

NOTA 4: Se I e I^* são espaços topológicos onde a topologia está definida por meio de vizinhanças, a continuidade de uma transformação de I em I^* costuma definir-se em termos de vizinhanças por uma condição que generaliza a definição clássica de Cauchy. A continuidade duma transformação dum espaço topológico noutra é, porém, uma propriedade topológica, independente da família de vizinhanças utilizada; por outras palavras, a continuidade duma transformação num ponto não é alterada quando se substitui a família de vizinhanças do ponto por outra topologicamente equivalente.

Este resultado é ainda válido se se trata da continuidade duma transformação num ponto dum conjunto

A relativamente a esse conjunto: *uma transformação f diz-se contínua num ponto $x \in A$ relativamente a A , quando para cada vizinhança $W(f(x))$, do ponto $f(x) \in I^*$, existe uma vizinhança $V(x)$, do ponto x , tal que todos os pontos y de $V(x)$ que pertencem a A têm um transformado $f(y)$ que pertence a $W(f(x))$.*

Em espaços topológicos cuja topologia pode ser definida por meio de vizinhanças (em particular, nos espaços euclidianos) as transformações contínuas gozam da seguinte propriedade: Se F^* é um conjunto fechado de I^* , o conjunto $f^{-1}(F^*)$, imagem inversa de F^* por meio de f , é também fechado. Em particular, se f é contínua relativamente a um conjunto A , então $A \cdot f^{-1}(F^*)$ é fechado relativamente a A .

TEMAS DE ESTUDO

SÔBRE A EXPOSIÇÃO CLÁSSICA DA TEORIA DA MEDIDA À LEBESGUE

por Luís Neves Real

Foi nosso intuito ao redigir este artigo ser útil a quem entre nós estude — ou ensine — a teoria da medida L . Em termos estritamente algébricos, evitando sistematicamente argumentos topológicos, fizemos depender essa teoria da prévia construção dum corpo \mathfrak{M} de conjuntos A , em que se define uma área, $a(A)$, com a propriedade essencial de ser σ -aditiva no corpo \mathfrak{M} . Recorde-se que no espaço euclidiano a n dimensões se pode tomar para \mathfrak{M} e $a(A)$ o corpo de todos os agregados do espaço [isto é as somas dum número finito de cubos semi-abertos pertencentes a uma successão regular de rédes com a qual se quadricula o espaço] e a sua área, a soma dos hiper-volumes $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$ de cada um dos cubos disjuntos em que se pode sempre decompor um agregado A . Esta noção de agregado — *Aggregat* — e sua área — *Inhalt* — divulgada entre nós pela J. I. M., recebêmo-la da obra de Otto Haupt e Georg Aumann — *Differential und Integralrechnung* — e afigurá-se-nos como o ponto de partida didacticamente mais adequado para abordar as diversas teorias da medida. Os cadernos n.º 2 e 5 da J. I. M. — *Introdução e Medida à Jordan*, Laureano de Barros, 1944 — mostram a sua aplicação à medida J . Queremos salientar no caderno n.º 5 — de que em breve se publicará uma nova edição com um carácter marcadamente algébrico — o que nessa altura nos apareceu apenas com um interesse de exercício — o exercício 3.º da página 39 —: «se um agregado A é a soma duma infinidade numerável de agregados disjuntos do mesmo corpo, a área A é igual à soma da série constituída pelas áreas das parcelas

(σ -aditividade de $a(A)$ em \mathfrak{M}); e fazer notar que a demonstração deste enunciado assenta em duas propriedades particulares do espaço euclidiano: *i* — dado um agregado A , existe sempre, qualquer que seja $\epsilon > 0$ um outro agregado A_1 tal que $A \subset i(A_1)$ e $a(A - A_1) < \epsilon$; *ii* — a cobertura dum conjunto fechado por intermédio duma família numerável de conjuntos abertos pode ser substituída por uma cobertura dum número finito de conjuntos da mesma família. Estes são os factos topológicos que estão na base da σ -aditividade da área. Uma vez porém que esta se admita, as teorias da medida, quer à Borel, quer à Lebesgue, são consequências puramente algébricas dessa propriedade da área. Isto mesmo se mostrou já para a primeira destas medidas no caderno n.º 14 da J. I. M., obtendo-se depois algébricamente, caderno n.º 16, a medida L como extensão da medida B , pela ampliação do σ -corpo B dos borelianos, graças aos sub-conjuntos dos conjuntos mensuráveis B de medida nula — *les ensembles négligeables* na terminologia que nos trouxe o Prof. René de Possel. Assim ficava estabelecida uma proposição fundamental da teoria algébrica da medida: «a condição necessária e suficiente para que seja possível a extensão duma área definida num corpo, a uma medida (à Borel ou à Lebesgue) definida num σ -corpo, é que essa área seja σ -aditiva (Eberhard Hopf, *Ergodentheorie*, capítulo I, § 1, 1937)».

