode ser definida por meio de vizinhanças (em particular, nos espaços euclideanos) as transformações contínuas gozam da seguinte propriedade: Se F^* é um conjunto fechado de I^*, o conjunto $f^{-1}(F^*)$, imagem inversa de F^* por meio de f, é também fechado. Em particular, se f é contínua relativamente a um conjunto A, então $A \cdot f^{-1}(F^*)$ é fechado relativamente a A.

TEMAS DE ESTUDO

SÔBRE A EXPOSIÇÃO CLÁSSICA DA TEORIA DA MEDIDA À LEBESGUE

por ***Luís Neves Real***

Foi nosso intuito ao redigir êste artigo ser útil a quem entre nós estude — ou ensine — a teoria da medida L. Em termos estritamente algébricos, evitando sistemàticamente argumentos topológicos, fizemos depender essa teoria da prévia construção dum corpo $\mathfrak{A}$ de conjuntos A, em que se define uma *área*, $a(A)$, com a propriedade *essencial* de ser σ-aditiva no corpo $\mathfrak{A}$. Recorde-se que no espaço euclideano a n dimensões se pode tomar para $\mathfrak{A}$ e $a(A)$ o corpo de todos os *agregados* do espaço [isto é as somas dum número finito de cubos semi-abertos pertencentes a uma sucessão regular de rêdes com a qual se quadricula o espaço] e a sua *área*, a soma dos hiper-volumes $\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$ de cada um dos cubos *disjuntos* em que se pode sempre decompor um agregado A. Esta noção de agregado — Aggregat — e sua área — Inhalt — divulgada entre nós pela J. I. M., recebêmo-la da obra de Otto Haupt e Georg Aumann — *Differential und Integralrechnung* — e afigura-se-nos como o ponto de partida didàticamente mais adequado para abordar as diversas teorias da medida. Os cadernos n.os 2 e 5 da J. I. M. — *Introdução* e *Medida à Jordan*, Laureano de Barros, 1944 — mostram a sua aplicação à medida J. Queremos salientar no caderno n.º 5 — de que em breve se publicará uma nova edição com um carácter marcadamente algébrico — o que nessa altura nos apareceu apenas com um interêsse de exercício — o exercício 3.º da página 39 —: «se um agregado A é a soma duma infinidade numerável de agregados *disjuntos* do mesmo corpo, a área A é *igual* à soma da série constituída pelas áreas das parcelas (σ-aditividade de $a(A)$ em $\mathfrak{A}$); e fazer notar que a demonstração dêste enunciado assenta em duas propriedades particulares do espaço euclideano: *i* — dado um agregado A, existe sempre, qualquer que seja $\varepsilon>0$ um outro agregado A_1 tal que $A \subset i(A_1)$ e $a(A-A_1)<\varepsilon$; *ii* — a cobertura dum conjunto fechado por intermédio duma família *numerável* de conjuntos abertos pode ser substituída por uma cobertura dum número *finito* de conjuntos da mesma família. Estes são os factos topológicos que estão na base da σ-aditividade da área. Uma vez porém que esta se admita, as teorias da medida, quer à Borel, quer à Lebesgue, são consequências puramente algébricas dessa propriedade da área. Isto mesmo se mostrou já para a primeira destas medidas no caderno n.º 14 da J. I. M., obtendo-se depois algèbricamente, caderno n.º 16, a medida L como extensão da medida B, pela ampliação do σ-corpo B dos borelianos, graças aos sub-conjuntos dos conjuntos mensuráveis B de medida nula — *les ensembles négligeables* na terminologia que nos trouxe o Prof. René de Possel. Assim ficava estabelecida uma proposição fundamental da teoria algébrica da medida: «a condição necessária e suficiente para que seja possível a extensão duma área definida num corpo, a uma medida (à Borel ou à Lebesgue) definida num σ-corpo, é que essa área seja σ-aditiva (Eberhard Hopf, *Ergodentheorie*, capítulo I, § 1, 1937)».

Por esta forma se procurava localizar o problema da construção duma medida σ-aditiva em espaços topológicos mais gerais, problema que desde 1944 e por iniciativa do Prof. António Monteiro tem sido tema do estudo no C. E. M. do Pôrto.