## SOCIEDADE MATEMÁTICA DE FRANÇA

### CONFERÊNCIAS REALIZADAS EM 1945-46.

L. Lesieur: Représentation rationnelle des hyperbiquadratiques, (17-1-1945); S. Mandelbrojt: Sur une inégalité relative aux séries asymptotiques, et applications aux fonctions quasi-analytiques et aux séries de Dirichlet, (14-2-1945); A. Chatelet: Sur les corps abéliens du troisième ordre, (14-3-1945); A. Lichnerowicz: Sur certains espaces variationnels généralisant les espaces de Finsler, (11-4-1945); P. Levy: Sur des théorèmes nouveaux relatifs au mouvement brownien, (16-5-1945); M. Krasner: Sur la théorie non abélienne des corps de classes, et les extensions finies de corps valués complets, (13-6-1945); A. Weil: L'hypothèse de Riemann dans les corps de fonctions algébriques, (4-7-1945); R. Marrot: La théorie mathématique de l'équation de Boltzmann, (7-11-1945); G. Bouligand: Sur des résultats obtenus par Mr- Zahorski dans l'application de la théorie des ensembles à la théorie des fonctions, (21-11-1945); G. Choquet: Sur les surfaces et hypersurfaces isométriques dans les espaces cartésiens, (21-11-1945); F. Pollaczec: Sur la résolution de certaines équations intégrales à l'aide de la théorie des fonctions d'une variable complexe, (15-12-1945).

J. Ferrand: Sur l'approximation des fonctions par des fonctions définies sur un réseau, (23-1-1946); M. Krasner: Sur une généralisation de la théorie de Galois, (13-12-1946); L. Gauthier: La géométrie réglée des espaces à $n$ dimensions, (13-2-1946); G. Choquet: Topologie des solutions des équations différentielles $y'=f(x,y)$, (20-3-1946); J. Favard: Corps convexes, (10-4-1946); N. Aronszajn: Sur certains développements canoniques en fonctions harmoniques de l'espace (8-5-1946).

# MATEMÁTICAS ELEMENTARES

## UM TEOREMA DE ARITMÉTICA

por ***José da Silva Paulo***

### 1. Um teorema de Aritmética

Ao mesmo tempo que se deduz a fórmula que dá o número de combinações de $m$ objectos tomados $n$ a $n$, demonstra-se que:

Teorema: *O produto de* n *inteiros consecutivos é divisível pelo produto dos* n *primeiros inteiros naturais,*

isto é que

$$\frac{(a+1)\,(a+2)\cdot\,\cdots\,\cdot(a+n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\,\cdots\,\cdot n} \tag{1}$$

é um inteiro, se fôrem $a$ e $n$ inteiros.

É possível, no entanto, demonstrar aquêle teorema ignorando a análise combinatória. Uma tal demonstração pode fazer-se mostrando que tôda a potência de um inteiro primo que divida o denominador de (1) dividirá o seu numerador, ou o que é o mesmo, que se na decomposição em factores primos, do denominador existir a potência $p^r$ de um inteiro primo $p$, na decomposição do numerador existirá uma potência $p^s$, do mesmo factor primo $p$, onde $s\geq r$; e se o facto se der para qualquer factor primo do denominador, (1) será um inteiro. Para fazermos esta demonstração necessitamos de certas noções que a seguir se expõem.

### 2. Parte inteira de um número real

Definição: *Chama-se parte inteira de um número real* x, *ao maior inteiro não superior a* x.

Notação: Para designar *a parte inteira de* x, ou como também se diz, o *maior inteiro contido em* x, usaremos a notação $[x]$.

Em vista da Definição teremos

$$[3]=3;\quad [\pi]=3;\quad [13/2]=6;\quad [-13/2]=-7 \text{ etc.}$$

Da definição resulta ainda que $[x]$, satisfaz às seguintes relações $[x]\leq x<[x]+1$, e, por isso, é $x=[x]+\theta$, sendo $0\leq\theta<1$. A $\theta$ dá-se o nome de *parte fraccionária de* x.