Por esta forma se procurava localizar o problema da construção duma medida σ -aditiva em espaços topológicos mais gerais, problema que desde 1944 e por iniciativa do Prof. António Monteiro tem sido tema do estudo no C. E. M. do Pôrto.

Mas a teoria da medida à Lebesgue feita em estreita dependência da medida à Borel, se bem que tenha sido extraordinariamente elucidativa para nós, no C. E. M., tem o inconveniente de recorrer ao princípio de indução transfinita. Esta é a razão porque reuni neste artigo os resultados da nossa comum experiência, redigindo uma exposição da medida L , feita à maneira clássica, mas deduzida como consequência algébrica da σ -aditividade da área dos agregados.

1. O corpo e a área dos agregados. Seja \mathfrak{A} um corpo de conjuntos a que chamaremos *agregados*, e seja $a(A)$, $A \in \mathfrak{A}$ uma função definida em \mathfrak{A} , designada como *área do agregado* A e dotada das seguintes propriedades:

- A 1. é unívoca
- A 2. $0 \leq a(A) < \infty$; $a(0) = 0$
- A 3. σ -aditividade da área em \mathfrak{A} :

Se $A = \bigcup_1^\infty A_i$ e $A_i \cap A_j = 0$, então $a(A) = \sum_1^\infty a(A_i)$.

Destas propriedades decorre imediatamente

- A 4. $A_1 \supset A_2 \rightarrow a(A_1 - A_2) = a(A_1) - a(A_2)$
- A 5. $A_1 \supset A_2 \rightarrow a(A_1) \geq a(A_2)$ (monotonia)
- A 6. $A \subset \bigcup_1^\infty A_i \rightarrow a(A) \leq \sum_1^\infty a(A_i)$.

2. Medida exterior e Medida interior.

2.1 Definições:

Um conjunto X diz-se limitado se existe $A \in \mathfrak{A}$ tal que $X \subset A$.

Medida exterior dum conjunto limitado

$$m^0(X) = \liminf_{\substack{A_i \supset X \\ A_i \in \mathfrak{A}}} \sum a(A_i)$$

Medida interior dum conjunto limitado:

$$m_0(X) = a(A) - m^0(A - X)$$

onde $A \in \mathfrak{A}$ e $A \supset X$. [Como se estabelecerá no número 2.5 esta definição é independente de A].

Critério de mensurabilidade. Um conjunto X diz-se mensurável- L , simbolicamente $X \in \mathcal{L}$ (representando por \mathcal{L} a classe dos conjuntos mensuráveis- L) se $m_0(X) = m^0(X)$. A êste valor comum chama-se medida- L de X e representa-se por $m(X)$.

2.2 Propriedades:

Da definição de $m^0(X)$ resulta:

- 2.2.1 $0 \leq m^0(X) < \infty$, $m^0(0) = 0$
- 2.2.2 Se $X \subset Y$, então $m^0(X) \leq m^0(Y)$.

porque qualquer $\bigcup_i A_i$ que contenha Y , contém também X .

$$2.2.3 \quad m^0(\bigcup X_i) \leq \sum_1^\infty m^0(X_i).$$

Para cada número arbitrário $\delta/2^i$, existe $\bigcup A_n^i \supset X$, tal que $m^0(X_i) > \sum_n a(A_n^i) - \delta/2^i$.

Por soma em relação a i :

$$\sum m^0(X_i) \geq \sum_i \sum_n a(A_n^i) - \delta.$$

E como:

$$\bigcup_i \bigcup_n A_n^i \supset \bigcup_i X_i, \quad \sum_i \sum_n a(A_n^i) \geq m^0(\bigcup_i X_i).$$

2.3 Se $A \in \mathfrak{A}$ e $A \cdot X = 0$, então $m^0(A \cup X) = a(A) + m^0(X)$.

$$[2.2.3] \rightarrow m^0(A \cup X) \leq a(A) + m^0(X).$$

Basta pois demonstrar a desigualdade contrária: Da definição de $m^0(A \cup X)$ decorre que existe:

$$\begin{aligned} \bigcup A_i \supset A \cup X \text{ tal que } m^0(A \cup X) &> \sum_1^\infty a(A_i) - \epsilon = \\ &= \sum_1^\infty a[(A_i \cap A) \cup (A_i - A)] - \epsilon = \\ &= \sum_1^\infty a(A_i \cap A) + \sum_1^\infty a(A_i - A) - \epsilon. \end{aligned}$$

Mas

$$A \cap X = 0 \rightarrow \begin{cases} \bigcup_i (A \cap A_i) = A \text{ e pela } \sigma\text{-aditividade da área} \\ a(A) \leq \sum_1^\infty a(A \cap A_i); \\ e \\ \bigcup_i (A_i - A) \supset X_i, \text{ donde:} \\ \sum_1^\infty a(A_i - A) \geq m^0(X) \end{cases}$$

e finalmente

$$m^0(A \cup X) \geq a(A) + m^0(X) - \epsilon,$$

ou, sendo ϵ arbitrário

$$m^0(A \cup X) \geq a(A) + m^0(X).$$

2.4 $m^0(A) = a(A)$.

Como $m^0(0) = 0$ basta fazer $X = 0$ em 2.3.

2.5 $m_0(X)$ é independente do agregado A que intervem na sua definição.

Sejam $A \in \mathfrak{A}$ e $A_1 \in \mathfrak{A}$; e suponhamos que $X \subset A_1 \subset A$ [o caso de ser $X \subset A$ e $X \subset A_1$ e nem $A \subset A_1$, nem $A_1 \subset A$, reduz-se a êste porque teríamos então $X \subset (A \cap A_1)$, $(A \cap A_1) \subset A$ e $(A \cap A_1) \subset A_1$].

De 2.3 e 2.4:

$$\begin{aligned} m^0(A - X) &= m^0[(A - A_1) \cup (A_1 - X)] = \\ &= a(A - A_1) + m^0(A_1 - X) = \end{aligned}$$

$$[\text{por } A \cdot 4] = a(A) - a(A_1) + m^0(A_1 - X).$$

Então

$$m_0(X) = a(A) - m^0(A-X) = a(A) - [a(A) - a(A_1) + m^0(A_1-X)] = a(A_1) - m^0(A_1-X).$$

$$2.6 \quad m_0(X) \leq m^0(X).$$

Porque 2.1 e $A \supset X$ implicam:

$$a(A) = m_0(X) + m^0(A-X);$$

e de 2.4 e 2.23:

$$a(A) = m^0(A) = m^0[X \cup (A-X)] \leq m^0(X) + m^0(A-X).$$

$$2.7 \quad \text{Se } A_i \cap A_k = 0, \text{ então } m^0(\cup_i A_i) = \sum_1^\infty a(A_i).$$

Por A.3, 2.4, 2.22, 2.23, e de novo 2.4:

$$\begin{aligned} \sum_1^N a(A_i) &= a\left(\bigcup_{1 \dots N} A_i\right) = \\ &= m^0\left(\bigcup_{1 \dots N} A_i\right) \leq m^0\left(\bigcup_{1 \dots \infty} A_i\right) \leq \sum_1^\infty a(A_i) \end{aligned}$$

Por passagem ao limite:

$$\sum_1^\infty a(A_i) \leq m^0\left(\bigcup_{1 \dots \infty} A_i\right) \leq \sum_1^\infty a(A_i).$$

$$2.8 \quad \text{Se } A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots, \quad m^0\left(\bigcup_{1 \dots \infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} a(A_i).$$

Porque, aplicando 2.7 a $\bigcup_{1 \dots \infty} A_i = A_1 \cup \bigcup_{i=2}^\infty (A_i - A_{i-1})$ resulta:

$$\begin{aligned} m^0\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) &= a(A_1) + \lim_{i \rightarrow \infty} [a(A_2 - A_2) + \dots + a(A_i - A_{i-1})] = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} a(A_i). \end{aligned}$$

$$2.9 \quad \text{Se } A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_i \supset \dots \quad m_0\left(\bigcap_{i=1}^\infty A_i\right) = \lim a(A_i).$$

Pela aplicação de 2.8 a

$$A_1 - A_2 \subset A_1 - A_3 \subset \dots \subset A_1 - A_i \subset \dots$$

e pela definição de medida interior.

$$2.10 \quad \text{Se } A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_i \supset \dots,$$

$$m_0\left(\bigcap_{i=1}^\infty A_i\right) = \lim a(A_i) = m^0\left(\bigcap_{i=1}^\infty A_i\right).$$