É fácil agora deduzir as seguintes propriedades

a) $[[x]]=[x]$
b) $[x+a]=[x]+a$, se $a$ fôr um inteiro
c) $[x]+[-x]=0$, ou a $-1$, conforme fôr $x$ um inteiro ou não
d) $[x+y]\geq[x]+[y]$
e) $[[x]/n]=[x/n]$, se $n$ fôr um inteiro natural.

As duas primeiras propriedades são evidentes bem como o caso de ser $x$ um inteiro, na propriedade *c)*. Se $x$ não fôr um inteiro será $x=[x]+\theta$, com $0<\theta<1$, e portanto $-x=-[x]-1+(1-\theta)$, onde $0<1-\theta<1$.

Tomando a parte inteira de $-x$, tem-se $[-x]=$ $=[-[x]-1+(1-\theta)]$, ou, em virtude de *b)*, $[-x]=$ $=-[x]-1+[1-\theta]$ ou, finalmente, $[-x]=-[x]-1$ e, portanto, $[-x]+[x]=-1$, c. c. d.

Provemos *d)*: Como é $x=[x]+\theta$, com $0\leq\theta<1$, e $y=[y]+\theta'$, com $0\leq\theta'<1$, vem $x+y=[x]+[y]+$ $+\theta+\theta'$ ou, pelas propriedades *a)* e *b)*, $[x+y]=[x]+$ $+[y]+[\theta+\theta']$. Ora $0\leq\theta+\theta'<2$, logo $[\theta+\theta']=0$, ou $1$. Daqui segue-se que $[x+y]\geq[x]+[y]$. Demonstremos finalmente *e)*. Sejam $q$ e $r$ o cociente e o resto da divisão de $[x]$ por $n$, será: $[x]=nq+r$, com $0\leq r\leq n-1$ logo $[x]/n=q+r/n$ onde $0\leq r/n\leq 1-1/n<1$ o que quere dizer que $[[x]/n]=q$.

Por outro lado como $x=[x]+\theta$, será $x=nq+r+\theta$ onde $0\leq\theta<1$ e $x/n=q+(r+\theta)/n$.

Ora $0\leq r+\theta<n$ e portanto $0\leq(r+\theta)/n<1$, o que permite afirmar ser $[x/n]=q$, que demonstra *e)*.

*Nota* — A propriedade *e)* ainda é válida quando $n$ é um inteiro qualquer diferente de zero, como se demonstra fàcilmente.

***Exercícios:***

1. Demonstre que o número de inteiros $m$ que satisfazem à dupla desigualdade $y\leq m<x$ é dado por $[x]-[y]$.
2. Demonstre que $[2x]-2[x]=0$ ou $1$ conforme fôr, a parte fraccionária de $x$, menor que $1/2$ ou maior ou igual a $1/2$.
3. Prove que $[2x]+[2y]\geq[x]+[y]+[x+y]$.

## 3. Maior potência de um inteiro primo contida num factorial

Sejam dados um inteiro primo $p$, e o factorial $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$. Se $p>n$, é claro que $p$ não divide $n!$, mas diremos, no entanto, que a maior potência de $p$ que divide $n!$ é $p^0$. Se $p\leq n$, então $n!$ é divisível por $p$, e para o que se segue é importante determinar a maior potência de $p$ que divide $n!$

Para isso representemos por $\nu(n)$ o expoente dessa potência.

Entre os números $1,2,3\cdots n$, sòmente $p,2p,3p\cdots$ são divisíveis por $p$ e o maior múltiplo de $p$ inferior a $n$ será $n_1\cdot p$ onde $n_1=[n/p]$.

Então o produto dos múltiplos de $p$ que existem em $n!$ é

$$p\cdot2p\cdot3p\cdot\cdots\cdot n_1p=p^{n_1}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n_1;$$

mas no produto $1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n_1$, o inteiro $p$ aparece como base duma potência cujo expoente é $\nu(n_1)$; então é

$$\nu(n)=n_1+\nu(n_1) \tag{2}$$

e do mesmo modo $\nu(n_1)=n_2+\nu(n_2)$, $\nu(n_2)=n_3+\nu(n_3)$, $\cdots$, onde $n_2=[n_1/p]$, $n_3=[n_2/p]\cdots$ formam uma cadeia descendente de inteiros não negativos, que tem portanto um último elemento. Seja $n_k=[n_{k-1}]$ êsse último elemento; então é

$$\nu(n_{k-1})=n_k \tag{4}$$

isto é $\nu(n_k)=0$, porque se fôsse $\nu(n_k)\neq0$ seria $\nu(n_k)=n_{k+1}+\nu(n_{k+1})$, onde $n_{k+1}\neq0$ e portanto $n_k$ não seria o último elemento da cadeia.