Em virtude de 2.9, 2.6 e de que $\bigcap_{i=1}^\infty A_i \subset A_i$ implica $m^0(\cap A_i) \leq \lim a(A_i)$.

$$2.11 \quad m^0(X \cup Y) + m^0(X \cap Y) \leq m^0(X) + m^0(Y).$$

Tomem-se $\cup_i A_i$, $A_i \cap A_k = 0$ e $\cup_i A_i'$, $A_i' \cap A_k' = 0$ tais que $\cup_i A_i \supset X$, $\sum a(A_i) < m^0(X) + \epsilon/2$ e $\cup_i A_i' \supset Y$, $\sum a(A_i') < m^0(Y) + \epsilon/2$. Ora, 2.23, 2.7, 2.10 implicam

$$m^0\left(\bigcup_{i=1}^\infty (A_i \cup A_i')\right) \leq \sum_1^\infty a(A_i) + \sum_1^\infty a(A_i') - \sum_i \sum_j a(A_i' \cap A_j)$$

e sendo $(\cup_j A_j) \cap (\cup_i A_i') = \cup_j \cup_i (A_j \cap A_i')$ soma de parcelas disjuntas:

$$m^0\left(\bigcup_j A_j \cap \bigcup_i A_i'\right) = \sum_i \sum_j a(A_j \cap A_i')$$

$$\begin{aligned} & m^0\left(\bigcup_{i=1}^\infty (A_i \cup A_i')\right) + m^0\left(\bigcup_i A_i' \cap \bigcup_j A_j\right) \leq \\ & \leq \sum_i a(A_i') + \sum_i a(A_i) < m^0(X) + m^0(Y) + \epsilon \end{aligned}$$

donde decorre o enunciado porque

$$\bigcup_{i=1}^\infty (A_i \cup A_i') \supset X \cup Y \text{ e } (\cup_i A_i') \cap (\cup_i A_j) \supset X \cap Y.$$

$$2.12 \quad m_0(X \cup Y) + m_0(X \cap Y) \geq m_0(X) + m_0(Y).$$

Basta subtrair $2a(A)$, onde $A \supset X$ e $A \supset Y$ aos dois membros da desigualdade 2.11 aplicada a $A-X$ e $A-Y$.

3. A classe \mathcal{L} dos conjuntos mensuráveis.

3.1 \mathcal{L} é um anel de conjuntos (com X e Y , contém $X \cup Y$ e $X \cap Y$).

Porque de 2.11 e 2.12 resulta:

$$\begin{aligned} & [m^0(X) - m_0(X)] + [m^0(Y) - m_0(Y)] \geq \\ & \geq [m^0(X \cup Y) - m_0(X \cup Y)] + [m^0(X \cap Y) - m_0(X \cap Y)]. \end{aligned}$$

3.2 O complementar dum conjunto mensurável $X \subset A$, relativamente a A é mensurável.

Porque $a(A) = m^0(X) + m_0(A-X) = m_0(X) + m^0(A-X)$

3.3 \mathcal{L} é um corpo de conjuntos (um anel que, com X e Y , contém $X-Y$).

Sendo $A \in \mathcal{L}$ tal que $A \supset X$ e $A \supset Y$, como $X-Y = X \cap (A-Y)$ trata-se duma conclusão imediata de 3.1 e 3.2.

3.4 A soma $\bigcup_{i=1}^\infty X_i$, com $X_i \cap X_k = 0$ de conjuntos mensuráveis disjuntos é mensurável (desde que seja limitada).

De $\bigcup_{i=1}^N X_i \subset \bigcup_{i=1}^\infty X_i$, de $X_i \cap X_k = 0$, de 2.12 iterado, de 2.6 e de 2.23

$$\begin{aligned} \sum_1^N m(X_i) &= m\left(\bigcup_{i=1}^N X_i\right) \leq m^0\left(\bigcup_{i=1}^N X_i\right) \leq \\ & \leq m^0\left(\bigcup_{i=1}^\infty X_i\right) \leq \sum_1^\infty m^0(X_i) \end{aligned}$$

donde resulta por passagem ao limite o teorema e

simultaneamente a σ -aditividade de m na classe \mathcal{L} :

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum_1^{\infty} m(X_i).$$

3.5 L é um σ -corpo (um corpo que com a sucessão $\{X_i\}$ contém a sua união $\bigcup_i X_i$).

Consequência de 3.3 e de

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X_1 \cup \left[\bigcup_{n=2}^{\infty} ((X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n) - \subset X_1 \cup \dots \cup X_{n-1}) \right]$$

atendendo a 3.3 e 3.4.