Eliminando $\nu(n_{k-1})$, $\nu(n_{k-2})\cdots$ entre (2), (3) e (4) obtém-se

$$\nu(n)=n_1+n_2+\cdots+n_k. \tag{5}$$

Como pela propriedade *e)* do § 2 se pode escrever $n_2=[n/p^2]$, $n_3=[n/p^3]\cdots$, teremos $\nu(n)=[n/p]+$ $+[n/p^2]+[n/p^3]+\cdots$ terminando a adição no primeiro têrmo para o qual fôr $p^k>n$, isto é, quando $\nu(n_k)=0$.

***Exemplo:***

Achar a maior potência de 7 contida em 1.000!

Como $\left[\frac{1000}{7}\right]=142$, $\left[\frac{1000}{49}\right]=\left[\frac{142}{7}\right]=20$ e $\left[\frac{1000}{343}\right]=$ $=\left[\frac{20}{7}\right]=2$ é $\nu(1000)=142+20+2=164$, e portanto $7^{164}$ é a maior potência de 7 contida em $1000!$.

Demonstremos o Teorema que propusemos no início. Pretendemos provar que o cociente

$$Q=\frac{(a+1)\,(a+2)\cdots(a+n)}{n!}$$

é um inteiro. Ora como $Q$ se pode escrever

$$Q=\frac{(a+n)\,!}{n!\,a!}$$

então o expoente da maior potência de um inteiro primo $p$, que entra na decomposição factorial do numerador é

$$\nu(n)=\left[\frac{a+n}{p}\right]+\left[\frac{a+n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots.$$

Por outro lado os expoentes das maiores potências do mesmo inteiro primo $p$ que entram nos factoriais do denominador são respectivamente

$$\nu(n)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$

e

$$\nu(a)=\left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{a}{p^2}\right]+\left[\frac{a}{p^3}\right]+\cdots$$

portanto o expoente da maior potência de $p$ que entra na decomposição factorial do denominador é

$$\nu(n)+\nu(a)=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{a}{p^2}\right]+\cdots$$

e como, em vista da propriedade *d)* do § 2, é

$$\left[\frac{n+a}{p}\right]\geq\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{a}{p}\right],\quad \left[\frac{n+a}{p^2}\right]\geq\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{a}{p^2}\right]\cdots$$

será $\nu(a+n)\geq\nu(a)+\nu(n)$.

Ora como esta propriedade se verifica qualquer que seja o inteiro primo que divida o denominador, o Teorema fica demonstrado.

## ALGUNS PONTOS DOS EXAMES DE ADMISSÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES ESTRANGEIRAS

**Escuela Especial de Ingenieros de Montes** — Madrid, Setembro de 1945.

**2187** — Um cone de altura $h$ está inscrito numa esfera de raio $R$. ¿A que distância $x$ do vértice do cone se deve conduzir um plano paralelo à base para que a área da secção produzida no cone esteja para a área da secção produzida na esfera pelo mesmo plano na relação $m/n$? Discussão.

**2188** — Determinar todos os valores de $x$ que satisfaçam à equação $\operatorname{sen} 5x = 16 \operatorname{sen}^5 x$.

**2189** — É $8m^3$ o volume do sólido limitado pelas três faces concorrentes de um cubo e pelo plano, que determinam os três vértices extremos das arestas, que concorrem no ponto de intersecção das três faces. Calcular o raio da esfera circunscrita a um tetraedro regular equivalente ao cubo.