4. Propriedades da medida: $m(L)$, $L \in \mathcal{L}$.

4.1 não negativa $m(L) \geq 0$.

4.2 monótona: se $L_1 \subset L_2$, $m(L_1) \leq m(L_2)$.

4.3 modular:

$$m(L_1) + m(L_2) = m(L_1 \cup L_2) + m(L_1 \cap L_2),$$

em virtude de 2.11 e 2.12.

4.4 subtractiva:

$$\text{se } L_1 \supset L_2, m(L_1 - L_2) = m(L_1) - m(L_2).$$

4.5 σ -aditiva: se $L_i \cap L_k = 0$, $m(\bigcup_i L_i) = \sum m(L_i)$.

4.6 contínua: se $\{L_i\}$ é uma sucessão monótona:

$$m\left(\lim_i L_i\right) = \lim_i m(L_i).$$

5. O carácter completo e regular da medida- L .

5.1 A medida é completa:

$$m^0(X) = \lim_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ L \supset X}} \inf m(L) \quad \text{e} \quad m_0(X) = \lim_{\substack{L \in \mathcal{L} \\ L \subset X}} \sup m(L)$$

5.2 A medida é regular: para todo o conjunto X ,

a) existe $L_1 \supset X$, $L_1 \in \mathcal{L}$, tal que $m^0(X) = m(L_1)$.

b) existe $L_2 \subset X$, $L_2 \in \mathcal{L}$, tal que $m_0(X) = m(L_2)$.

6. As condições de Smiley e de Carathéodory.

6.1 Condição de Smiley: $L \in \mathcal{L}$ se e só se a igualdade $m^0(L \cup X) + m^0(L \cap X) = m^0(L) + m^0(X)$ é satisfeita qualquer que seja o conjunto limitado X .

Condição necessária:

Por 5.2 a) existe $(L_1 \supset L \cup X)$ tal que $m(L_1) = m^0(L \cup X)$. Então $m(L_1) = m^0(L \cup X) = m(L) + m(L_1 - L)$ ou, porque $L_1 \supset (X \cup L)$ implica $L_1 - L \supset X - (X \cap L)$:

$$m^0(L \cup X) \geq m(L) + m^0(X - X \cap L).$$

Por outro lado 2.2.3:

$$m^0(X) \leq m^0(X \cap L) + m^0(X - X \cap L)$$

$$\text{ou} \quad m^0(X - X \cap L) \geq m^0(X) - m^0(X \cap L).$$

E finalmente

$$m(L) + m^0(X) - m^0(X \cap L) \leq m^0(L \cup X)$$

combinada com 2.11.

Condição suficiente:

Seja $A \in \mathfrak{M}$ e $A \supset L$; faça-se então $X = A - L$:

$$m^0(A) = a(A) = m^0(L) + m^0(A - L)$$

$$\text{ou} \quad m^0(L) = a(A) - m^0(A - L) = m_0(L)$$

e portanto $L \in \mathcal{L}$.

6.2 Condição de Carathéodory: $L \in \mathcal{L}$ se e só se a igualdade $m^0(X) = m^0(X \cap L) + m^0(X - L)$ fôr satisfeita qualquer que seja o conjunto X .

Condição necessária:

5.2 a) implica que existe $L_1 \supset X$ e tal que

$$m^0(X) = m(L_1).$$

E como $L_1 - L \supset X - L$ e $L_1 \cap L \supset X \cap L$ $m^0(X) = m(L_1) = m(L_1 \cap L) + m(L_1 - L) \geq m^0(X \cap L) + m^0(X - L)$ que com 2.2.3 demonstra que a condição é necessária.

Condição suficiente:

Sendo $A \in \mathfrak{M}$ e $A \supset L$ faça-se, na igualdade, $X = A$:

$$m^0(A) = a(A) = m^0(L) + m^0(A - L)$$

donde

$$m^0(L) = a(A) - m^0(A - L) = m_0(L) \quad \text{e} \quad L \in \mathcal{L}.$$

NOTA

O Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto publicou no número anterior da *Gazeta de Matemática* (n.º 27, de Fevereiro de 1940) um artigo do sr. G. De-debant, intitulado «Sur une manière de présenter la résolution des équations algébriques», e inserto na secção «Temas de estudo». Este artigo contém

alguns lapsos relativos ao emprêgo da designação de «Álgebra Moderna» e algumas incorrecções de doutrina, pelo que o Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto, responsável por esta secção, pede desculpa aos leitores.

C. E. M. P.