**2190** — Para observar a passagem de aviões, dispõe-se de 3 estações $A$, $B$, $C$, determinando um triângulo de lados $a$, $b$, $c$, sôbre um terreno horizontal. Medem-se, num dado instante, os ângulos $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ que formam respectivamente as visuais dirigidas para um avião dos pontos $A$ $B$ $C$ com o plano determinado por êstes 3 pontos. Determinar a altura a que no instante considerado passou o avião sôbre o plano horizontal $ABC$.

**Escuel Especial de Ingenieros de Minas** — Madrid, Setembro de 1945.

**2191** — Determinar o lugar geométrico do vértice ds um triedro triortogonal cujas arestas são sempre tangentes a uma esfera de raio dado $R$.

**2192** — Determinar $a$ e $b$ de modo que o polinómio $6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ seja divisível pelo polinómio $x^2-x+b$.

**2193** — Calcular os valores inteiros que satisfazem ao sistema:

$$5x-3y>2 \quad 2x+y<11 \quad y>3.$$

**2194** — Resolva a inequação

$$x(x+1)/(x-1)>6.$$

**2195** — Num exágono regular $[ABCDEF]$ circunscrito a uma circunferência de centro $O$ e raio unidade traçam-se as diagonais $AC$ e $BF$ que se intersectam em $I$. Calcular a área gerada pelo lado $\overline{AF}$ e o volume gerado pelo triângulo $[AIF]$ quando o referido triângulo gira de 360º em tôrno do eixo $OIH$, sendo $H$ o ponto de tangência do lado $AB$.

Estes problemas são transcritos da revista espanhola *Matematica Elemental* 4.ª série, Tomo V, suplemento n.º 2 — Madrid, 1945, onde o leitor interessado encontrará muito mais material de estudo.

**Imperial College of Science and Technology** — Universidade de Londres — Exame de entrada — Setembro de 1944.

**2196** — Calcular com 3 decimais exactas

(1) $(x+x^{-3})^{1/2}$ para $x=0{,}7316$

(2) $\log^2_{10} x$ para $x=0{,}0192$.

**2197** — Em 8 fichas escrevem-se as letras $A$, $B$, $C$, $D$, $a$, $b$, $c$ e $d$, uma letra em cada ficha. Quantos grupos de 4 fichas podem formar-se contendo *a)* 2 letras maiúsculas e 2 minúsculas; *b)* pelo menos duas letras maiúsculas; *c)* pelo menos uma letra maiúscula e pelo menos uma letra minúscula?

**2198** — Resolva o sistema

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y-1}=1 \quad \frac{1}{y+1}+\frac{1}{x-1}=1.$$

**2199** — $[ABCD]$ é um trapésio; $AB$ e $DC$, lados paralelos, são perpendiculares a $BC$ e é $\theta$ o ângulo $\widehat{ACB}$. Sendo $\overline{AB}=l$ e $\overline{CD}=m$, calcule $\overline{AD}$ e o ângulo $\widehat{ABD}$.

**2200** — Um sistema de circunferências passa por 2 pontos fixos $A$ e $B$. Mostrar que são iguais os comprimentos das tangentes às circunferências tirados de qualquer ponto de $AB$, exterior ao segmento $\overline{AB}$.

Traçam-se tangentes $PT$ e $P'T'$ a cada uma das circunferências de pontos fixos $P$ e $P'$ equidistantes de $AB$ e do mesmo semi-plano que $AB$ determina. Mostre que $\overline{PT}^2-\overline{P'T'}^2$ é constante para as circunferências do sistema.

# MATEMÁTICAS SUPERIORES

## PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA

## ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

**I. S. A.** — MATEMÁTICAS GERAIS — **2.º exercício de revisão — 1 de Fevereiro de 1946.**

**2201** — Resolva a equação $(z^2+i)^3=z^2+i$ e represente no plano de Argand os afixos das suas raízes.

R: *As raízes da equação proposta são as raízes das equações* $z^2+i=0$, $z^2+i=1$ *e* $z^2+i=-1$ *que se podem escrever respectivamente,* $\sqrt{\operatorname{cis}(3\pi/2)}$, $z=\sqrt{\sqrt{2}\operatorname{cis}(7\pi/4)}$ *e* $z=\sqrt{\sqrt{2}\operatorname{cis}(5\pi/4)}$. *Por aplicação da fórmula de Moi-*